A suspensão de um carro é composta de molas e amortecedores, otimizados para o retorno rápido do veículo à estabilidade após um solavanco.

Se o amortecedor de um carro ficar com defeito, mais “duro”, quando o veículo passar por um buraco ele vai.

1) Balançar mais.

2) Balançar menos.

3) Se comportar da mesma forma.

Oscilador Amortecido

Mundo Real: $\nexists$ $E = T + U = cte$!

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$$

Energia Cinética

Forças Conservativas

+Dissipação $\Rightarrow$ Trabalho de forças não-conservativas

+ Dissipação $\Rightarrow$ Trabalho de forças não-conservativas

$$U(x) \Rightarrow F_c(x) = -\frac{\partial}{\partial x} U(x) = -kx$$

$F = F_c(x) + F_d$ $\longrightarrow$ depende geralmente da velocidade

$= -kx - \rho \dot{x}$ $\longleftarrow$

aprox. parabólica

Aproximação Linear (1ª ordem)

$$m\ddot{x} = -kx - \rho\dot{x}$$

Equação Diferencial Linear de 2ª ordem Homogênea

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \; ; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} > 0$$

$$\gamma = \frac{\rho}{m} > 0$$

$\rho < 0$? Não será dissipativo

Soluções? $x = A \cos(\omega t) + B \operatorname{sen}(\omega t)$?

Estas soluções simples deixam o problema complexo,

$$A \left[-\omega^2 \cos(\omega t) + \omega \gamma \operatorname{sen}(\omega t) + \omega_0^2 \cos(\omega t) \right]$$

$$+ B \left[-\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t) - \omega \gamma \cos(\omega t) + \omega_0^2 \operatorname{sen}(\omega t) \right] = 0 \; ; \; \omega = ?$$

Soluções complexas vão simplificar o problema

$$x(t) = \mathrm{Re}[z(t)] \qquad z \in \mathbb{C}$$

$$= \frac{z(t) + z^*(t)}{2}$$

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{\ddot{z} + \gamma \dot{z} + \omega_0^2 z + c.c.}{2} = 0$$

complexo conjugado

$$\Longrightarrow \ddot{z} + \gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

Se $z = e^{pt} \rightarrow \dot{z} = p e^{pt}; \; \ddot{z} = p^2 e^{pt}$

$$\Rightarrow (p^2 + \gamma p + \omega_0^2) e^{pt} = 0 \Rightarrow p^2 + \gamma p + \omega_0^2 = 0 \,!$$

A equação diferencial de segunda ordem é resolvida por um polinômio de segundo grau!

$$\boxed{p_{\pm} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}}$$

Duas soluções, a partir das duas raízes

$$z = \alpha e^{p_+ t} + \beta e^{p_- t}$$

Uma equação, três regimes...

Uma equação, três regimes...

1) Se $\omega_0 > \gamma/2 \Rightarrow p = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega \; ; \; \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$

$$z = (\alpha \underbrace{e^{i\omega t}}_{\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t} + \beta e^{-i\omega t}) \underbrace{e^{-\frac{\gamma}{2}t}}_{\in \mathbb{R}}$$

$$z = \left[(\alpha+\beta)\cos(\omega t) + i(\alpha-\beta)\operatorname{sen}(\omega t)\right] e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

Escolhendo $\beta = \alpha^*$

$\alpha + \beta = A \qquad -i(\alpha - \beta) = B \Rightarrow z \in \mathbb{R}, \; z = x$

$$x(t) = \left[\underline{A}\cos(\omega t) + \underline{B}\operatorname{sen}(\omega t)\right] e^{-\frac{\gamma}{2}t} =$$

$$= \underline{C}\cos(\omega t + \underline{\varphi})\, e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

$$= \operatorname{Re}\Big[\underbrace{C e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{i(\omega t + \varphi)}}_{z(t)}\Big]$$

Condições iniciais: $x_0 , v_0 \Rightarrow$

$$x(0) = A = x_0 \; ; \quad v(t) = \frac{d}{dt}\left[A\cos(\omega t) + B\operatorname{sen}(\omega t)\right] \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

