4. TEOREMA DA ENERGIA

4.1. CÁLCULO DA ENERGIA CINÉTICA P/ UM SISTEMA MATERIAL (RÍGIDO)

A ENERGIA CINÉTICA PARA UM SISTEMA DE PONTOS MATERIAIS P_i É POR DEFINIÇÃO.

$$T = \frac{1}{2} \Sigma m_i \dot{P}_i^2 = \frac{1}{2} \Sigma m_i \vec{v}_i^2 \qquad (I)$$

SE O SISTEMA FOR RÍGIDO VALE A FÓRMULA DE POISSON.

$$\vec{v}_i = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge (P_i - O)$$

ONDE O É UM DE SEUS PONTOS ($\vec{v}_0$ CONHECIDA) E $\vec{\omega}$ (TAMBÉM CONHECIDO) O VETOR DE ROTAÇÃO, SUBSTITUINDO EM (I):

$$T = \frac{1}{2} \Sigma m_i \left[\vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge (P_i - O)\right]^2$$

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} \vec{v}_0^2 \Sigma m_i}_{(a)} + \underbrace{\Sigma m_i \vec{v}_0 . \vec{\omega} \wedge (P_i - O)}_{(b)} + \underbrace{\Sigma \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \wedge (P_i - O))^2}_{(c)}$$

$$(a) = \frac{1}{2} v_0^2 m \quad , \quad \text{POIS } \Sigma m_i = m$$

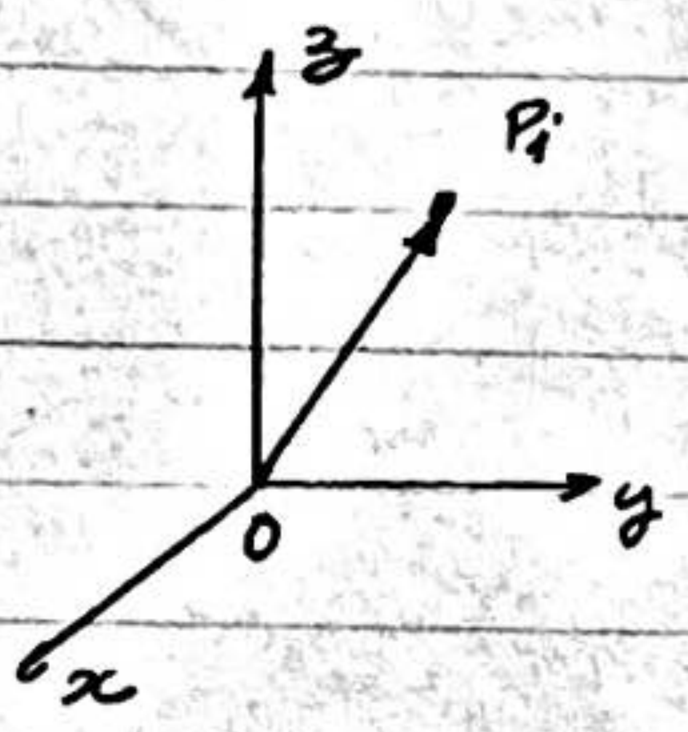
$$(b) = \vec{v}_0 . \vec{\omega} \wedge \Sigma (P_i - O) m_i = \vec{v}_0 . \vec{\omega} \wedge (G - O) m = m \vec{v}_0 . \vec{\omega} \wedge (G - O)$$

$$\text{POIS } \quad G - O = \Sigma m_i (P_i - O)/m$$

$$(c) = \Sigma \frac{1}{2} m_i \left[\vec{\omega} \wedge (P_i - O)\right]^2 = \Sigma \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \wedge (P_i - O)) . (\vec{\omega} \wedge (P_i - O))$$

VAMOS CHAMAR: $\vec{w} = w_x \vec{i} + w_y \vec{j} + w_z \vec{k}$

$P_i - O = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; COM REFERÊNCIA A UM SISTEMA DE EIXOS QUE TEM ORIGEM SOBRE O PONTO $\underline{O}$ DE VELOCIDADE CONHECIDA.



