Aula 3

Sistemas lineares não homogêneos

$$AX = B$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$

$X = (x_j) \in M_{n \times 1}(\mathbb{K})$

$B = (b_i) \in M_{m \times 1}(\mathbb{K})$

$$[A \,\vdots\, B] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Qdo existem, as soluções do sistema original e escalonado são as mesmas já que a realização de operações elementares as preservam.

Exemplos.

1) Encontre os valores de x_1, x_2 e x_3 que satisfazem:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

não tem solução

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

solução única

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$

infinitas soluções

Def: Uma matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ está na forma escalonada reduzida qdo satisfaz as seguintes condições:

(a) todas as linhas nulas ocorrem abaixo das linhas não nulas.

(b) O primeiro elemento não nulo de cada linha não nula é igual a 1. ← tal elemento é chamado pivô

(c) O pivô de cada linha não nula ocorre à direita do pivô da linha anterior.

(d) Se uma coluna contém um pivô, então todos os seus outros elementos são iguais a zero.

Exemplo. A matriz aumentada do sistema

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_4 = 0 \\ -6x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

é

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 4 \\ -6 & 4 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Num exemplo anterior vimos que tal sistema é equivalente a

$$\begin{cases} x_1 - \tfrac{2}{3}x_2 + \tfrac{4}{3}x_4 = 0 \\ x_3 - 9x_4 = 0 \end{cases}$$

cuja matriz escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{bmatrix}$$

está na forma escalonada reduzida.

Teo. Toda matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ é equivalente por linhas a uma única matriz escalonada reduzida $R \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Matrizes Invertíveis

$A = (a_{ij})$ em $M_n(\mathbb{K})$ é invertível se existe $B = (b_{ij})$ em $M_n(\mathbb{K})$ tal que $AB = BA = I$, i.e., $\forall\ 1 \leq i, j \leq n$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

Nesse caso denota-se por A^{-1} a inversa de A.

Calcula-se a inversa de A, quando existe, via escalonamento (eliminação de Gauss).

Para tanto temos que resolver $AB = I$

i.e. temos que resolver os n sistemas não homogêneos

$AX_i = I_i$ onde X_i e I_i são a i-ésima coluna da matriz de incógnitas B e da matriz identidade I em $M_n(\mathbb{K})$.

Cálculo da matriz inversa

Queremos encontrar B tal que $AB = I$

Para tanto escalona-se a matriz aumentada obtendo-se a sua matriz escalonada na forma reduzida. Observe que $A \in M_n(\mathbb{K})$ é invertível então sua matriz escalonada na forma reduzida é a identidade. Daí escalona-se $[A \vdots I]$ obtendo-se $[I \vdots B]$ com $B = A^{-1}$.

OBS: (i) Veja que a matriz escalonada $[I \vdots B]$ será obtida se só se $AB = I$.

(ii) Aqui A, B e $I \in M_n(\mathbb{K})$ com $I = (\delta_{ij})$.

(iii) Note que por tal procedimento podemos concluir que $AB = I$ se só se $BA = I$ já que as operações elementares são invertíveis.

Exemplo. Calcule a inversa da matriz abaixo caso exista.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Resposta: } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Determinantes

Aqui definimos o determinante de uma matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ de maneira indutiva em $n \in \mathbb{N}$.

- $n = 1$, $\det A = a_{11}$.
- Hipótese de indução.

Suponha agora que $\det B$ está definido para todas as matrizes $B \in M_m(\mathbb{K})$ com $m < n$.

- Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$. Para cada i, j defina a matriz A_{ij} formada a partir de A retirando-se a sua i-ésima linha e a sua j-ésima coluna.

É claro que $A_{ij} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ e portanto está definido $\det A_{ij}$ $\forall\, 1 \leq i,j \leq n$. Defina agora

$$\det A := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} A_{1j} \in \mathbb{K}.$$

Exemplos:

(a) $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (b) $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

O resultado abaixo nos permite calcular o determinante por meio de qualquer linha ou coluna de A.

Teo. Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$. Então

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

OBS: Na primeira expressão calcula-se o det A pela i-ésima linha. Na segunda pela j-ésima coluna.

Exercícios: seção 1.4.12: 1, 2, 3 e 4.

Referência: Reginaldo J. Santos. Um curso de Geometria Analítica e Álgebra Linear. (2009).