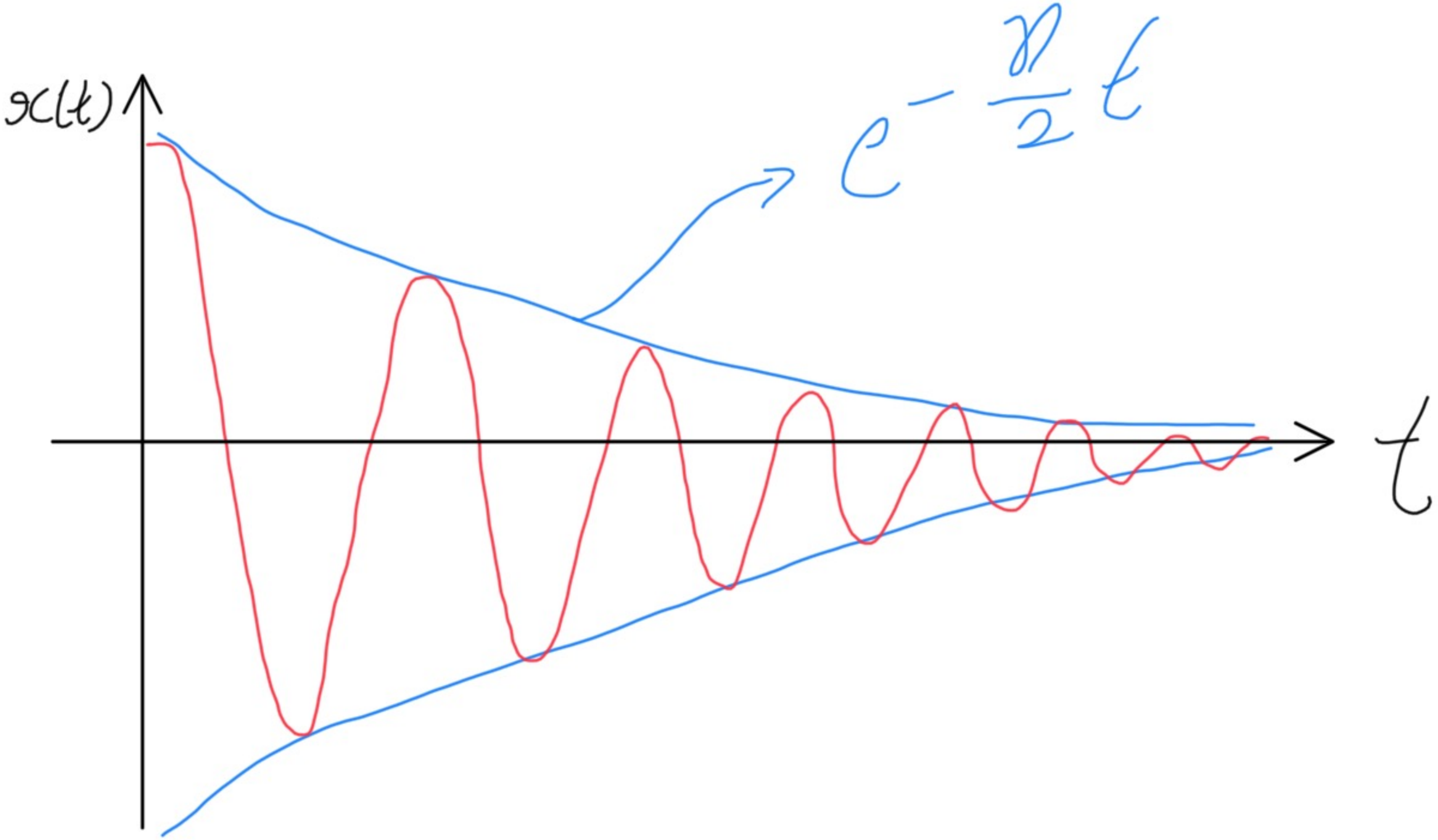
$$+ \left[A\cos(\omega t) + B\operatorname{sen}(\omega t)\right] \frac{d}{dt} e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

$$v(t) = \left[\left(-\frac{\gamma}{2}A + \omega B\right)\cos(\omega t) + \left(-\frac{\gamma}{2}B - \omega A\right)\operatorname{sen}(\omega t)\right] e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

$$v(0) = -\frac{\gamma}{2}A + \omega B \Rightarrow \quad B = \frac{v_0}{\omega} + \frac{\gamma x_0}{2\omega}$$

$$v(t) = \left[v_0 \cos(\omega t) - \left(\frac{\gamma v_0}{2\omega} - \frac{\omega_0^2 x_0}{\omega}\right)\operatorname{sen}(\omega t)\right] e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t)\, e^{-\frac{\gamma}{2} t}$$



