Princípio de Indução Finita

Esse é um dos axiomas de Peano, dentre os que definem o conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

PIF:
Seja $P(n)$ uma propriedade relativa a números $n \in \mathbb{N}$.

Suponha que:
(1) $P(a)$ é verdadeira. (Base da Indução)

(2) Suponha que $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \geq a$ e que $P(k)$ verdadeira $\Longrightarrow P(k+1)$ verdadeira

Então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq a$.

Exemplos:

(1) Mostrar que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $\underbrace{1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}}_{P(n)}$

Base $P(1)$ $\quad 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ - Logo a propriedade vale para $n=1$.

Seja $k \geq 1$ e suponha que $P(k)$ é verdadeira, isto é
$$1+2+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2},$$

Hipótese de Indução

Tese:

Mostrar que $P(k+1)$ é verdadeira, isto é:

$$1+2+\dots+k+k+1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

Demonstração:

$$\underbrace{1+2+\dots+k}_{\text{Hipótese de indução}} + k+1 =$$

$$\frac{k(k+1)}{2} + k+1 =$$

$$\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Assim, pelo PIF a propriedade vale para todo $n \geq 1$.

(2) Exercício 10 (e) da Lista 1.

Se A^m é inversível, então A é inversível.

Provar por indução em m.

Base: $m=1$ A inversível $\Rightarrow$ A inversível

Suponha que $k \geq 1$ e que A^k inversível $\Rightarrow$ A inversível Hipótese de indução

Tese Mostrar que A^{k+1} inversível $\Rightarrow A$ inversível.

$$A^{k+1} = A^k A \text{ é inversível},$$

Queremos mostrar que A é inversível.

Sabemos que: $\exists B$ tal que

$$A^{k+1} B = B A^{k+1} = I_n$$

$$\left.\begin{array}{l} A^k (AB) = I_n \\ (BA) A^k = I_n \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} A^k C = I_n \\ D A^k = I_n \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (D A^k) C = C$$

$$\Rightarrow D (A^k C) = C$$

$$\Rightarrow D I_n = C \Rightarrow D = C$$

Logo $A^k C = C A^k = I_n$

$\Rightarrow A^k$ é inversível e pela hipótese de indução, A é inversível.

Logo a propriedade vale para todo $m \geq 1$. $\boxtimes$