

Considerando os multiplicadores, $\{m_{ij}\}; i > j, j = 1, \dots, n-1$,
definidos no processo de escalonamento do Método de Gauss, a
matrizes L definida por:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ m_{n-21} & m_{n-22} & \cdots & m_{n-2n-3} & 1 & 0 & 0 \\ m_{n-11} & m_{n-12} & \cdots & m_{n-1n-3} & m_{n-1n-2} & 1 & 0 \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn-3} & m_{nn-2} & m_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}$$

e a matriz triangular superior U , definida pelo processo de escalonamento do Método de Gauss,

$$U = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} & \cdots & \bar{a}_{1n-2} & \bar{a}_{1n-1} & \bar{a}_{1n} \\ 0 & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} & \cdots & \bar{a}_{2n-2} & \bar{a}_{2n-1} & \bar{a}_{2n} \\ 0 & 0 & \bar{a}_{33} & \cdots & \bar{a}_{3n-2} & \bar{a}_{3n-1} & \bar{a}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \bar{a}_{n-2n-2} & \bar{a}_{n-2n-1} & \bar{a}_{n-2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{a}_{n-1n-1} & \bar{a}_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

Temos

$$A = LU$$

ou seja, quando o sistema linear é determinado, a matriz A pode ser decomposta como um produto de uma matriz triangular inferior, L com uma matriz triangular superior, U .

Em geral uma matriz A não singular, a menos de permutações em linhas, admite decomposição como um produto de uma matriz triangular inferior, L e uma matriz triangular superior U , ou seja $A = PLU$.

Decomposição QR

Dado um Sistema Linear,

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

onde A é uma matriz $n \times n$ não singular, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é a solução do Sistema Linear, a estratégia de decompor a matriz A como o produto de duas outras matrizes, sendo uma delas triangular, é comum a vários algoritmos.

Um exemplo consiste na decomposição QR de uma matriz não singular A .

As matrizes Q e R são obtidas a partir do Algoritmo de Gram Schmidt aplicado ao conjunto de n vetores $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^n, 1 \leq j \leq n$, definidos por:

$$\mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

observe que $\mathbf{a}_j$ corresponde às colunas da matriz A que define o Sistema Linear e portanto são linearmente independentes quando a matriz A é não singular.

Neste caso o processo de Gram Schmidt consiste dos seguintes passos:

1. Defina o vetor $\mathbf{q}_1$,

$$\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ \vdots \\ q_{n1} \end{pmatrix}$$

com

$$q_{i1} = a_{i1} / \sqrt{\sum_{j=1}^n a_{j1}^2}$$

2. A partir de $\mathbf{q}_1$ e $\mathbf{a}_2$ definimos:

$$\langle \mathbf{a}_2 \mathbf{q}_1 \rangle = \langle \mathbf{q}_1 \mathbf{a}_2 \rangle = \sum_{i=1}^n a_{i2} q_{i1}$$

$$\mathbf{a}'_2 = \mathbf{a}_2 - \langle \mathbf{a}_2 \mathbf{q}_1 \rangle \mathbf{q}_1$$

$$a'_{i2} = a_{i2} - q_{i1} \langle \mathbf{q}_1 \mathbf{a}_2 \rangle$$

Consideramos então o vetor

$$\mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} q_{12} \\ q_{22} \\ \vdots \\ q_{n2} \end{pmatrix}$$

com

$$q_{i2} = a'_{i2} / \sqrt{\sum_{j=1}^n a'^2_{j2}}$$

prossequimos de forma recursiva

⋮

k. A partir de $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{k-1}$ e $\mathbf{a}_k$ definimos:

$$\langle \mathbf{a}_k \mathbf{q}_j \rangle = \langle \mathbf{q}_j \mathbf{a}_k \rangle = \sum_{i=1}^n a_{ik} q_{ij}; \quad 1 \leq j \leq k-1$$

$$\mathbf{a}'_k = \mathbf{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle \mathbf{a}_k \mathbf{q}_j \rangle \mathbf{q}_j$$

ou

$$a'_{ik} = a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} q_{ij} \langle \mathbf{q}_j \mathbf{a}_k \rangle$$

Consideramos então o vetor

$$\mathbf{q}_k = \begin{pmatrix} q_{1k} \\ q_{2k} \\ \vdots \\ q_{nk} \end{pmatrix}$$

com

$$q_{ik} = a'_{ik} / \sqrt{\sum_{i=j}^n a'^2_{jk}}$$

A matriz Q definida por:

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n-1} & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n-1} & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn-1} & q_{nn} \end{pmatrix}$$

tem a propriedade de que suas colunas q_k ; $k = 1, \dots, n$ constituem um conjunto de n vetores de $\mathbb{R}^n$ normalizados e ortogonais entre si e portanto $Q^{-1} = Q^T$.

Temos também que como consequência de que as colunas de Q foram obtidas pelo processo de Gram Schmidt aplicado às colunas da matriz A ,

$$Q^T A = R$$

com R uma matriz triangular superior. Assim temos:

$$Q^T A = R \quad \implies \quad Q Q^T A = Q R \quad \implies$$

$$A = QR$$

Assim, dado um sistema linear onde A é uma matriz não singular,

$$Ax = b$$

temos $A = QR$

$$QRx = b \implies Rx = Q^T b = b'$$

e a solução x do sistema linear

$$Rx = Q^T b = b'$$

pode ser obtida utilizando o algoritmo para sistemas triangulares.