O Jogo da Energia

Energia mecânica variável: $E \to E(t)$

$$E(t) = T[\dot{x}(t)] + U[x(t)] = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) + \frac{1}{2} k x^2(t)$$

Taxa de dissipação: $\frac{d}{dt} E = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} \dot{x}^2(t) + \frac{1}{2} k \frac{d}{dt} x^2(t) =$

$$= m \dot{x} \ddot{x} + k x \dot{x} = \dot{x} (m \ddot{x} + kx)$$

Mas: $F = m\ddot{x} = -kx + F_d \Rightarrow \frac{d}{dt} E(t) = F_d \cdot \dot{x}$

$\Downarrow$

Potência dissipada!

Caso linear $F_d = -\rho v$ $\quad \frac{d}{dt}E = -\rho \dot{x}^2 \leq 0$

$$\frac{d}{dt}E(t) = P(t) = 0 \quad \text{se } \dot{x} = 0$$

Função $E(t) \Rightarrow x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \varphi)$

$$\dot{x}(t) = -\frac{\gamma}{2} A e^{-\gamma/2\, t} \cos(\omega t + \varphi) - \omega A e^{-\gamma/2\, t} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

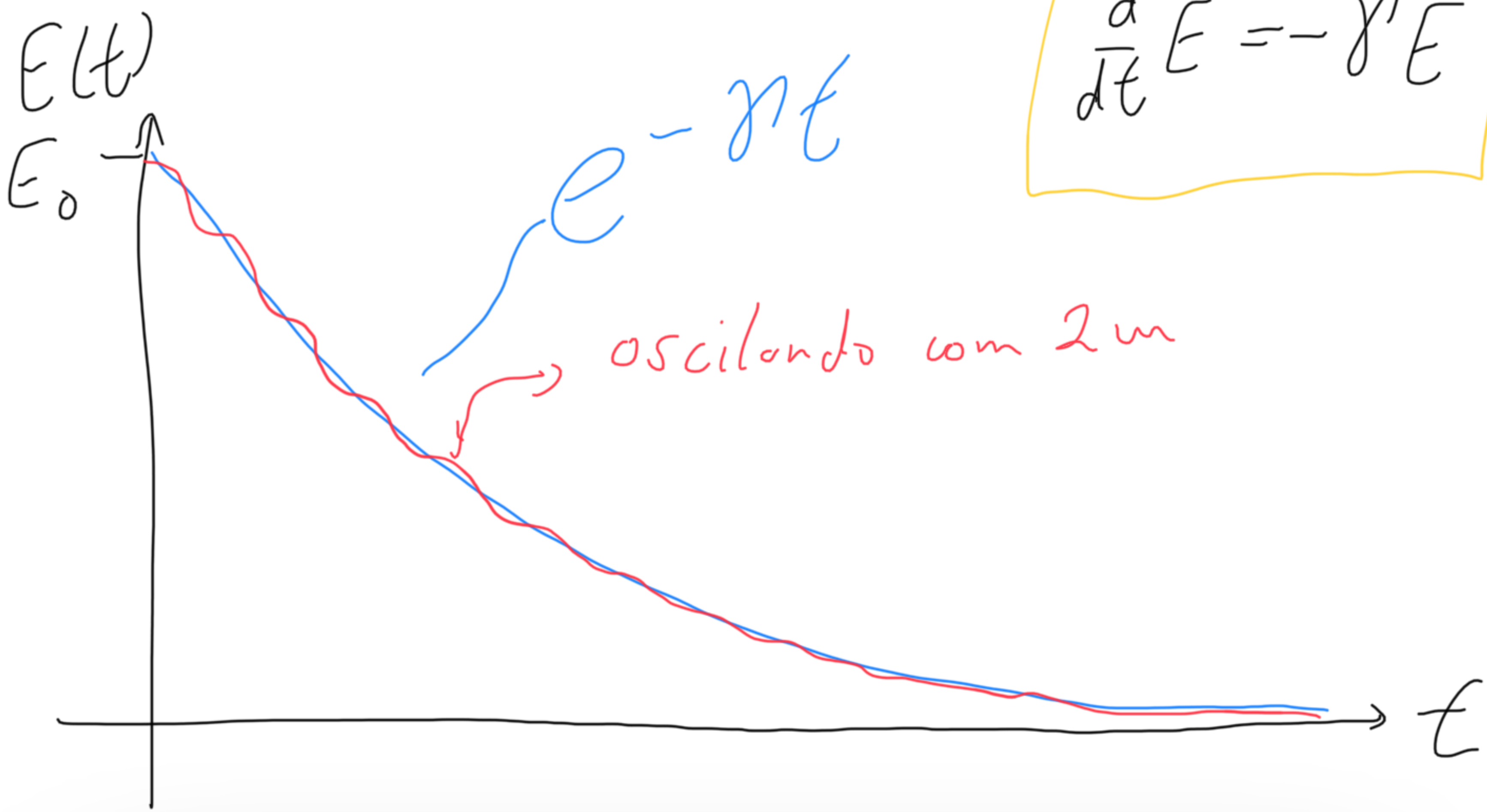
$$E(t) = \frac{1}{2} m A^2 e^{-\gamma t}\left[\frac{\gamma^2}{4}\cos^2(\omega t + \varphi) + \omega^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \varphi) + \gamma\omega \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)\cos(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi)\right]$$

