Engineering School of São Carlos, University of São Paulo

SEL 5739 - Sistemas Não Lineares
Existência e Unicidade

Prof. Luís Fernando C. Alberto

September 9, 2020

Não existência de solução:

$$\dot{x} = -sign(x) \quad x(0) = 0$$

$$sign(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Não unicidade de soluções:

$$\dot{x} = 3x^{\frac{2}{3}}$$

Soluções não definidas para todo o tempo:

$$\dot{x} = x^2$$

$\dot{x} = f(t, x(t)) \quad f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ é uma função contínua

Definição: Uma solução de $\dot{x} = f(t, x)$ em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ é uma função $x(\cdot) : I \to \mathbb{R}^n$ tal que para $(t, x(t)) \in D$, para todo $t \in I$, $x(\cdot)$ é diferenciável em I e $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ para todo $t \in I$.

$$\dot{x} = f(t, x(t)) \qquad f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n \text{ é uma função contínua}$$

Seja $(t_0, x_o) \in D$ uma condição inicial.
Resolver o P.V.I. consiste em encontrar um intervalo I contendo t_o e uma solução $x(t)$ de $\dot{x} = f(t, x)$ neste intervalo tal que $x(t_0) = x_o$

$$\dot{x} = f(t, x(t))$$

Lema: Seja $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ contínua. Então $x(t)$ é solução de $\dot{x} = f(t, x)$ em I com $x(t_o) = x_o$, $(t_o, x_o) \in D$ se e só se $x(t)$ é contínua em I, $(t, x(t)) \in D$ para todo $t \in I$ e:

$$x(t) = x(t_o) + \int_{t_o}^{t} f(s, x(s))ds$$

Problema de Valor Inicial:

$$\dot{x} = f(t, x(t)) \qquad x(t_o) = x_o$$

Teorema: Seja $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um aberto. Seja $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ contínua e localmente Lipschtziana relativamente a x. Então, para cada $(t_o, x_o) \in D$, existe uma única solução não continuável do P.V.I.

Problema de Valor Inicial:

$$\dot{x} = f(t, x(t)) \qquad x(t_o) = x_o$$

Parte 1 - Existência Local: Seja $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um aberto. Seja $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ contínua e localmente Lipschtziana relativamente a x. Então, para cada $(t_o, x_o) \in D$, existe um intervalo I contendo t_o e uma única solução do P.V.I neste intervalo.

Parte 2 - Unicidade Local Implica Unicidade Global
Parte 3 - A solução local admite um prolongamento maximal

Problema de Valor Inicial:

$$\dot{x} = f(t, x(t)) \quad x(t_o) = x_o$$

1. Define-se um operador $T : \mathcal{C}[I, \mathbb{R}^n] \rightarrow \mathcal{C}[I, \mathbb{R}^n]$
2. Mostra-se que T é uma contração
3. Utiliza-se o Teorema do Ponto Fixo de Banach-Cacciopoli para provar existência e unicidade das soluções

Seja M um espaço métrico.

Definição: Dizemos que $T : M \to M$ é uma contração se existir constante real $\rho \in [0, 1)$ tal que:

$$d(T(x_1), T(x_2)) \leq \rho d(x_1, x_2)$$

Teorema: Seja M um espaço métrico completo e $T : M \to M$ uma contração. Então existe um único ponto fixo $x^* \in M$, isto é, $x^* = T(x^*)$. Além disso, a sequência dada por:

$$x_{j+1} = T(x_j)$$

converge para x^*.

$$\dot{x} = f(t, x(t))$$

Definição: A função f é localmente Lipschtziana em relação a x se para cada compacto $U \subset D$ existir constante real $k = k(U) \geq 0$ tal que:

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq k\|x - y\| \quad \forall (t,x),(t,y) \in U$$

Problema de Valor Inicial:

$$\dot{x} = f(t, x(t)) \quad x(t_o) = x_o$$

Parte 1 - Existência Local: Seja $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um aberto. Seja $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua e localmente Lipschtziana relativamente a x. Então, para cada $(t_o, x_o) \in D$, existe um intervalo I contendo t_o e uma única solução do P.V.I neste intervalo.

Problema de Valor Inicial:

$$\dot{x} = f(t, x(t)) \qquad x(t_o) = x_o$$

Parte 2 - Unicidade Local Implica Unicidade Global

Problema de Valor Inicial:

$$\dot{x} = f(t, x(t)) \qquad x(t_o) = x_o$$

Definição: Seja ϕ solução do P.V.I num intervalo I contendo t_o. A solução $\hat{\phi} : \hat{I} \to \mathbb{R}^n$ é uma continuação ou prolongamento de ϕ se $I \subset \hat{I}$ e se $\hat{\phi}|_I = \phi$

Observação: Pode-se definir continuação à direita, à esquerda. Dizemos que uma solução é continuável à direita (à esquerda) ou não continuável.

Problema de Valor Inicial:

$$\dot{x} = f(t, x(t)) \qquad x(t_o) = x_o$$

Teorema: Sejam $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aberto, $f : D \to \mathbb{R}^n$ contínua e $x(t)$ uma solução do P.V.I. Se $x(t)$ é continuável, então $x(t)$ admite um prolongamento não continuável ou maximal. Além disto, se $x(t)$ é solução em $[a, \omega)$ e for não continuável à direita, então $x(t)$ tende à fronteira de D quando $t \to \omega$, ou mais precisamente, dado um conjunto compacto $U \subset D$, existe $t_U \in [a, \omega)$ tal que $(t, x(t)) \notin U$ se $t \in (t_U, \omega)$.

Problema de Valor Inicial:

$$\dot{x} = f(t, x(t)) \qquad x(t_o) = x_o$$

Corolário: Sejam $D = R^{n+1}$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ contínua e localmente Lipschtziana.

1. Ou a solução do P.V.I. $x(t)$ está definida à direita para $t = +\infty$ ou explode em tempo finito.
2. Se a solução $x(t)$ é limitada para $t \in [t_o, \omega)$, onde ω é o tempo maximal de definção da solução à direita, então $\omega = +\infty$.

Problema de Valor Inicial:

$$\dot{x} = f(t, x(t)) \qquad x(t_o) = x_o$$

A continuidade das soluções na variável t é consequência da diferenciabilidade da solução no intervalo de existência.

A continuidade das soluções com relação às condições iniciais t_o e x_o segue como consequência de uma versão uniforme do Teorema de Banach-Cacciopoli.

Teorema: Seja M um espaço métrico completo, Λ um espaço métrico, e $T : M \times \Lambda \to M$ uma contração uniforme relativamente à $x \in M$. Então, para cada $y \in \Lambda$, existe um único ponto fixo $x^* = x^*(y) \in M$, isto é, $x^* = T(x^*)$. Além disso, se para cada x fixado em M a aplicação $y \in \Lambda \to T(x, y) \in M$ for contínua, então $x^*(y)$ é contínua em Λ.

Equação Diferencial:

$$\dot{x} = f(t, x(t))$$

$\varphi(t, t_o, x_o)$ - Solução de $\dot{x} = f(t, x)$ que no tempo t_o passa por x_o

Seja (ω^-, ω^+) intervalo maximal de definição da solução $\varphi(t, t_o, x_o)$. Dado intervalo $[a, b] \subset (\omega^-, \omega^+)$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$|t_1 - t_o| + \|x_1 - x_o\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(t, t_1, x_1) - \varphi(t, t_o, x_o)\| \leq \varepsilon \quad \forall t \in [a, b]$$

lfcalberto@usp.br