Observações sobre sistemas lineares e matrizes e Alguns Exercícios da Lista 2.

(1) $A \in M_n(\mathbb{R})$

A forma escalonada reduzida de A é a matriz identidade I_n se e somente o sistema linear homogêneo $A\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

tem apenas a solução $x_1 = \dots = x_n = 0$.

($\Rightarrow$) Escalonando A, obtemos um sistema linear equivalente à $A\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Se a forma escalonada reduzida de A é I_n, o sistema equivalente é

$I_n \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow x_1 = \dots = x_n = 0$,

($\Leftarrow$) Suponha agora que o sistema linear homogêneo $A\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ tem uma única solução.

Então, na matriz escalonada, temos que ter nº incógnitas = nº de pivôs.
A forma escalonada reduzida de A tem que ter então $\underline{1}$ pivô em cada linha.
Logo a forma escalonada reduzida de A é I_n.

(2) $A \in M_n(\mathbb{R})$

Se a forma escalonada reduzida de A é I_n, o sistema linear

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$ tem uma única solução

quaisquer que sejam $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$.

(Pois o sistema será equivalente a

$$\begin{aligned} x_1 \quad &= c_1 \\ x_2 \quad &= c_2 \\ \ddots \quad & \\ x_n &= c_n \end{aligned}$$

após o escalonamento da matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & | & b_2 \\ & \cdots & & | & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & | & b_n \end{bmatrix} \Bigg)$$

(3) Se a forma escalonada reduzida de A é I_n, existe uma matriz $B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $AB = I_n$.

$X = (x_{ij})$ $\quad X_j = \begin{bmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{bmatrix}$ coluna de X

$$AX_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$ coluna j de I_n tem uma única solução

(4) Se $AB = I_n$, mostrar que $BA = I_n$.

(Isto é, se $AB = I_n$, mostrar que $BA = I_n$ $\Rightarrow$ $B = A^{-1}$)

O sistema linear

$BX = 0$ tem apenas a soluçõ trivial se $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ pois

$$B \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$AB \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \underbrace{A \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{= \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

Assim, a forma escalonada reduzida de B é I_n. Portanto existe uma matriz C tal que $BC = I_n$. (Por (3))

Mostrar que $C = A$.

Temos que $AB = I_n$ e $BC = I_n$ (*) $\Rightarrow$ multiplique os dois lados de (*) por A

$$A(BC) = A$$

$\|$ associativa

$$\underbrace{(AB)}_{I_n} C = A \Rightarrow C = A.$$

Assim:

Logo $AB = BA = I_n$ e a matriz A é inversível.

CONCLUSÃO

Se existir uma matriz B tal que $AB = I_n$, então $BA = I_n$ e $A = B^{-1}$ e $B = A^{-1}$.

Exercícios 10 (g) e 10 (h) da Lista 2.

10 (g) Mostrar que para $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, AB é inversível se, e somente se, A e B são inversíveis.

($\Leftarrow$) Suponha que A e B são inversíveis. $\exists A^{-1}$ e $\exists B^{-1}$.

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1}$$
$$= AA^{-1} = I_n$$
$$(B^{-1}A^{-1})AB = I_n.$$

($\Rightarrow$) Suponha que AB é inversível. Existe uma matriz C tq $(AB)C = C(AB) = I_n$.

Então $A(BC) = I_n$. Logo, pela "Conclusão" (acima) existe $A^{-1} \Rightarrow A$ é inversível

AB inversível e A inversível $\Rightarrow AB$ inversível e A^{-1} inversível $\Rightarrow A^{-1}(AB) = B$ é inversível. (por $\Leftarrow$)

$\blacksquare$

10 (h) Se AB é inversível, por (g), A e B são inversíveis $\underset{\text{por (g)}}{\Longrightarrow}$ BA é inversível. ∎

Exercício 9 da Lista 2

(a) $\begin{bmatrix} c & 1 & 0 \\ 1 & c & 1 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}$ Achar os valores de c para os quais a matriz é inversível.

Vamos escalonar a matriz

$$\begin{bmatrix} c & 1 & 0 \\ 1 & c & 1 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & c & 1 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix} \xleftrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & c & 1 \\ 0 & 1 & c \\ c & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L3 \leftrightarrow L3 - cL1} \begin{bmatrix} 1 & c & 1 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 1-c^2 & -c \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L3 \leftrightarrow L3 - (1-c^2)L_2} \begin{bmatrix} 1 & c & 1 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -c-c(1-c^2) \end{bmatrix}$$

Para a matriz ser inversível é preciso que tenha um pivô na 3ª linha (já que já temos pivôs nas primeira e 2ª linhas.

Para isso basta que $-c-c(1-c^2) \neq 0$.

Mas $c^3 - 2c \neq 0$

$c(c^2-2) \neq 0$ $\Rightarrow$ $c \neq 0$ e $c \neq \pm\sqrt{2}$.