MAP2122 - Cálculo Numérico Aplicado à Atuária

Henrique von Dreifus

Universidade de São Paulo

dreifus@ime.usp.br

24 de agosto de 2021

Visão Geral

Apresentar uma introdução ao Cálculo Numérico, exemplificando a resolução de problemas numéricos em computadores. Apresentar aplicações à Atuária.

Programa Resumido

1. Zeros de funções.
2. Sistemas de equações algébricas lineares.
3. Aproximação de funções.
4. Interpolação.
5. Integração numérica.

Bibliografia

1. R. L. Burden & J. D. Faires; ANÁLISE NUMÉRICA, Cengage Learning, 7th ed., 2008.
2. A. F. P. de C. Humes, I. S. H. de Melo, L. K. Yoshida, W. T. Martins; NOÇÕES DE CÁLCULO NUMÉRICO, McGraw-Hill do Brasil, 1984.
3. M. A. Ruggiero, V. L. da R. Lopes; CÁLCULO NUMÉRICO: Aspectos Teóricos e Computacionais, Livro Técnico, McGraw-Hill do Brasil, 1988.

Zero de Funções

O objetivo desta seção é apresentar e discutir alguns *algoritmos* utilizados para obter a *solução numérica* de uma equação do tipo:

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

Zero de Funções

O objetivo desta seção é apresentar e discutir alguns *algoritmos* utilizados para obter a *solução numérica* de uma equação do tipo:

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

O destaque nos termos: *algoritmos*; *solução numérica* e $f(x) = 0$ foram introduzidos porque, para um melhor entendimento do objetivo proposto, estes termos requerem definição e contextualização.

Algorithm

From Wikipedia, the free encyclopedia

For other uses, see Algorithm (disambiguation).

In mathematics and computer science, an **algorithm** (/ˈælɡərɪðəm/ listen)) is a finite sequence of well-defined, computer-implementable instructions, typically to solve a class of problems or to perform a computation.[1][2] Algorithms are always unambiguous and are used as specifications for performing calculations, data processing, automated reasoning, and other tasks.

As an effective method, an algorithm can be expressed within a finite amount of space and time,[3] and in a well-defined formal language[4] for calculating a function.[5] Starting from an initial state and initial input (perhaps empty),[6] the instructions describe a computation that, when executed, proceeds through a finite[7] number of well-defined successive states, eventually producing "output"[8] and terminating at a final ending state. The transition from one state to the next is not necessarily deterministic; some algorithms, known as randomized algorithms, incorporate random input.[9]

The concept of algorithm has existed since antiquity. Arithmetic algorithms, such as a division algorithm, was used by ancient Babylonian mathematicians c. 2500 BC and Egyptian mathematicians c. 1550 BC.[10] Greek mathematicians later used algorithms in the sieve of Eratosthenes for finding prime numbers,[11] and the Euclidean algorithm for finding the greatest common divisor of two numbers.[12] Arabic mathematicians such as al-Kindi in the 9th century used cryptographic algorithms for code-breaking, based on frequency analysis.[13]

The word *algorithm* itself is derived from the 9th-century mathematician Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī, Latinized *Algoritmi*.[14] A partial formalization of what would become the modern concept of algorithm began with attempts to solve the *Entscheidungsproblem* (decision problem) posed by David Hilbert in 1928. Later formalizations were framed as attempts to define "effective calculability"[15] or "effective method".[16] Those formalizations included the Gödel–Herbrand–Kleene recursive functions of 1930, 1934 and 1935, Alonzo Church's lambda calculus of 1936, Emil Post's Formulation 1 of 1936, and Alan Turing's Turing machines of 1936–37 and 1939.

Algoritmo de Euclides para o cálculo do maior divisor comum (MDC) de dois números A e B.

Algoritmo de Euclides para o cálculo do maior divisor comum (MDC) de dois números A e B.

O algoritmo consiste em um procedimento iterativo que, a cada iteração redefine os valores de variáveis a e b.

Algoritmo de Euclides para o cálculo do maior divisor comum (MDC) de dois números A e B.

O algoritmo consiste em um procedimento iterativo que, a cada iteração redefine os valores de variáveis a e b.

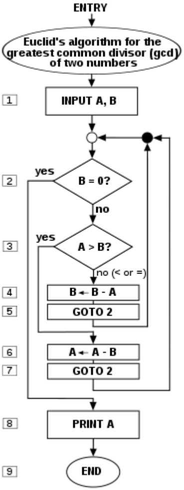
Inicialmente os valores atribuidos para a e b são $a = A$ e $b = B$

Algoritmo de Euclides para o cálculo do maior divisor comum (MDC) de dois números A e B.

