PME 2556 – Dinâmica dos Fluidos Computacional

Aula 1 – Princípios Fundamentais e Equação de Navier-Stokes

1.1 Introdução

O escoamento de um fluido é estudado através de equações de conservação para:

. Massa

. Quantidade de Movimento

. Energia

1.2 Notação indicial

A maioria dos livros de graduação sobre mecânica dos fluidos usa a notação simbólica ou vetorial. Assim, a velocidade é dada por:

$$\vec{u} = u\vec{i} + \upsilon\vec{j} + w\vec{k}$$

1.2 Notação indicial

A aceleração é dada por:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u} \cdot \nabla\right)\vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(u \frac{\partial}{\partial x} + \upsilon \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right)\vec{u}$$

Que resulta:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + \upsilon \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{u}}{\partial z}}$$

1.2 Notação indicial

As acelerações para as três direções do sistema de coordenadas são:

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{\partial \upsilon}{\partial t} + u\frac{\partial \upsilon}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial y} + w\frac{\partial \upsilon}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

1.2 Notação indicial

Na notação indicial, a velocidade é dada por:

$$\boxed{\vec{u} = u_i}$$

Onde o índice "*i*" pode representar qualquer uma das três direções do sistema de coordenadas *x*,*y*,*z*.

1.2 Notação indicial

As acelerações são representadas por:

$$\boxed{a_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}$$

1.2 Notação indicial

Note que, na expressão da aceleração, cada termo aditivo tem um índice isolado (“*i*”), chamado “índice livre”, indicando a direção da componente, e um dos termos, em que há uma somatória, tem um índice que se repete (“*j*”) numa operação de multiplicação.

$$a_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

índice livre

índice repetido

1.2 Notação indicial

Na notação indicial, usa-se a regra de que o índice repetido na multiplicação dentro da somatória já indica a necessidade de somatória. Assim, o sinal de somatória pode ser evitado:

$$a_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

1.2 Notação indicial

Vantagem óbvia - ao invés de escrever:

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{\partial \upsilon}{\partial t} + u\frac{\partial \upsilon}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial y} + w\frac{\partial \upsilon}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

Escreve-se apenas:

$$\boxed{a_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}$$

1.2 Notação indicial

A notação indicial é particularmente útil para escrever equações grandes, e se relaciona diretamente com o hábito de fazer programação usando operações com índices.

1.2 Notação indicial

Ex: Equação de Navier-Stokes para escoamento incompressível:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u} \cdot \nabla\right)\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} + \vec{g}$$

1.2 Notação indicial

Isso resulta:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+g_x$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t}+u\frac{\partial \upsilon}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+w\frac{\partial \upsilon}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial z^2}\right)+g_y$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+g_z$$

1.2 Notação indicial

As três equações são substituídas por:

$$\boxed{\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + g_i}$$

1.2 Notação indicial

Cada termo aditivo tem um índice livre (“*i*”) e dois termos tem multiplicações com a repetição de “*j*” indicando somatória.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + g_i$$

índice repetido

índice livre

índice repetido

1.2 Notação indicial

Detalhe: a letra “i” para o índice livre e “j” para o repetido podem ser substituídas por qualquer outra letra. Assim, as três equações baixo são equivalentes:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + g_i$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_k} + \nu \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_j} + g_k$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + u_m \frac{\partial u_k}{\partial x_m} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_k} + \nu \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_q \partial x_q} + g_k$$

1.2 Notação indicial

Ex - Divergente de um vetor:

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Ou:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_j}{\partial x_j}}$$

1.2 Notação indicial

Teoremas do Gradiente e Divergente

$$\int_A \vec{n}\, p\ dA = \int_\forall \nabla p\, d\forall \quad \rightarrow \quad \int_A n_j\, p\ dA = \int_\forall \frac{\partial p}{\partial x_j}\, d\forall$$

$$\int_A \vec{n} \cdot \vec{u}\, dA = \int_\forall \nabla \cdot \vec{u}\, d\forall \quad \rightarrow \quad \int_A n_j u_j\ dA = \int_\forall \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\, d\forall$$

Tensor de 2ª ordem

$$\int_A \vec{n} \cdot \overleftrightarrow{\sigma}\, dA = \int_\forall \nabla \cdot \overleftrightarrow{\sigma}\, d\forall \quad \rightarrow \quad \int_A n_j \sigma_{ji}\, dA = \int_\forall \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}\, d\forall$$

