Aula 2 _ Sistemas Lineares

Seja $\mathbb{K}$ um corpo e um sistema de eq. lineares homogêneas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

com coeficientes $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ e incógnitas $x_1, \dots, x_n$.

Resolver este sistema é encontrar $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ que satisfaça cada equação com $x_i = \alpha_i$ $1 \leq i \leq n$.

Exemplo. Vamos encontrar a solução do sistema abaixo via escalonamento (Eliminação de Gauss) antes de formalizarmos.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \qquad\quad + 4x_4 = 0 \\ -6x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

Solução:

$$x_1 = \frac{2}{3}x_2 - \frac{4}{3}x_4$$

$$x_3 = 9x_4$$

(x_2 e x_4 são variáveis livres.)

A eliminação de Gauss ou escalonamento para resolução para solução de sistemas devido as seguintes operações chamadas elementares:

(e1) Troca de posição de duas equações.

(e2) Multiplicação de uma equação por um escalar não nulo.

(e3) Substituição de uma equação pela soma desta equação com alguma outra distinta.

Def: Dizemos que dois sistemas de equações a $\underline{n}$ incógnitas são equivalentes se tiverem as mesmas soluções.

OBS: Note que a realização de operações elementares produz sistemas equivalentes. Desta forma, podemos usá-las de maneira a obter sistemas equivalentes de fácil solução, como os sistemas escalonados.

Def: Um sistema linear $\begin{cases} b_{11}x_1 + \cdots + b_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ b_{r1}x_1 + \cdots + b_{rn}x_n = 0 \end{cases}$

será chamado escalonado se existirem $1 \leq l_1 < \ldots < l_r \leq n$ tais que $b_{il_i} \neq 0$ e $b_{ij} = 0$ sempre que $1 \leq j < l_i$.

Exemplo. O sistema obtido no exemplo anterior é escalonado:

$$\begin{cases} x_1 - \frac{2}{3}x_2 \qquad\qquad + \frac{4}{3}x_4 = 0 \\ \qquad\qquad x_3 - 9x_4 = 0 \end{cases}$$

Proposição: Todo sistema linear $m \times n$ e com coeficientes em um corpo $\mathbb{K}$ é equivalente a um sistema escalonado com $r \leq m$ equações.

Corolário: Se o nº de equações de um sistema linear homogêneo com coeficientes em um corpo for menor do que o número de suas incógnitas, então tal sistema terá uma solução não trivial.

Exercícios. Seção 1.3.5: 1(b), 3.

Matrizes

Def. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Uma matriz A, $m \times n$, é dada por $m \times n$ valores $a_{ij} \in \mathbb{K}$ com $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ agrupadas em m linhas e n colunas

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Denotamos por $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ o conjunto de todas as matrizes $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$. Nele definimos as seguintes operações:

- **soma**. Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$

definimos $A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$.

- **multiplicação por escalar**. $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$\alpha A = (\alpha a_{ij}).$$

OBS: Veja que a soma de matrizes é comutativa e associativa. Além disso, a matriz nula, dada por $a_{ij} = 0 \quad \forall\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$, é um elemento neutro em $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $\forall\ A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, existe $-A = (-a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A + (-A) = 0$.

Isto é, $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ satisfaz (A1) - (A4).

O produto de matrizes é considerado no seguinte caso: $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$. Definimos

$$A \cdot B = AB = (a_{ij})(b_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{m} a_{1k} b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} a_{1k} b_{kn} \\ \vdots & & \\ \sum_{k=1}^{m} a_{mk} b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} a_{mk} b_{kn} \end{pmatrix}$$

Exemplos: a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Calcule $-2B$, AB e BC.

b) Seja $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. $AD = DA$?

O exemplo acima nos diz que o produto de matrizes em $M_{n \times n}(\mathbb{K})$ não é comutativo. Abaixo mais algumas propriedades das operações entre matrizes:

Multiplicação por escalar

- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ $\qquad \alpha, \beta \in \mathbb{K}$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

Delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Produto

- $(AB)C = A(BC)$
- $I = (\delta_{ij})$ satisfaz $AI = IA = A$ sempre que $m = n$

I chamada matriz identidade.

- $A(B+C) = AB + AC$ e $(B+C)A = BA + CA$.

- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

<u>dem</u>. $(AB)C = A(BC)$. $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$

$B = (b_{ij})_{n\times p}(\mathbb{K})$ e $C = (c_{ij}) \in M_{p\times n}(\mathbb{K})$.

$$[A(BC)]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} [BC]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{l=1}^{p} b_{kl} c_{lj} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} a_{ik} b_{kl} c_{lj} = \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$$

$$= \sum_{l=1}^{p} [AB]_{il} c_{lj} = [(AB)C]_{ij}.$$

$\blacksquare$

OBS: Também é comum se denotar

$M_n(\mathbb{K}) := M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

Matrizes Transpostas

Dado $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ definimos $A^t = (b_{ij}) \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$ sua transposta com $b_{ij} = a_{ji}$.

Troca-se linhas por colunas :-)

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Propriedades

(a) $(A^t)^t = A$ (b) $(A+B)^t = A^t + B^t$

(c) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$ (d) $(AB)^t = B^t A^t$.

dem. (d) $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$

$$[(AB)^t]_{ij} = [(AB)]_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} [A^t]_{kj} [B^t]_{ik}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [B^t]_{ik} [A^t]_{kj} = [(B^t A^t)]_{ij}$$

OBS: i) Veja que a diferença entre matrizes em $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ é definida por $A-B = A+(-B)$.

ii) $M_n(\mathbb{K})$ não é um corpo com o produto acima definido pois não é comutativo.

iii) Associa-se a sistemas $m\times n$ sua matriz de coeficientes $A=(a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e obtem-se o sistema escalonado via o escalonamento da matriz. Se $X=(x_j) \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ representamos o sistema linear homogêneo por $AX = 0 \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$.

Exemplo. Seja A a matriz do sistema linear anterior:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 4 \\ -6 & 4 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{R}).$$

Sua matriz escalonada é

$$\begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente definimos traço de uma matriz em $M_n(\mathbb{K})$

Função traço Definimos o traço de $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ como a soma dos elementos de sua diagonal

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Note que A é uma matriz quadrada!