Exercício 3 - Dinâmica Populacional

O objetivo deste Exercício é utilizar o Modelo Logístico (Pierre François Verhulst) como preditor da evolução temporal da população humana no planeta.

A utilização do Modelo Logístico para prever a Dinâmica de uma População em ambientes fechados é baseada na hipótese de que a taxa de variação no tempo da População $P(t)$ é dada por:

$$\frac{dP}{dt}(t) = \alpha_0(M - P(t))P(t) \tag{1}$$

0

onde os parâmetros $\alpha_0 >$ e $M > 0$ são considerados constantes no tempo.

A partir desta hipótese e conhecida a população em um determinado instante t_0, denotada por $P_0 = P(t_0)$, obtemos a seguinte função preditiva para $P(t)$:

$$P(t) = \frac{M}{1 + \frac{M-P_0}{P_0} e^{-\alpha_0 M(t-t_0)}} \tag{2}$$

Diferentes populações e ambientes estão associados a pares (α_0, M). Assim para utilizar o Modelo Logístico, temos que ter conhecimento dos valores de α_0 e M associados à população em estudo, no nosso caso a populaçao humana no planeta. Uma vez conhecidos os valores dos parâmentros α_0 e M, podemos prever a população em uma data futura t a partir do conhecimento da população $P_0 = P(t_0)$ utilizando (1).

Neste exercício, vamos utilizar o modelo Logístico para prever a evolução no tempo da população humana no Planeta e portanto devemos determinar os valores de α_0 e M associados à esta população.

Para tanto observamos que na equação (1), temos no lado direito o termo

$$\alpha_0(M - P(t))P(t)$$

que pode ser escrito na forma:

$$\alpha_0(M - P(t))P(t) = a_0 g_0(P) + a_1 g_1(P)$$

onde

$$g_0(P) = P; \quad g_1(P) = P^2; \quad a_0 = \alpha_0 M; \quad a_1 = -\alpha_0$$

Quando a população tiver um valor $P(t) = P$, a taxa de variação $\frac{dP}{dt}(t)$ deve satisfazer:

$$\frac{dP}{dt}(t) = y(P) = a_0 g_0(P) + a_1 g_1(P) \tag{3}$$

Assim considerando um conjunto de observações da População $\{P(t_j)\}_{j=0,\ldots n}$, $t_j - t_{j-1} = 1$ temos as aproxximações:

$$\frac{dP}{dt}(t_j) \approx \frac{P(t_j) - P(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} = y(P(t_j)) = y_j; \quad j = 1, \ldots n$$

Denotando $P(t_j) = P_j$, podemos considerar que temos um conjunto de observções $\{(P_j, y_j)\}_{j=1,\ldots n}$
Finalmente, podemos utilizar o Método dos Mínimos Quadrados considerando o modelo (3)

$$y(P) = a_0 g_0(P) + a_1 g_1(P)$$

com:

$$g_0(P) = P; \quad g_1(P) = P^2$$

e o conjunto de dados $\{(P_j, y_j)\}_{j=1,\ldots n}$ para determinar valores para os parâmetro a_0 e a_1, a partir dos quais podemos determinar α_0 e M.

Considerando as reservas de petroleo conhecidas atualmente no planeta e o consumo de oleo per capita atual nos Estados Unidos, estime em quantos anos as reservas estariam esgotadas se o consumo per capita médio no planeta fosse constante no tempo e igual ao atual consumo nos EUA.

https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_countries_by_proven_oil_reserves

https://www.worldometers.info/oil/oil-consumption-by-country/

https://worldpopulationreview.com/country-rankings/oil-reserves-by-country

https://worldpopulationreview.com/country-rankings/oil-consumption-by-country