MAT6682 - Tópicos de Análise Funcional - 2023
Lista 2

1. Espaços Vetoriais Topológicos

1. Sejam X um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, $p : X \to [0,+\infty)$ uma função positivamente homogênea em X e $A = \{x \in X : p(x) < 1\}$.

a) Mostre que A é absorvente e que p é o funcional de Minkowski de A.

b) Mostre que se p é um funcional sublinear, então A é convexo.

c) Mostre que se p é uma seminorma, então A é convexo e equilibrado.

2. Sejam X um $\mathbb{R}$-espaço vetorial topológico, $\varphi : X \to \mathbb{R}$ um funcional linear e $p : X \to \mathbb{R}$ uma função qualquer. Mostre que se p é contínua em 0 e se $\varphi(x) \le p(x)$ para todo $x \in X$, então φ é contínuo.

3. Sejam X um espaço vetorial topológico e Y um subespaço de X. A *topologia quociente* é a topologia mais fina em X/Y que torna a aplicação quociente $\pi : X \to X/Y$ contínua, isto é, é a topologia $\left\{V \subset X/Y : \pi^{-1}(V) \text{ é aberto em } X\right\}$.

a) Mostre que π é uma aplicação aberta e que X/Y munido da topologia quociente é um espaço vetorial topológico.

b) Mostre que se X é localmente convexo, então X/Y é localmente convexo.

c) Mostre que se X é um espaço normado e Y é um subespaço fechado de X, então a topologia quociente em X/Y coincide com a topologia induzida pela norma quociente.

2. A Topologia Fraca

1. Dado um espaço normado X, mostre que $(X,\sigma(X,X^*))$ é um espaço vetorial topológico localmente convexo de Hausdorff.

2. Sejam $X \neq \{0\}$ um espaço normado, $x_1^*,\dots,x_n^* \in X^*$ e $\varepsilon > 0$. Mostre que existem $y_1^*,\dots,y_m^* \in X^*$ e $\delta > 0$ tais que $U\left(0; y_1^*,\dots,y_m^*;\delta\right) \subset U\left(0; x_1^*,\dots,x_n^*;\varepsilon\right)$ e $\left\{y_1^*,\dots,y_m^*\right\}$ é linearmente independente.

3. Seja X um espaço normado de dimensão infinita. Mostre que toda w-vizinhança básica da origem contém um subespaço fechado de dimensão infinita. Conclua que todo w-aberto não vazio é ilimitado.

4. Seja X um espaço normado de dimensão infinita.

a) Mostre que $\mathrm{Id} : (X,\sigma(X,X^*)) \to (X,\|\cdot\|)$ leva limitados em limitados.

b) Mostre que existe uma rede $(x_j)_{j\in J}$ em X tal que $x_j \xrightarrow{w} 0$ e $\|x_j\| = 1$ para todo $j \in J$. Conclua que as aplicações

$$\mathrm{Id} : (X,\sigma(X,X^*)) \to (X,\|\cdot\|) \quad \text{e} \quad \|\cdot\| : (X,\sigma(X,X^*)) \to [0,+\infty)$$

não são contínuas. (*Sugestão:* fixe uma base algébrica de X^* e use o Exercício 1.b da Lista 1. Note que X^* também tem dimensão infinita.)

5. Sejam X um espaço normado e Y um subespaço de X.

a) Mostre que $(Y,\sigma(Y,Y^*))$ coincide com a topologia induzida por $(X,\sigma(X,X^*))$ em Y.

b) Suponha que Y seja fechado. Mostre que a topologia fraca em X/Y coincide com a topologia quociente em X/Y induzida por $(X,\sigma(X,X^*))$.

6. Sejam X um espaço normado e $(x_n)_{n\geq 1}$ uma sequência em X. Prove as seguintes afirmações:

a) $(x_n)_{n\geq 1}$ é fracamente de Cauchy se, e somente se, $x_{n_k} - x_{m_k} \xrightarrow{w} 0$ para cada par de subsequências $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ e $(x_{m_k})_{k\geq 1}$ de $(x_n)_{n\geq 1}$.

b) Se $(x_n)_{n\geq 1}$ é fracamente de Cauchy, então $(x_n)_{n\geq 1}$ é limitada.

c) Se $(x_n)_{n\geq 1}$ é de Cauchy (em norma) e $x_n \xrightarrow{w} 0$, então $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$.

d) Se $x_n \xrightarrow{w} x$, então $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

e) Se $x_n \xrightarrow{w} x$, então existe uma sequência $(y_n)_{n\geq 1}$ em $\mathrm{co}(\{x_n : n \geq 1\})$ tal que $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$.

7. Mostre que ℓ_p é fracamente sequencialmente completo para todo $1 < p < \infty$.

8. Considere o conjunto $K = \{e_n : n \geq 1\} \cup \{0\}$.

a) Mostre que K é fracamente compacto mas não é compacto na topologia da norma em c_0 e em ℓ_p, $1 < p \leq \infty$.

b) Mostre que K não é fracamente compacto em ℓ_1.

9. Seja X um espaço normado.

a) Mostre que se X é fracamente sequencialmente completo, então X é de Banach.

b) Mostre que se X é de Banach e tem a propriedade de Schur, então X é fracamente sequencialmente completo. A recíproca é verdadeira? Justifique.

10. Sejam K um espaço de Hausdorff compacto, $f \in C(K)$ e $(f_n)_{n\geq 1}$ uma sequência em $C(K)$. Mostre que $f_n \xrightarrow{w} f$ se, e somente se, $(f_n)_{n\geq 1}$ é limitada em $C(K)$ e $f_n(t) \longrightarrow f(t)$ para todo $t \in K$. (*Sugestão:* para a recíproca, use o Teorema de Representação de Riesz e o Teorema da Convergência Dominada. Veja W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill (1987), Teorema 1.34, pg. 26, e Teorema 6.19, pg. 130.)