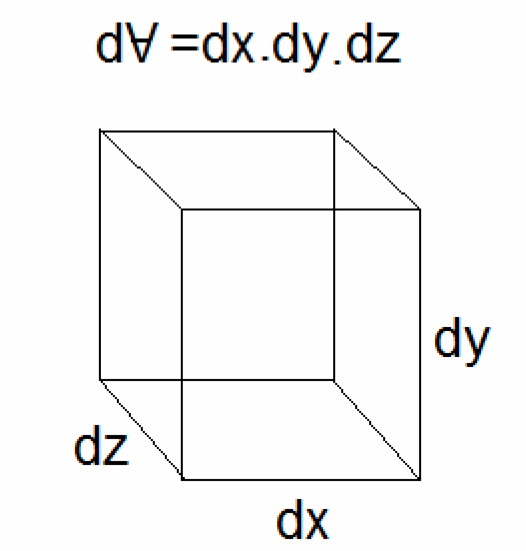
1.3 Derivada Material

Seja ϕ uma propriedade de uma partícula material (velocidade, temperatura, massa específica, etc.). A taxa de variação da propriedade ϕ da partícula é dada por:

$$\frac{D\phi_{partícula}}{Dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\phi_{part}(t+\Delta t) - \phi_{part}(t)}{\Delta t} = \frac{\partial \phi(\vec{x},t)}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \phi(\vec{x},t)$$

$$\boxed{\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + u_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j}}$$

1.4 Taxa de Variação de um Elemento Volumétrico



$$\boxed{\frac{1}{d\forall}\frac{D(d\forall)}{Dt}=\frac{\partial u_j}{\partial x_j}}$$

1.5 Equação da Continuidade

A massa de uma partícula material elementar é dada por:

$$dm_{part} = \rho \, d\forall$$

A variação da massa dessa partícula material é dada por:

$$\frac{D(dm_{part})}{Dt} = \frac{D\rho}{Dt} d\forall + \rho \frac{D(d\forall)}{Dt} = 0$$

1.5 Equação da Continuidade

Aplicando a expressão da taxa de variação do volume elementar:

$$\frac{D\rho}{Dt} d\forall + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} d\forall = 0$$

Isso resulta uma forma menos conhecida da equação da continuidade:

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0}$$

1.5 Equação da Continuidade

Usualmente, a forma mais conhecida é obtida substituindo a derivada material da massa específica:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

Que, pela regra da cadeia, resulta:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \left(\rho u_j\right)}{\partial x_j} = 0}$$

1.5 Equação da Continuidade

Embora a 2ª forma seja mais conhecida que a 1ª , esta tem uma utilidade maior para conceituar um escoamento incompressível. Num escoamento incompressível, uma partícula material mantém massa específica constante, logo:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

1.5 Equação da Continuidade

Assim, temos:

$$\underbrace{\frac{D\rho}{Dt}}_{0} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

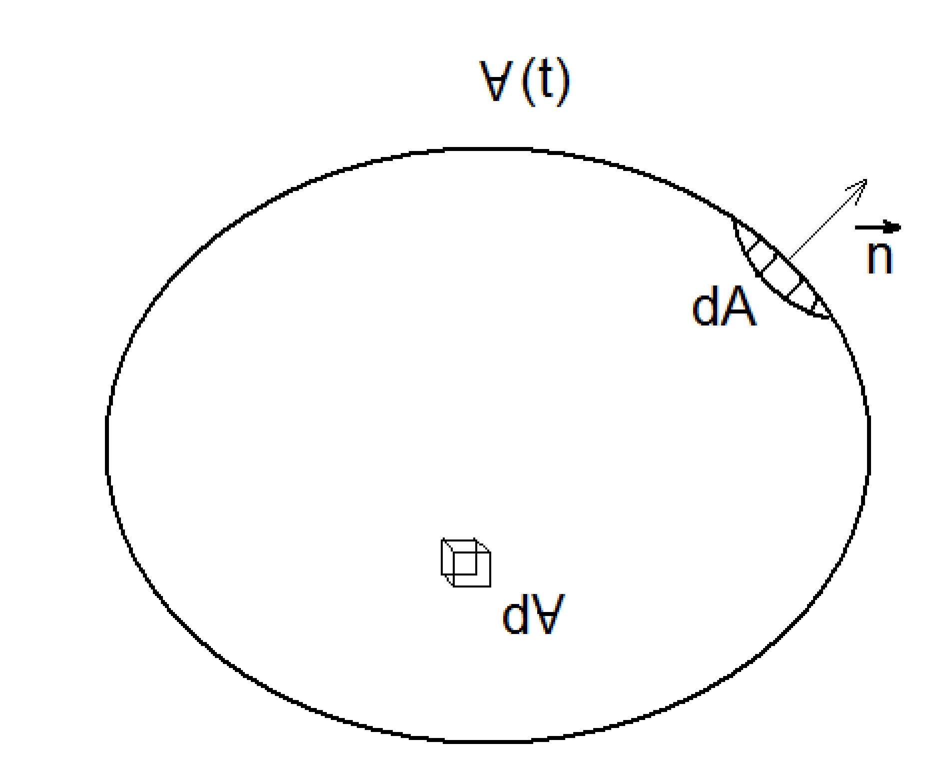
Que resulta:

