MAT0122 - Álgebra Linear I
Lista 3
2023

1. Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Sejam $u, v \in V$.
   Definimos a **diferença de vetores** $u - v$ por:
$$u - v = u + (-v).$$
   Usando a definição de espaço vetorial e a definição acima, prove que, se $u, v, w \in V$ e $a, b \in \mathbb{R}$, tem-se
   (a) $-(u - v) = v - u$;
   (b) $u + v = w$, se, e somente se, $u = w - v$;
   (c) $a(u - v) = au - av$;
   (d) $(a - b)u = au - bu$.

2. Em cada item, verifique se $(V, \oplus, \odot)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.
   (a) $V = \mathbb{R}^2$ com as operações:
$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 0) \qquad \text{e} \qquad \alpha \odot (x, y) = (\alpha x, 0)$$
   para todos $x_1, x_2, y_1, y_2, x, y, \alpha \in \mathbb{R}$

   (b) $V = \mathbb{R}^2$ com as operações:
$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 0) \quad \text{e} \quad \alpha \odot (x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$
   para todos $x_1, x_2, y_1, y_2, x, y, \alpha \in \mathbb{R}$.

   (c) $V = \{a + bx^2 \in P_2(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ com as operações:
$$(a_1 + b_1x^2) \oplus (a_2 + b_2x^2) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)x^2 \quad \text{e} \quad \alpha \odot (a + bx^2) = \alpha + \alpha x^2$$
   para todos $a_1, a_2, b_1, b_2, a, b, \alpha \in \mathbb{R}$

   (d) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid x > 0 \text{ e } y > 0\}$ com as operações:
$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1y_2) \qquad \text{e} \qquad a \odot (x, y) = (x^a, y^a),$$
   para todos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x, y) \in V$ e $a \in \mathbb{R}$.

3. No espaço vetorial $\mathbb{R}^4$, sejam $u = (1, 2, 3, 4)$ e $v = (-5, 7, -6, 8)$.
   (a) Determine as quáduplas $x, y \in \mathbb{R}^4$ tais que $x + 2y = u$ e $3x + 4y = v$.
   (b) Existem $a, b \in \mathbb{R}$ não ambos nulos tais que $au + bv = 0$?

4. No espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, sejam $u = (1, 1)$, $v = (1, 2)$ e $w = (2, 1)$. Obtenha números reais $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ com $a_1 \neq a_2, b_1 \neq b_2$ e $c_1 \neq c_2$ tais que $a_1u + b_1v + c_1w = a_2u + b_2v + c_2w$.

5. No espaço vetorial $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Calcular $2A + B - 3C$;

   (b) Determine X tal que
$$\frac{A+X}{2} + \frac{X-B}{2} = C;$$

   (c) Existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $A = xB + yC$?

6. Seja $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o espaço vetorial da funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Sejam $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ as funções definidas por $f(x) = x^3 - x$ e $g(x) = x^2 + x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que se $a, b, c \in \mathbb{R}$ são tais que $af + bg + c = 0$ (aqui 0 é a função nula), então $a = b = c = 0$.

7. Sejam u e v vetores não nulos em um espaço vetorial V. Mostre que u é múltiplo escalar de v se, e somente se, v é múltiplo escalar de u. O que se pode afirmar caso u e v não sejam ambos diferentes de 0?

8. Sejam $u = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $v = (y_1, y_2, ..., y_n)$ vetores em $\mathbb{R}^n$. Mostre que um deles é múltiplo do outro se, e somente se, $x_i y_j = x_j y_i$ para todo $i, j = 1, 2, ..., n$.

9. Sejam $(U, +_U, \cdot_U)$ e $(V, +_V, \cdot_V)$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Seja
$$U \times V = \{(u, v) \mid u \in U, v \in V\}.$$
   Definimos as operações $+$ e $\cdot$ em $U \times V$ da seguinte maneira:
   - $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 +_U u_2, v_1 +_V v_2)$ para todo $u_1, u_2 \in U, v_1, v_2 \in V$;
   - $a \cdot (u, v) = (a \cdot_U u, a \cdot_V v)$ para todo $a \in \mathbb{R}, u \in U, v \in V$.