$$= \frac{1}{2} m A^2 \underbrace{e^{-\gamma t}}_{\text{decaimento exponencial}} \left[\omega_0^2 + \underbrace{\frac{\gamma}{2}\omega \operatorname{sen} 2(\omega t + \varphi) + \frac{\gamma^2}{4} \cos 2(\omega t + \varphi)}_{\text{termo oscilante}}\right]$$

Amortecimento fraco: $\frac{\gamma}{2} \ll \omega_0$

$$\overline{E(t)} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} E(t')\,dt' = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 e^{-\gamma t}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\bar{E} = -\gamma \bar{E}}$$



Definição útil: Fator de mérito

$$Q = 2\pi \left(\frac{\text{Energia no oscilador}}{\text{Energia dissipada por ciclo}} \right) = 2\pi \frac{\bar{E}}{\Delta \bar{E}}$$

$$\Delta \bar{E} = -\frac{d}{dt}\bar{E} \cdot T = \gamma T \cdot \bar{E}$$

$$Q = \frac{2\pi}{\gamma T} = \frac{\omega}{\gamma} \gg 1$$ amortecimento fraco

$$\frac{1}{\gamma} = T_d$$ → tempo de decaimento

$$Q = 2\pi \frac{T_d}{T}$$

2° caso: Amortecimento supercrítico

$$z(t) = A e^{p_- t} + B e^{p_+ t}$$

$$p_\pm = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} \; ; \; \frac{\gamma}{2} > \omega_0 \; ; \; \boxed{\beta = \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}}$$

$$p_\pm \in \mathbb{R} \; , \; A, B \in \mathbb{R} \Rightarrow z(t) = x(t) \in \mathbb{R}$$

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2} t} \left(A e^{-\beta t} + B e^{\beta t} \right)$$

$$= A \exp\left[-\left(\frac{\gamma}{2} + \beta\right) t\right] + B \exp\left[-\left(\frac{\gamma}{2} - \beta\right) t\right]$$

