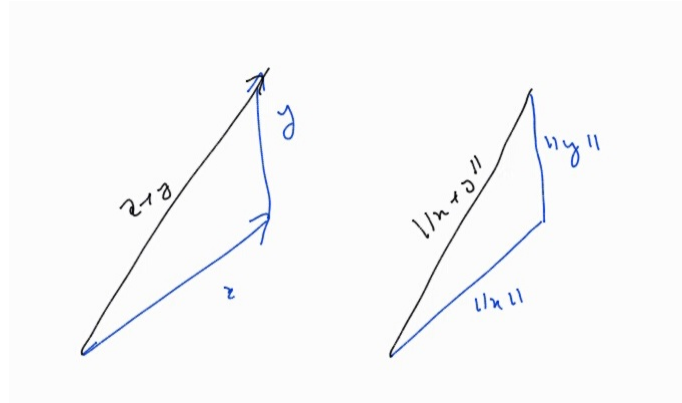


Espaços Normados

Definição: Uma norma $\|\cdot\|$ em um espaço vetorial X é uma função real em X com as seguintes propriedades:

- i) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X$.
- ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall x \in X \text{ e } \forall \alpha \in K (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.
- iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$ (desigualdade triangular).



Um espaço vetorial + norma é chamado espaço normado.

Note que a norma em X induz uma métrica e X da forma

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad \forall x, y \in X. \quad (1)$$

Provemos a quarta propriedade da métrica, já que as outras três são imediatas. Para isto, temos

$$d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z). \quad (2)$$

Um espaço normado completo na métrica induzida pela norma é chamado espaço de Banach.

Note que a norma é uma função contínua de $(X, \|\cdot\|)$ em \mathbb{R} .

Demonstração: Para todo $x, y \in X$, temos

$$\|y\| \leq \|y - x + x\| \leq \|x\| + \|y - x\| \Rightarrow \|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|. \quad (3)$$

Trocando os papéis de x e y chegamos em

$$\| \|y\| - \|x\| \| \leq \|y - x\|. \quad (4)$$

Portanto, dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \epsilon$. Se $d(x, y) = \|y - x\| < \delta$, então $\| \|y\| - \|x\| \| \leq \|y - x\| < \epsilon$.

Exemplo: \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n com

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^2 \right)^{1/2} \quad (5)$$

e

$$d(x, y) = \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j - \eta_j|^2 \right)^{1/2}. \quad (6)$$

Eles formam um espaço de Banach.

Exemplo: l^p , $1 \leq p < \infty$ com

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{1/p} \quad (7)$$

e

$$d(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^p \right)^{1/p}. \quad (8)$$

l^p é um espaço de Banach.

Exemplo: l^∞ com

$$\|x\| = \sup_{j \in \mathbb{N}} \{|\xi_j|\} \quad (9)$$

e

$$d(x, y) = \sup_{j \in \mathbb{N}} \{|\xi_j - \eta_j|\} \quad (10)$$

l^∞ é um espaço de Banach.

Exemplo: $C[a, b]$ com

$$\|x\| = \max_{t \in [a, b]} \{|x(t)|\} \quad (11)$$

e

$$d(x, y) = \max_{t \in [a, b]} \{|x(t) - y(t)|\}. \quad (12)$$

$C[a, b]$ é um espaço de Banach.

Exemplo: $(X, \|\cdot\|)$ espaço das funções contínuas em $[0, 1]$ com a norma

$$\|x\|_2 = \left(\int_0^1 |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} \quad (13)$$

e

$$d(x, y) = \left(\int_0^1 |x(t) - y(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \quad (14)$$

Vejamos que $(X, \|\cdot\|)$ é espaço normado. Para isto, lembre que

$$AB \leq \frac{A^2}{2} + \frac{B^2}{2}. \quad (15)$$

Tome $A \equiv \frac{|x(t)|}{\|x\|_2}$ e $B \equiv \frac{|y(t)|}{\|y\|_2}$. Assim

$$\frac{|x(t)y(t)|}{\|x\|_2 \|y\|_2} \leq \frac{1}{2} \frac{|x(t)|^2}{\|x\|_2^2} + \frac{1}{2} \frac{|y(t)|^2}{\|y\|_2^2}. \quad (16)$$

Integrando de zero a um, temos

$$\frac{\int_0^1 |x(t)y(t)| dt}{\|x\|_2 \|y\|_2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \quad (17)$$

e chegamos na desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\left| \int_0^1 x(t)y(t)dt \right| \leq \int_0^1 |x(t)y(t)|dt \leq \|x\|_2 \|y\|_2. \quad (18)$$

Provemos agora a desigualdade de Minkowski, que diz

$$\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2. \quad (19)$$

Para isto,

$$|x(t) + y(t)|^2 = |x(t) + y(t)||x(t) + y(t)| \leq |x(t)||x(t) + y(t)| + |y(t)||x(t) + y(t)|. \quad (20)$$

Portanto, por Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \int_0^1 |x(t)||x(t) + y(t)|dt &\leq \|x\|_2 \|x + y\|_2 \\ \int_0^1 |y(t)||x(t) + y(t)|dt &\leq \|y\|_2 \|x + y\|_2 \end{aligned} \quad (21)$$