   Mostre que $(U \times V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

10. Verifique se W é um subespaço do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ nos seguintes casos:

   (a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$;

   (b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1\}$;

   (c) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0\}$;

   (d) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |y| = z\}$;

   (e) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\}$;

   (f) $W = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{Z}\}$;

   (g) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y \in \mathbb{Q}\}$;

   (h) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$;

   (i) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$.

11. Verifique se W é um subespaço do espaço vetorial V nos seguintes casos:

   (a) $V = M_2(\mathbb{R})$ e $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A \text{ é inversível}\}$;

   (b) $V = M_2(\mathbb{R})$ e $W = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^t = -A\}$;

   (c) $V = M_2(\mathbb{R})$, $B \in V$ uma matriz **fixa** e $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid AB = BA\}$.

12. Verifique se W é um subespaço do espaço vetorial $P(\mathbb{R})$ nos seguintes casos:

    (a) $W = \{p \in P(\mathbb{R}) \mid p(0) = 2p(1)\}$;
    (b) $W = \{p \in P(\mathbb{R}) \mid p(t) = p(-t)\}$;
    (c) $W = \{p \in P(\mathbb{R}) \mid \text{grau}(p) = 0\}$;
    (d) $W = \{p \in P(\mathbb{R}) \mid \text{grau}(p) \geq 3\}$;
    (e) $W = \{p \in P(\mathbb{R}) \mid$ os coeficientes de p são números inteiros$\}$;
    (f) $W = \{p \in P(\mathbb{R}) \mid p(t) \in \mathbb{Q}, \forall t \in \mathbb{R}\}$.

13. Verifique se W é um subespaço do espaço vetorial V nos seguintes casos:

    (a) $V = P_2(\mathbb{R})$ e $W = \{p \in V \mid p$ possui pelo menos uma raiz real $\}$;
    (b) $V = P_2(\mathbb{R})$ e $W = \{p \in V \mid p(\alpha) \geq 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}\}$;
    (c) $V = P_3(\mathbb{R})$ e $W = \{p \in V \mid p(1) = 0\}$;
    (d) $V = P_3(\mathbb{R})$ e $W = \{p \in V \mid p(t) = at^3 + bt \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

14. Verifique se W é um subespaço do espaço vetorial $\mathcal{C}([0,1])$ nos seguintes casos:

    (a) $W = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid f(0) = f(1)\}$;
    (b) $W = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid f(\frac{1}{2}) = 0\}$;
    (c) $W = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid \int_0^1 f(t)dt = 0\}$;
    (d) $W = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid \int_{-1}^1 f(t)dt = f(0)\}$.

15. Verifique se W é um subespaço do espaço vetorial $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ nos seguintes casos:

    (a) $W = \{f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mid f$ tem uma tangente horizontal em $(0, f(0))\}$;
    (b) $W = \{f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0)\}$;
    (c) $W = \{f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mid f' = 5f\}$.
    ($\mathcal{D}(\mathbb{R})$ é o espaço vetorial das funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.)

16. Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e sejam U e W subespaços de V. Definimos:

$$U + W = \{v \in V \mid \text{ existem } u \in U \text{ e } v \in V \text{ tais que } v = u + w\}$$

    (a) Mostre que $U + W \subset V$.
    (b) Mostre que $U \subset U + W$ e $W \subset U + W$.
    (c) Mostre que $U + W$ é um subespaço de V.

17. Sejam $U = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$ e $V = \{(0, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R}\}$ subespaços de R^3. Determine $U + V$ e interprete geometricamente.

18. Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e sejam W_1 e W_2 subespaços de V.

    (a) Mostre que $W_1 \cap W_2$ é um subespaço de V.
    (b) Mostre que $W_1 \cup W_2$ é um subespaço de V se, e somente se $W_1 \subset W_2$ ou $W_2 \subset W_1$.

19. Sejam $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ e $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$ subespaços de R^3. Determine $W_1 \cap W_2$ e interprete geometricamente.

20. Sejam $W_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$ e $W_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$. Esboce W_1 e W_2 no mesmo sistema de coordenadas e verifique que $W_1 \cup W_2$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.