$$\boxed{\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0}$$

1.6 teorema do Transporte de Reynolds

F: propriedade de uma certa quantidade de massa de fluido(ex: quantidade de movimento

ϕ: propriedade *F* por unidade de massa do fluido (ex: velocidade)



$$F = \int_{\forall(t)} \rho \phi \, d\forall$$

1.6 teorema do Transporte de Reynolds

A variação de *F* é dada por:

$$\frac{DF}{Dt} = \int_{\forall(t)} \left[\frac{D\phi}{Dt}\rho\, d\forall + \phi \underbrace{\frac{D(\rho\, d\forall)}{Dt}}_{0} \right] = \int_{\forall(t)} \frac{D\phi}{Dt}\rho\, d\forall$$

Por outro lado, podemos escrever:

$$\frac{DF}{Dt} = \int_{\forall(t)} \left[\frac{D(\rho\phi)}{Dt} d\forall + \rho\phi \frac{D(d\forall)}{Dt} \right]$$

1.6 teorema do Transporte de Reynolds

Isso resulta:

$$\frac{DF}{Dt} = \int_{\forall(t)} \left[\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} d\forall + u_j \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial x_j} d\forall + \rho\phi \frac{\partial u_j}{\partial x_j} d\forall \right]$$

Que também resulta:

$$\boxed{\frac{DF}{Dt} = \int_{\forall(t)} \left[\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\rho\phi u_j\right)}{\partial x_j} \right] d\forall}$$

1.6 teorema do Transporte de Reynolds

Logo:

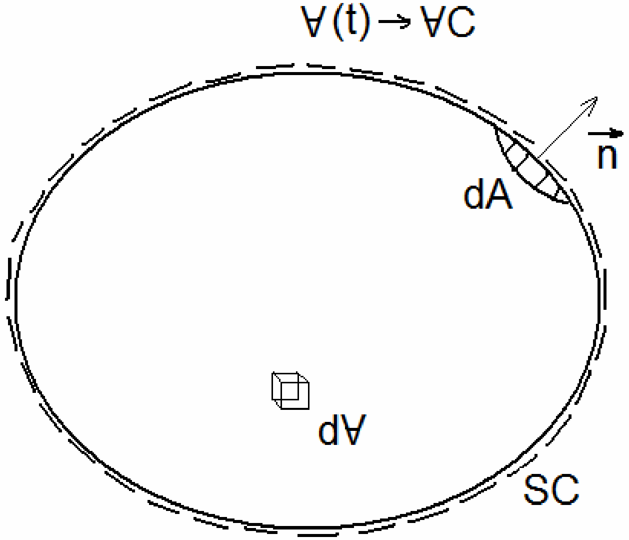
$$\frac{DF}{Dt} = \int_{\forall(t)} \rho \frac{D\phi}{Dt} d\forall = \int_{\forall(t)} \left[\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\phi u_j)}{\partial x_j} \right] d\forall$$

Fazendo $\forall \to d\forall$:

$$\boxed{\rho \frac{D\phi}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\phi u_j)}{\partial x_j}}$$