DAÍ: $\vec{w} \wedge (P_i - O) = (w_x, w_y, w_z) \wedge (x, y, z) =$

$$= (w_y z - w_z y,\ w_z x - w_x z,\ w_x y - w_y x)$$

E (c) FICA IGUAL A.

$$\Sigma \frac{1}{2} m_i \left[(w_y z - w_z y)^2 + (w_z x - w_x z)^2 + (w_x y - w_y x)^2 \right] =$$

$$= \Sigma \frac{1}{2} m_i \left[(z^2+y^2) w_x^2 + (x^2+z^2) w_y^2 + (x^2+y^2) w_z^2 - 2xy\, w_x w_y + \right.$$
$$\left. - 2xz\, w_x w_z - 2yz\, w_y w_z \right] =$$

$$= \frac{1}{2} w_x^2 \underbrace{\Sigma (y^2+z^2) m_i}_{J_x} + \frac{1}{2} w_y^2 \underbrace{\Sigma (x^2+z^2) m_i}_{J_y} + \frac{1}{2} w_z^2 \underbrace{\Sigma (x^2+y^2) m_i}_{J_z} +$$
$$- w_x w_y \underbrace{\Sigma xy\, m_i}_{J_{xy}} - w_x w_z \underbrace{\Sigma xz\, m_i}_{J_{xz}} - w_y \cdot w_z \underbrace{\Sigma yz\, m_i}_{J_{yz}} =$$

$$= \frac{1}{2} J_x w_x^2 + \frac{1}{2} J_y w_y^2 + \frac{1}{2} J_z w_z^2 - J_{xy} w_x w_y - J_{xz} w_x w_z - J_{yz} w_y w_z$$

AGRUPANDO FINALMENTE (a), (b) e (c) TEMOS:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m v_0^2 + m \vec{v}_0 . \vec{\omega} \wedge (G-O) + \frac{1}{2} J_x \omega_x^2 + \frac{1}{2} J_y \omega_y^2 + \frac{1}{2} J_z \omega_z^2 - J_{xy} \omega_x \omega_y - J_{xz} \omega_x \omega_z - J_{yz} \omega_y \omega_z}$$

QUE É A EXPRESSÃO QUE NOS FORNECE A ENERGIA CINÉTICA TOTAL DE UM SÓLIDO

CASOS PARTICULARES:

(1) SÓLIDO EFETUA UMA TRANSLAÇÃO ($\vec{\omega} = 0$)

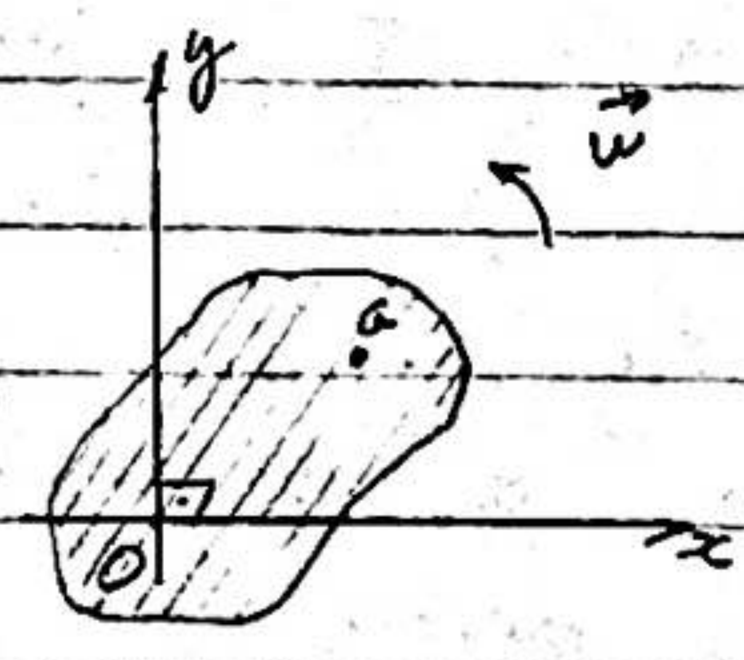
$T = \frac{1}{2} m v_0^2$, QUE É UM RESULTADO BASTANTE COERENTE.

