Algoritmo de Gauss Seidel - Sistemas nxn

Dado o Sistema Linear:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n-1}x_{n-1} & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n-1}x_{n-1} & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n-11}x_1 & + & a_{n-12}x_2 & + & \cdots & + & a_{n-1n-1}x_{n-1} & + & a_{n-1n}x_n & = & b_{n-1} \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn-1}x_{n-1} & + & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}
$$

Reescrevemos as equações na forma:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{a_{11}}\left\{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n-1}x_{n-1} - a_{1n}x_n\right\}\\
x_2 &= \frac{1}{a_{22}}\left\{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n-1}x_{n-1} - a_{2n}x_n\right\}\\
&\vdots\\
x_j &= \frac{1}{a_{jj}}\left\{b_j - a_{j1}x_1 - \cdots - a_{jj-1}x_{j-1} - a_{jj+1}x_{j+1} - \cdots - a_{jn}x_n\right\}\\
&\vdots\\
x_n &= \frac{1}{a_{nn}}\left\{b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{nn-2}x_{n-2} - a_{nn-1}x_{n-1}\right\}
\end{aligned}
$$

Considerando uma aproximação inicial, $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ de $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$, solução do sistema, nós definimos a sequência $\left\{x^k\right\}_{k \in \mathbb{N}}$; $x^k = \left(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k\right) \in \mathbb{R}^n$ por:

$$x_1^k = \frac{1}{a_{11}} \left\{ b_1 - a_{12} x_2^{k-1} - a_{13} x_3^{k-1} - \cdots - a_{1n-1} x_{n-1}^{k-1} - a_{1n} x_n^{k-1} \right\}$$

$$x_2^k = \frac{1}{a_{22}} \left\{ b_2 - a_{21} x_1^{k} - a_{23} x_3^{k-1} - \cdots - a_{2n-1} x_{n-1}^{k-1} a_{2n} x_n^{k-1} \right\}$$

$$\vdots$$

$$x_j^k = \frac{1}{a_{jj}} \left\{ b_j - a_{j1} x_1^{k} - \cdots - a_{jj-1} x_{j-1}^{k} - a_{jj+1} x_{j+1}^{k-1} - \cdots - a_{jn} x_n^{k-1} \right\}$$

$$\vdots$$

$$x_n^k = \frac{1}{a_{nn}} \left\{ b_n - a_{n1} x_1^{k} - a_{n2} x_2^{k} - \cdots - a_{nn-2} x_{n-2}^{k} - a_{nn-1} x_{n-1}^{k} \right\}$$

Para analisar a convergência da sequência $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$, considere para cada $1 \leq j \leq n$ a diferença:

$$\bar{x}_j - x_j^k =$$

$$\underbrace{\frac{1}{a_{jj}}\{b_j - a_{j1}\bar{x}_1 - \cdots - a_{jj-1}\bar{x}_{j-1} - a_{jj+1}\bar{x}_{j+1} - \cdots - a_{jn}\bar{x}_n\}}_{=\bar{x}_j} -$$

$$\underbrace{-\frac{1}{a_{jj}}\left\{b_j - a_{j1}x_1^k - \cdots - a_{jj-1}x_{j-1}^k - a_{jj+1}x_{j+1}^{k-1} - \cdots - a_{jn}x_n^{k-1}\right\}}_{=x_j^k} =$$

$$= \frac{1}{a_{jj}} \Big\{ -a_{j1}[\bar{x}_1 - x_1^k] - \cdots - a_{jj-1}[\bar{x}_{j-1} - x_{j-1}^k] -$$

$$-a_{jj+1}[\bar{x}_{j+1} - x_{j+1}^{k-1}] - \cdots - a_{jn}[\bar{x}_n - x_n^{k-1}] \Big\}$$

Definindo:

$$\Delta^k = \max_{1 \le j \le n} |\ \bar{x}_j - x_j^k\ |$$

$$|\ \bar{x}_1 - x_1^k\ | \le \frac{1}{|\ a_{11}\ |} \Big\{ |\ a_{12}\ ||\ \bar{x}_2 - x_2^{k-1}\ | + \cdots + |\ a_{1n}\ ||\ \bar{x}_n - x_n^{k-1}\ | \Big\}$$

$$|\ \bar{x}_1 - x_1^k\ | \le \frac{1}{|\ a_{11}\ |} \{ |\ a_{12}\ | + |\ a_{13}\ | + \cdots + |\ a_{1n}\ | \} \Delta^{k-1}$$