1.6 teorema do Transporte de Reynolds

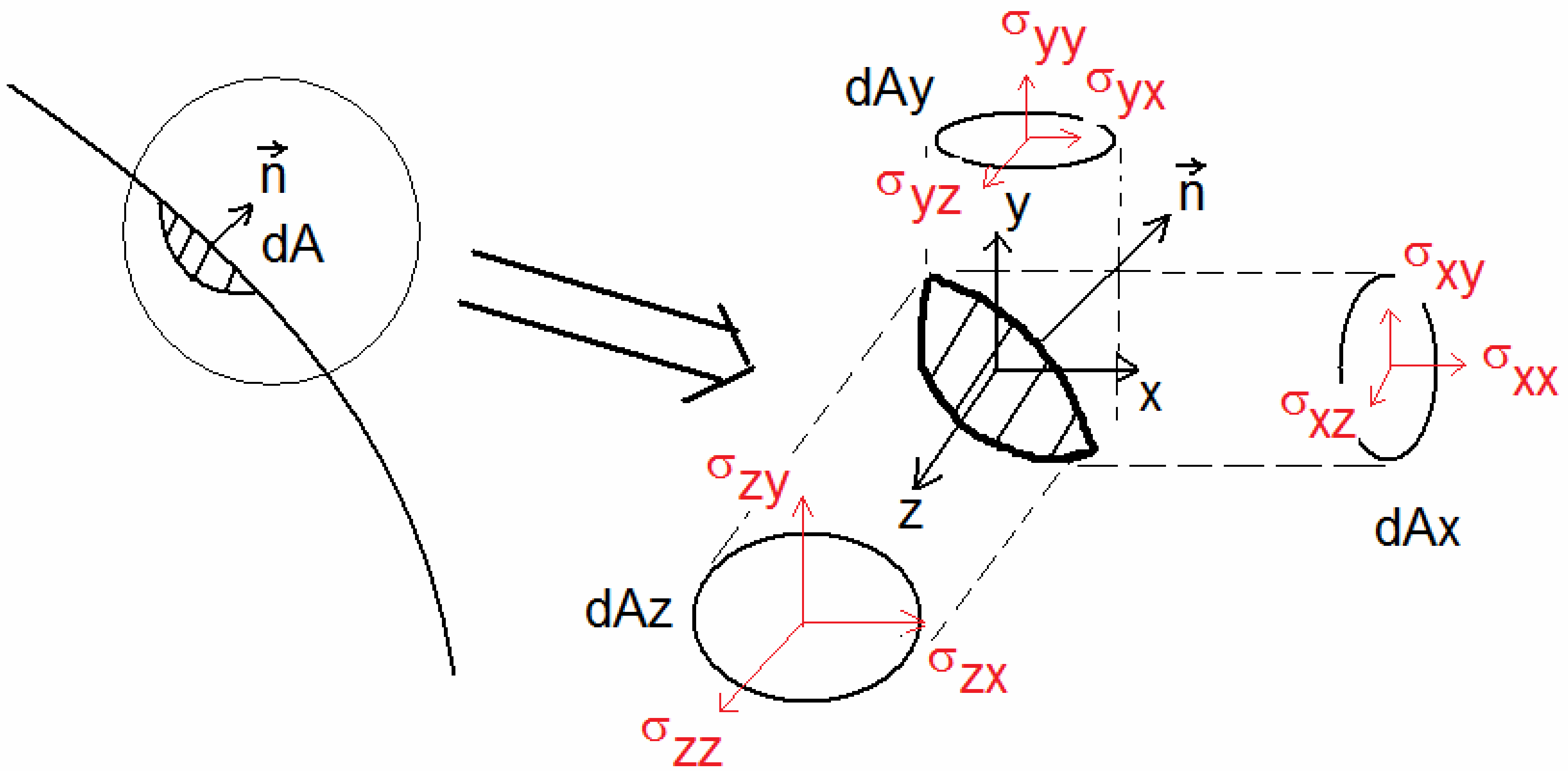
Supondo que o volume móvel ocupa instantaneamente um volume de controle fixo com superfície de controle Sc, e aplicando o teorema de Gauss:



$$\frac{DF}{Dt} = \int_{\forall(t)} \rho \frac{D\phi}{Dt} d\forall = \int_{\forall C} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} d\forall + \int_{\forall C} \frac{\partial(\rho\phi u_j)}{\partial x_j} d\forall$$

$$\frac{DF}{Dt} = \int_{\forall(t)} \rho \frac{D\phi}{Dt} d\forall = \int_{\forall C} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} d\forall + \int_{SC} \phi \rho u_j n_j dA$$