decaimento rápido

decaimento lento

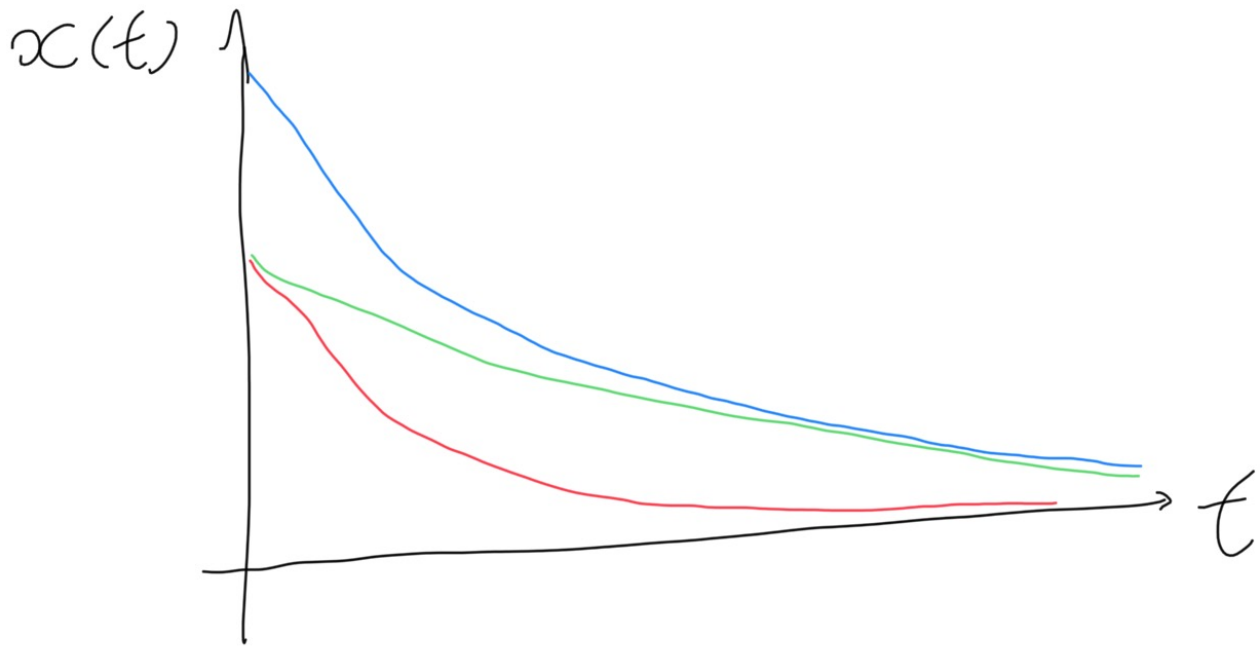
$$x(t) = A\exp\left[-\left(\frac{\gamma}{2}+\beta\right)t\right] + B\exp\left[-\left(\frac{\gamma}{2}-\beta\right)t\right]$$

decaimento rápido

decaimento lento

$\omega_0 \ll \frac{\gamma}{2} \rightarrow e^{-\gamma t}$ domina

$\omega_0 \rightarrow \frac{\gamma}{2} \rightarrow$ decaimento muito lento!



3º caso: $\frac{\gamma}{2} = \omega_0 \Rightarrow \beta = 0$

$$x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$? Somente uma solução?

Tomar o limite: $x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(A e^{\beta t} + B e^{-\beta t}\right) =$

$$= e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cdot \left(e^{\beta t} + e^{-\beta t}\right) \cdot \left(\frac{A+B}{2}\right)$$

$$+ e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left(e^{\beta t} - e^{-\beta t}\right) \cdot \left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\lim_{\beta \to 0} \left(e^{\beta t} + e^{-\beta t}\right) = 2 \; ; \; \lim_{\beta \to 0} \left(e^{\beta t} - e^{-\beta t}\right) = 0$$