O algoritmo consiste em um procedimento iterativo que, a cada iteração redefine os valores de variáveis a e b.

Inicialmente os valores atribuidos para a e b são $a = A$ e $b = B$

SE o teste $b \geq a$ resultar em verdadeiro, ENTÃO, o algoritmo altera o valor de b para $b - a$. Por outro lado, SE o teste $b \geq a$ resultar em falso, ENTÃO, o algoritmo altera o valor de a para $a - b$. O procedimento termina quando $b = 0$. O valor final de a é o Máximo Divisor Comum de A e B.



Máximo Divisor Comum

A definição de *solução numérica* de uma equação da forma $f(x) = 0$ requer a consideração de um parâmetro que define a *precisão* da solução.

A definição de *solução numérica* de uma equação da forma $f(x) = 0$ requer a consideração de um parâmetro que define a *precisão* da solução. Mesmo em uma situação simples como:

$$f(x) = 3x - 2 = 0$$

fica evidente a necessidade de ter uma precisão especificada para a *solução numérica*.

A definição de *solução numérica* de uma equação da forma $f(x) = 0$ requer a consideração de um parâmetro que define a *precisão* da solução. Mesmo em uma situação simples como:

$$f(x) = 3x - 2 = 0$$

fica evidente a necessidade de ter uma precisão especificada para a *solução numérica*. Neste exemplo temos

$$3x - 2 = 0 \implies \bar{x} = 2 \div 3 = 0,66666666\ldots$$

A definição de *solução numérica* de uma equação da forma $f(x) = 0$ requer a consideração de um parâmetro que define a *precisão* da solução. Mesmo em uma situação simples como:

$$f(x) = 3x - 2 = 0$$

fica evidente a necessidade de ter uma precisão especificada para a *solução numérica*. Neste exemplo temos

$$3x - 2 = 0 \implies \bar{x} = 2 \div 3 = 0,66666666...$$

Assim o registro da *solução exata*, $\bar{x}$, na memória de uma maquina é impossível porque requer uma quantidade infinita de digitos.

Definição

Dados

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists! \bar{x} \in D \subseteq \mathbb{R} \quad \text{satisfazendo} \quad f(\bar{x}) = 0$$

e $\epsilon \in \mathbb{R}; \epsilon > 0$, uma *solução numérica com precisão* ϵ para a equação $f(x) = 0$, é um número real, $\tilde{x}$, para o qual a afirmação:

$$\bar{x} \in [\tilde{x} - \epsilon, \tilde{x} + \epsilon]$$

é verdadeira.

É importante observar que com esta definição, a *solução numérica* não é única no sentido de que existe uma infinidade de valores $\tilde{x}$ para os quais a afirmação

$$\bar{x} \in [\tilde{x} - \epsilon, \tilde{x} + \epsilon]$$

verdadeira.

É importante observar que com esta definição, a *solução numérica* não é única no sentido de que existe uma infinidade de valores $\tilde{x}$ para os quais a afirmação

$$\bar{x} \in [\tilde{x} - \epsilon, \tilde{x} + \epsilon]$$

verdadeira.

No exemplo considerado, $f(x) = 3x - 2 = 0$ temos:

- $f(x)$ é contínua no intervalo $[0.664, 0.668]$

- $f(x)$ é contínua no intervalo $[0.664, 0.668]$
- O fato de que

$$f(0.664) \cdot f(0.668) = -3.2 \cdot 10^{-5}$$

é negativo implica em que $f(x)$ muda de sinal no intervalo $[0.664, 0.668]$.

- $f(x)$ é contínua no intervalo $[0.664, 0.668]$
- O fato de que

$$f(0.664) \cdot f(0.668) = -3.2 \cdot 10^{-5}$$

é negativo implica em que $f(x)$ muda de sinal no intervalo $[0.664, 0.668]$. Como $f(x)$ é contínua neste intervalo podemos concluir que

$$\exists \bar{x} \in [0.664, 0.668] \subseteq \mathbb{R} \mid f(\bar{x}) = 0$$

- $f(x)$ é contínua no intervalo $[0.664, 0.668]$
- O fato de que

$$f(0.664) \cdot f(0.668) = -3.2 \cdot 10^{-5}$$

é negativo implica em que $f(x)$ muda de sinal no intervalo $[0.664, 0.668]$. Como $f(x)$ é contínua neste intervalo podemos concluir que

$$\exists \bar{x} \in [0.664, 0.668] \subseteq \mathbb{R} \mid f(\bar{x}) = 0$$

- Porque

$$\frac{df}{dx}(x) = 3 > 0; \forall x \in [0.664, 0.668]$$

podemos afirmar que pode existir no máximo uma solução para $f(x) = 0$ no intervalo $[0.664, 0.668]$ ($\frac{df}{dx}(x) > 0$ implica em que $f(x)$ é monótona crescente neste intervalo).