Definindo

$$\beta_1 = \frac{1}{|\ a_{11}\ |}\{|\ a_{12}\ | + |\ a_{13}\ | + \cdots + |\ a_{1n}\ |\}\,\Delta^{k-1}$$

temos:

$$|\ \bar{x}_1 - x_1^k\ | \leq \beta_1 \Delta^{k-1}$$

$$\bar{x}_j - x_j^k =$$

$$\frac{1}{a_{jj}}\Big\{-a_{j1}[\bar{x}_1 - x_1^k] - \cdots - a_{jj-1}[\bar{x}_{j-1} - x_{j-1}^k] -$$

$$-a_{jj+1}[\bar{x}_{j+1} - x_{j+1}^{k-1}] - \cdots - a_{jn}[\bar{x}_n - x_n^{k-1}]\Big\}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\mid \bar{x}_j - x_j^k \mid \leq$$

$$\frac{1}{\mid a_{jj} \mid}\Big\{\mid a_{j1} \mid\mid \bar{x}_1 - x_1^k \mid + \cdots + \mid a_{jj-1} \mid\mid \bar{x}_{j-1} - x_{j-1}^k \mid +$$

$$+ \mid a_{jj+1} \mid \Delta^{k-1} + \cdots + \mid a_{jn} \mid \Delta^{k-1}\Big\} \leq$$

Considerando parametros $\{\beta_j\}_{1\leq j\leq n}$ definidos por

$$\beta_j = \frac{1}{\mid a_{jj} \mid}\{\mid a_{j1} \mid \beta_1 + \cdots + \mid a_{jj-1} \mid \beta_{j-1} + \mid a_{jj+1} \mid + \cdots + \mid a_{jn} \mid\}$$

e assumindo que:

$$\mid \bar{x}_m - x_m^k \mid \leq \beta_m \mid \bar{x}_m - x_m^{k-1} \mid; \quad 1 \leq m \leq j-1$$

temos:

$$\mid \bar{x}_j - x_j^k \mid \leq$$

$$\frac{1}{\mid a_{jj} \mid}\Big\{\mid a_{j1} \mid \beta_1 \mid \bar{x}_1 - x_1^{k-1} \mid + \cdots + \mid a_{jj-1} \mid \beta_{j-1} \mid \bar{x}_{j-1} - x_{j-1}^{k-1} \mid +$$

$$+ \mid a_{jj+1} \mid \Delta^{k-1} + \cdots + \mid a_{jn} \mid \Delta^{k-1}\Big\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\mid a_{jj} \mid} \{\mid a_{j1} \mid \beta_1 + \cdots + \mid a_{jj-1} \mid \beta_{j-1} + \mid a_{jj+1} \mid + \cdots + \mid a_{jn} \mid\} \Delta^k$$

$\Longrightarrow$

$$\mid \bar{x}_j - x_j^k \mid \leq \beta_j \Delta^{k-1}$$

De onde concluimos que para

$$\beta = \max_{1 \leq j \leq n} \beta_j$$

temos

$$\Delta^k \leq \beta \Delta^{k-1} \leq \ldots \leq \beta^{k-1} \Delta^1$$

Portanto se $\beta < 1$,

$$\mid \bar{x}_j - x_j^k \mid \leq \beta^{k-1} \Delta^1 \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Como consequência também temos, quando $\beta < 1$:

$$| \bar{x}_j - x_j^k | \leq \frac{\beta}{1-\beta} \max_{j=1,\ldots,n} | x_j^k - x_j^{k-1} |$$

$\Longrightarrow$

$$| \bar{x}_j - x_j^k | \leq \beta^{k-1} \underbrace{\Delta^1}_{\leq \frac{\beta}{1-\beta} \max_{j=1,\ldots n} | x_j^1 - x_j^0 |}$$

$$| \bar{x}_j - x_j^k | \leq \beta^{k-1} \left\{ \frac{\beta}{1-\beta} \max_{j=1,\ldots n} | x_j^1 - x_j^0 | \right\}$$

(*esta desigualdade possibilita obter uma estimativa do número de iterações que assegura uma dada precisão*).

Roteiro para implementar Gauss Seidel

- Tente encontrar uma ordenação de linhas e colunas para a qual $\beta < 1$. (*se não for possível não implemente o algoritmo*).
- Considerando a ordenação de linhas e colunas para a qual $\beta < 1$, escreva as equações do Algoritmo de Gauss Seidel.
- Escolha uma aproximação inicial (*por exemplo a solução obtida por Escalonamento ou Decomposição QR*) e obtenha iterativamente novas aproximações.
- A cada iteração a precisão da aproximação obtida é estimada por:

$$| \bar{x}_j - x_j^k | \leq \frac{\beta}{1-\beta} \max_{j=1,\ldots n} | x_j^k - x_j^{k-1} |$$