Aproximando em 1ª ordem

$$e^{\beta t} - e^{-\beta t} \simeq (1+\beta t) - (1-\beta t) =$$

$$= 2\beta t$$

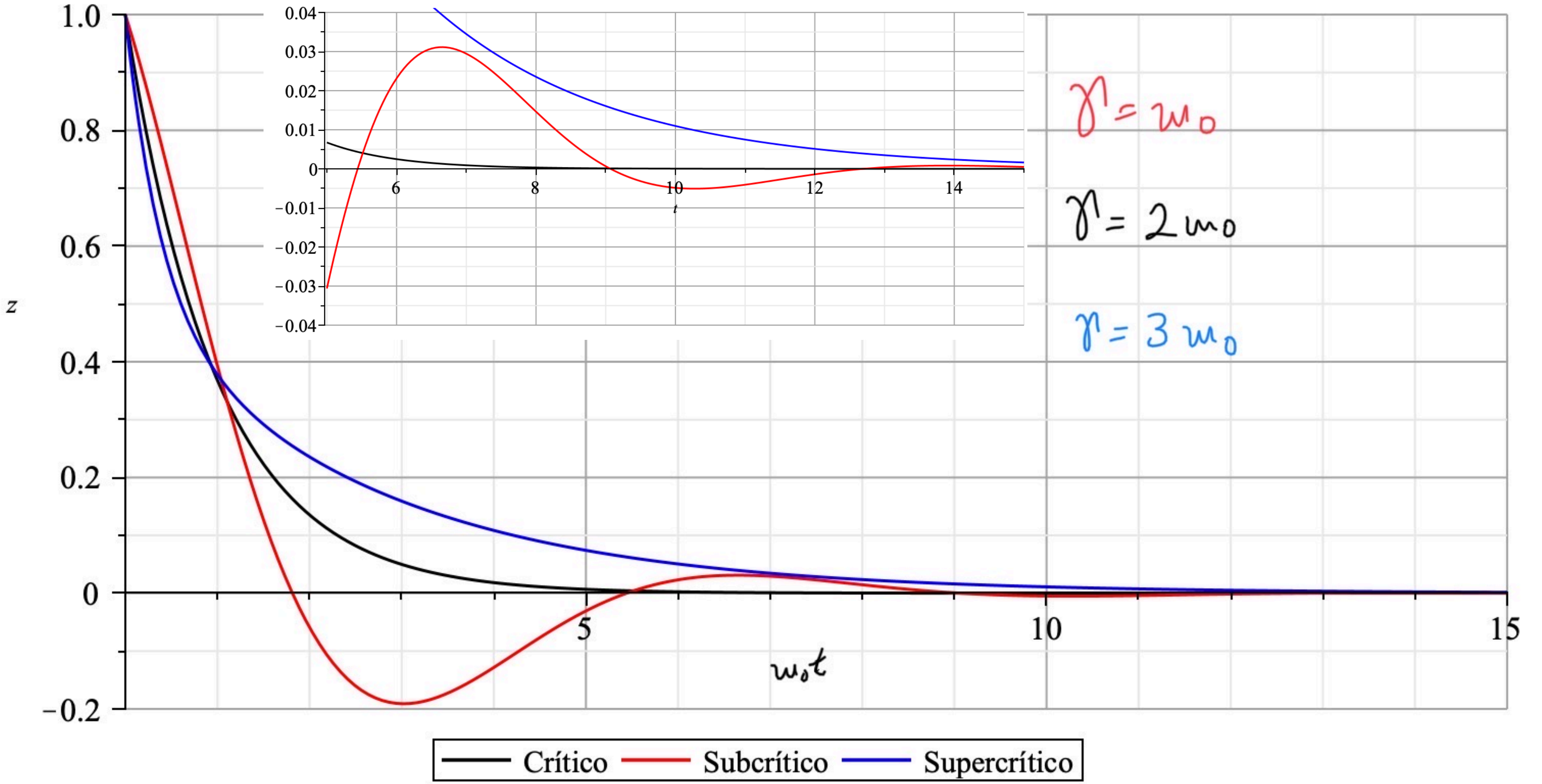
$$x(t) = \left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot 2 e^{-\frac{\gamma}{2}t} + \left(\frac{A-B}{2}\right) \cdot 2\beta t \, e^{-\frac{\gamma}{2}t} =$$

$$= a e^{-\frac{\gamma}{2}t} + b t e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

$x(t) = (a + bt) e^{-\frac{\gamma}{2}t}$ é solução!

Verifique!

Amortecimento crítico!


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
z
5
10
15
$\omega_0 t$
0.04
0.03
0.02
0.01
0
−0.01
−0.02
−0.03
−0.04
6
8
10
12
14
t
$\gamma = \omega_0$
$\gamma = 2\omega_0$
$\gamma = 3\omega_0$
Crítico
Subcrítico
Supercrítico