As duas primeiras observações permitem concluir que existe solução para $f(x) = 0$ no intervalo $[0.664, 0.668]$. A terceira observação assegura a unicidade da solução. Assim podemos concluir que:

$$\exists! \bar{x} \in [0.664, 0.668] \subseteq \mathbb{R} \mid f(\bar{x}) = 0$$

As duas primeiras observações permitem concluir que existe solução para $f(x) = 0$ no intervalo $[0.664, 0.668]$. A terceira observação assegura a unicidade da solução. Assim podemos concluir que:

$$\exists! \bar{x} \in [0.664, 0.668] \subseteq \mathbb{R} \mid f(\bar{x}) = 0$$

Portanto para $\epsilon = 0.002$; $\tilde{x} = 0.666$ é um solução numérica da equação $f(x) = 3x - 2 = 0$, com precisão $\epsilon = 0.002$ pois

$$\bar{x} \in [0.664, 0.668] = [\tilde{x} - \epsilon, \tilde{x} + \epsilon]$$

Observe que se considerarmos o intervalo $[0.663, 0.667]$ podemos também concluir que

$$\exists! \bar{x} \in [0.663, 0.667] \subseteq \mathbb{R} \mid f(\bar{x}) = 0$$

e portanto para $\epsilon = 0.002$; $\tilde{x} = 0.665$ também é um solução numérica da equação $f(x) = 3x - 2 = 0$, com precisão $\epsilon = 0.002$ pois

$$\bar{x} \in [0.663, 0.667] = [\tilde{x} - \epsilon, \tilde{x} + \epsilon]$$

Em nossa apresentação iremos considerar funções definidas em subconjuntos dos números reais que assumem valores reais:

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Com relação à equação $f(x) = 0$, é necessário uma análise preliminar no sentido de determinar $D' \subseteq D$ tal que:

Em nossa apresentação iremos considerar funções definidas em subconjuntos dos números reais que assumem valores reais:

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Com relação à equação $f(x) = 0$, é necessário uma análise preliminar no sentido de determinar $D' \subseteq D$ tal que:

- $\exists \bar{x} \in D' \subseteq \mathbb{R}$ tal que $f(\bar{x}) = 0$

Em nossa apresentação iremos considerar funções definidas em subconjuntos dos números reais que assumem valores reais:

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Com relação à equação $f(x) = 0$, é necessário uma análise preliminar no sentido de determinar $D' \subseteq D$ tal que:

- $\exists \bar{x} \in D' \subseteq \mathbb{R}$ tal que $f(\bar{x}) = 0$
  E em caso afirmativo, devemos assegurar que:
- $\exists ! \bar{x} \in D' \subseteq \mathbb{R}$ tal que $f(\bar{x}) = 0$

Em nossa apresentação iremos considerar funções definidas em subconjuntos dos números reais que assumem valores reais:

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Com relação à equação $f(x) = 0$, é necessário uma análise preliminar no sentido de determinar $D' \subseteq D$ tal que:

- $\exists \bar{x} \in D' \subseteq \mathbb{R}$ tal que $f(\bar{x}) = 0$
  E em caso afirmativo, devemos assegurar que:
- $\exists! \bar{x} \in D' \subseteq \mathbb{R}$ tal que $f(\bar{x}) = 0$

Assim, como regra geral, antes da implementação dos algoritmos que iremos discutir, devemos determinar um subconjunto $D' \subseteq D$ para o qual nós temos:

$$\exists! \bar{x} \in D' \subseteq D \text{ tal que } f(\bar{x}) = 0$$

Exemplo

$$f(x) = e^{-x} - x$$

- Isolar a solução desejada

Como

$$f(x) = e^{-x} - x = 0 \iff x = e^{-x}$$

e $e^{-x} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, temos que se existir solução, $\bar{x}$, para $f(\bar{x}) = 0$, necessáriamente $\bar{x} > 0$.
Temos também que:

$$f(0)\dot{f}(1) = -0.63212 < 0$$

e porque $f(x)$ é uma função contínua em $[0, 1]$, podemos então afirmar que $\exists \bar{x} \in [0, 1]$ tal que $f(\bar{x}) = 0$.

O fato de que:

$$\frac{df}{dx}(x) = -e^{-x} - 1 < 0; \forall x \in \mathbb{R}$$

implica em que $f(x)$ é monótona decrescente para $x \in \mathbb{R}$ e portanto a equação $f(x) = 0$ pode ter no máximo uma solução real.
Podemos então concluir que:

$$\exists! \bar{x} \in [0.000, 1.000] \mid f(\bar{x}) = 0$$