(2) SÓLIDO EFETUA UMA ROTAÇÃO AO REDOR DE UM EIXO FIXO

$\vec{\omega} = \omega \vec{k}$, $\vec{v}_0 = 0$ (O ∈ AO EIXO)

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2 = \frac{1}{2} J_z \omega_z^2$$

(3) FIGURA PLANA, SUPONDO $\vec{v}_0 = \vec{0}$
$\vec{\omega} = \omega \vec{k}$



$$T = \frac{1}{2} J_z \omega_z^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\Sigma (x^2+y^2) m_i}_{J_O} \omega_z^2$$

$\therefore$ $T = \frac{1}{2} J_O \omega_z^2$, J_O | MOMENTO POLAR

SE QUISÉSSEMOS CALCULAR T CONHECENDO $\vec{v}_G$ (VELOCIDADE DO BARICENTRO) TERÍAMOS:

$$\underline{\underline{T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} J_{\bar{z}} \omega_z^2}}$$

ONDE $J_{\bar{z}}$ É O MOMENTO DE INÉRCIA EM RELAÇÃO AO EIXO $\bar{z}$ QUE PASSA POR $\underline{G}$ ($\perp$ AO PLANO DA FIGURA). ESTE MOMENTO É O MESMO QUE $\underline{J_G}$, MOMENTO POLAR COM RELAÇÃO AO PÓLO $\underline{G}$.

.4 2 O TEOREMA DA ENERGIA

COMO VIMOS: $T = \sum \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \Rightarrow \dot{T} = \sum m_i \vec{a}_i \cdot \vec{v}_i \Rightarrow$

$$\dot{T} = \sum \vec{F}_i \vec{v}_i = \sum (\vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int}) \vec{v}_i = \sum (\vec{F}_i^{EXT} \cdot \vec{v}_i + \vec{F}_i^{int} \vec{v}_i)$$

$\therefore \dot{T} = \sum W^{EXT} + \sum W^{INT}$, ONDE W = POTÊNCIA

INTEGRANDO: $\int \dot{T} dt = \int \sum W^{EXT} dt + \int \sum W^{INT} dt$

(PARA UM INTERVALO DE TEMPO FINITO)

$$\underline{\underline{T - T_0 = \tau^{EXT} + \tau^{INT}}}$$

"A VARIAÇÃO DA ENERGIA CINÉTICA DE UM SISTEMA É IGUAL À SOMA DOS TRABALHOS REALIZADOS PELAS FORÇAS EXTERNAS E PELAS FORÇAS INTERNAS SOBRE CADA PONTO MATERIAL DO SISTEMA."

SE O SISTEMA MATERIAL FOR RÍGIDO, PELO PRINCÍPIO DA AÇÃO E REAÇÃO, $\tau^{INT} = 0$, ISTO É, "AS FORÇAS INTERNAS NÃO REALIZAM TRABALHO"

PORTANTO: $\underline{\tau = \Delta T}$ "A VARIAÇÃO DA ENERGIA CINÉTICA DE UM SÓLIDO É IGUAL AO TRABALHO EFETUADO PELAS FORÇAS EXTERNAS."

OBS: OUTRA FORMA DE APRESENTAÇÃO:

PARA UM PONTO $\underline{P_i}$ JÁ VIMOS QUE:

$$d\tau_i = (\vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int}) . dP_i$$

$$d\tau_i = dT_i$$

$$\Sigma dT_i = d\tau_{ext} + d\tau_{int}$$, ONDE $\Sigma T_i = T$ É A EN CINÉTICA DO SISTEMA

PARA UM INTERVALO DE TEMPO FINITO RESULTA:

$$\underline{\tau_{ext} + \tau_{int} = \Delta T}$$

SE O SISTEMA FOR RÍGIDO:

$$\underline{\tau = \tau_{ext} = \Delta T}$$