1.7 Forças sobre uma superfície



$$dF_x = \sigma_{xx}\, dA_x + \sigma_{yx}\, dA_y + \sigma_{zx}\, dA_z$$

$$dF_y = \sigma_{xy}\, dA_x + \sigma_{yy}\, dA_y + \sigma_{zy}\, dA_z$$

$$dF_z = \sigma_{xz}\, dA_x + \sigma_{yz}\, dA_y + \sigma_{zz}\, dA_z$$

1.7 Forças sobre uma superfície

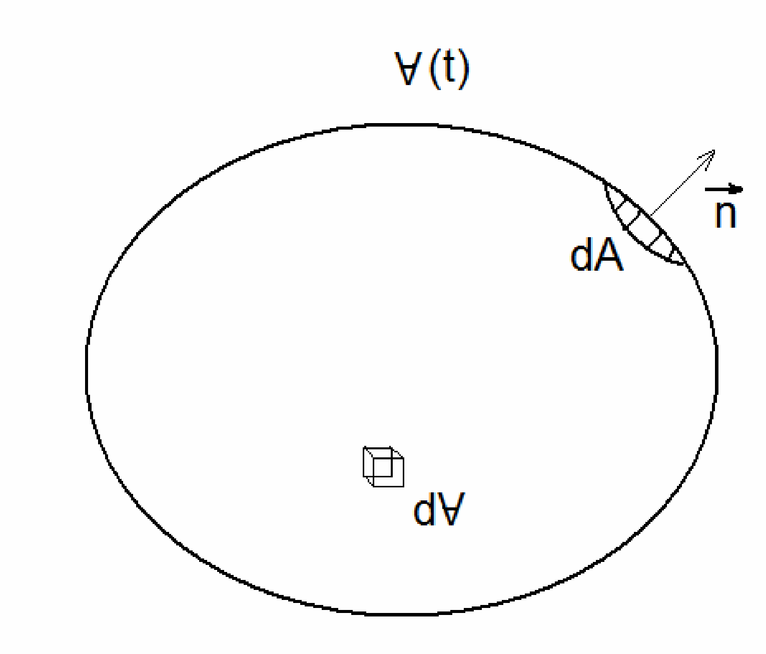
$$dF_i = \sigma_{ji}\, dA_j$$

Podemos escrever:

$$dF_i = \sigma_{ji} \frac{dA_j}{dA} dA = \sigma_{ji}\, n_j\, dA$$

1.8 Equação da Quantidade de Movimento

Aplicando a segunda lei de newton ao volume móvel:



$$\int_{\forall(t)} \rho\, \vec{a}\, d\forall = \sum \vec{F}_{contato} + \sum \vec{F}_{campo}$$

Isso resulta:

$$\int_{\forall(t)} \rho \frac{Du_i}{Dt} d\forall = \int_{S(t)} n_j\, \sigma_{ji}\, dA + \int_{\forall(t)} \rho\, g_i\, d\forall$$

Pelo teorema de Gauss:

$$\int_{\forall(t)} \rho \frac{Du_i}{Dt} d\forall = \int_{\forall(t)} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} d\forall + \int_{\forall(t)} \rho\, g_i\, d\forall$$

1.8 Equação da Quantidade de Movimento

Fazendo o volume de partícula tender ao volume elementar:

$$\forall \rightarrow d\forall$$

Obtemos a equação diferencial:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho g_i$$

Que pode ser escrita:

$$\boxed{\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho g_i}$$

1.9 Tensor das Tensões para Fluido Newtoniano

$$\boxed{\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij} + 2\mu S_{ij} - \frac{2}{3}\mu\,\delta_{ij}\,\frac{\partial u_k}{\partial x_k}}$$

Onde o tensor taxa de deformação é dado por:

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

E o tensor “delta” de Kronecker é dado por:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 \;\; se \; i \neq j \\ 1 \; se \; i = j \end{cases}$$

1.10 Equação de Navier-Stokes

Substituindo o tensor das tensões para um fluido newtoniano na equação da quantidade de movimento:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j}=-\delta_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]-\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{2}{3}\mu\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)+\rho g_i$$

Porém, temos que:

$$\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_i}$$

Logo:

$$\boxed{\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{2}{3}\mu\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)+\rho g_i}$$

1.10 Equação de Navier-Stokes

Se o escoamento for incompressível:

$$\boxed{\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]+\rho g_i}$$

1.10 Equação de Navier-Stokes

Se além do escoamento ser incompressível, a viscosidade dinâmica for uniforme:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}+\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\rho g_i$$

Como podemos inverter a ordem de derivação no penúltimo termo:

$$\boxed{\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}+\rho g_i}$$