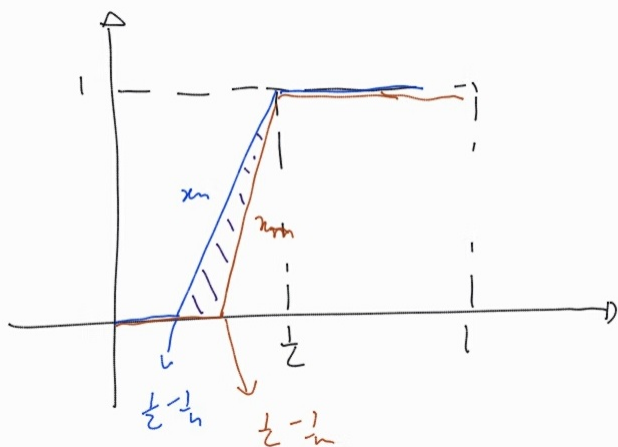
e assim

$$\|x + y\|_2^2 \leq (\|x\|_2 + \|y\|_2)(\|x + y\|_2) \Rightarrow \|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2. \quad (22)$$

Afirmamos que este espaço métrico é incompleto. Para isto, tome a sequência de funções neste espaço

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1/2 - 1/n] \\ n(t - 1/2 + 1/n), & t \in (1/2 - 1/n, 1/2) \\ 1, & t \in [1/2, 1]. \end{cases} \quad (23)$$

Temos assim, para $m > n$



$$\begin{aligned} d(x_n, x_m)^2 &= \int_0^1 |x_n(t) - x_m(t)|^2 dt = \\ &= \int_{1/2-1/n}^{1/2-1/m} (n(t - 1/2 + 1/n))^2 dt + \int_{1/2-1/m}^{1/2} [(n(t - 1/2 + 1/n) - (m(t - 1/2 + 1/m)))]^2 dt \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Portanto $(x_n(t))$ é de Cauchy. Suponhamos que exista $x(t)$ contínua tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_2^2 = 0$. Temos assim que

$$\int_0^{1/2-1/n} |x(t)|^2 dt + \int_{1/2-1/n}^{1/2} |n(t - 1/2 + 1/n) - x(t)|^2 dt + \int_{1/2}^1 |1 - x(t)|^2 dt \rightarrow 0. \quad (25)$$

Dessa forma, cada integral deve ir a zero e temos

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1/2) \\ 1 & t \in (1/2, 1]. \end{cases} \quad (26)$$

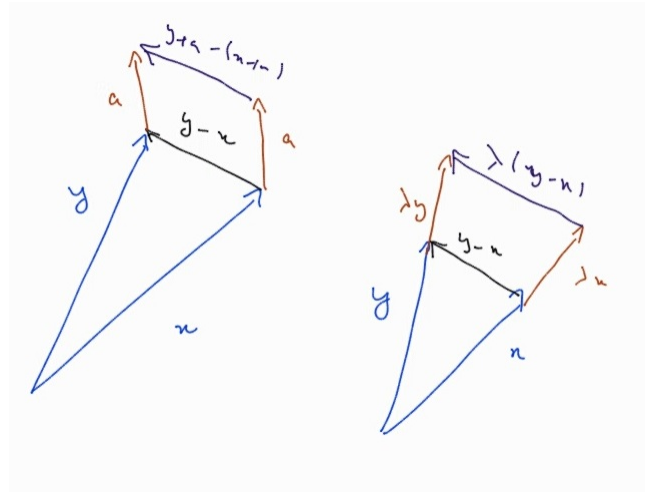
Logo $x(t)$ não pode ser contínua e, portanto $x_n(t)$ não converge. Logo o espaço é incompleto.

Lema: Se uma métrica d é induzida por uma norma em um espaço normado X , então:

i) $d(x + a, y + a) = d(x, y)$.

ii) $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|d(x, y)$.

Demonstração: $d(x + a, y + a) = \|x + a - (y + a)\| = \|x - y\| = d(x, y)$.
 $d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = |\alpha| \|x - y\| = |\alpha|d(x, y)$.



Exemplo: No espaço s de todas as seqüências reais ou complexas, a métrica

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\xi_j - \eta_j|}{1 + |\xi_j - \eta_j|} \quad (27)$$

não provém de uma norma. Para vermos isto, tome $x = (1, 0, 0, \dots)$ e $y = (0, 1, 0, \dots)$. Assim

$$d(x, y) = \frac{1}{2} \frac{1}{1+1} + \frac{1}{2^2} \frac{1}{1+1} = \frac{3}{8} \quad (28)$$

$$d(2x, 2y) = \frac{1}{2} \frac{2}{1+2} + \frac{1}{2^2} \frac{2}{1+2} = \frac{1}{2} \neq 2d(x, y).$$

Definição: Um subespaço $Y \subset X$ de um espaço normado X é um subespaço vetorial de X com a norma obtida pela restrição em Y . Se $Y \subset X$ é fechado em X é chamado subespaço fechado de X .

Teorema: Um subespaço Y de um espaço de Banach X é completo se, e somente se, Y é fechado em X .

Demonstração: Já vimos a demonstração em espaços métrico.

Teorema: Seja $(X, \|\cdot\|)$ espaço normado e $V \subset X$ subespaço próprio fechado de X . Então V é nunca denso. Ou equivalentemente, o complementar de V é aberto e denso.

Demonstração: Suponha que V tenha interior não vazio. Então existe $v \in V$ e $r > 0$ tal que $B(v; r) \subset V$. Logo, para qualquer $x \notin V$, temos

$$v + \frac{r}{2} \frac{x - v}{\|x - v\|} \in B(v; r), \quad (29)$$

pois

$$\left\| v + \frac{r}{2} \frac{x - v}{\|x - v\|} - v \right\| = \frac{r}{2}. \quad (30)$$

Mas

$$x = \frac{2}{r} \|x - v\| \left(v + \frac{r}{2} \frac{x - v}{\|x - v\|} \right) - \left(\frac{2}{r} \|x - v\| - 1 \right) v \in V, \quad (31)$$

já que V é fechado por combinações lineares. Esta contradição nos leva ao resultado esperado.