Aula 1 (Preliminares)

Números: $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$, $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$

$\mathbb{Q} = \{ p/q : p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0 \}$ e $\mathbb{R}$.

Números Complexos: $\mathbb{C} = \{ a + bi : a, b \in \mathbb{R} \}$

onde i é um símbolo satisfazendo $i^2 = -1$.

$$z + w = a + bi + c + di = (a+b) + (c+d)i$$

$$z \cdot w = zw = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

para $z = a + bi$ e $w = c + di$.

$i \in \mathbb{C}$ é chamado imaginário puro

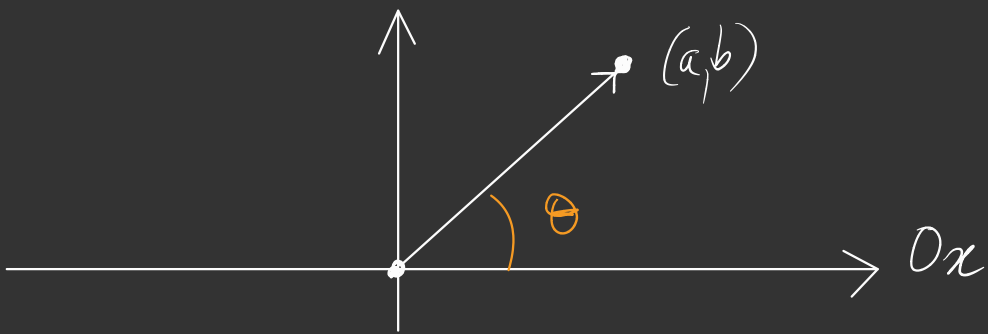
$\operatorname{Re}(z)$ e $\operatorname{Im}(z)$ denotam a parte real e imaginária de $z \in \mathbb{C}$.

Interpretação Geométrica

Identifica-se $z = a+bi$ com $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Assim podemos utilizar coordenadas polares para representar $\mathbb{C}$: $a = r\cos\theta$ e $b = r\,\text{sen}\,\theta$

em que r = distância de (a,b) à origem de $\mathbb{R}^2$ e θ o ângulo formado entre o eixo Ox e a reta que passa pela origem do plano e por (a,b).

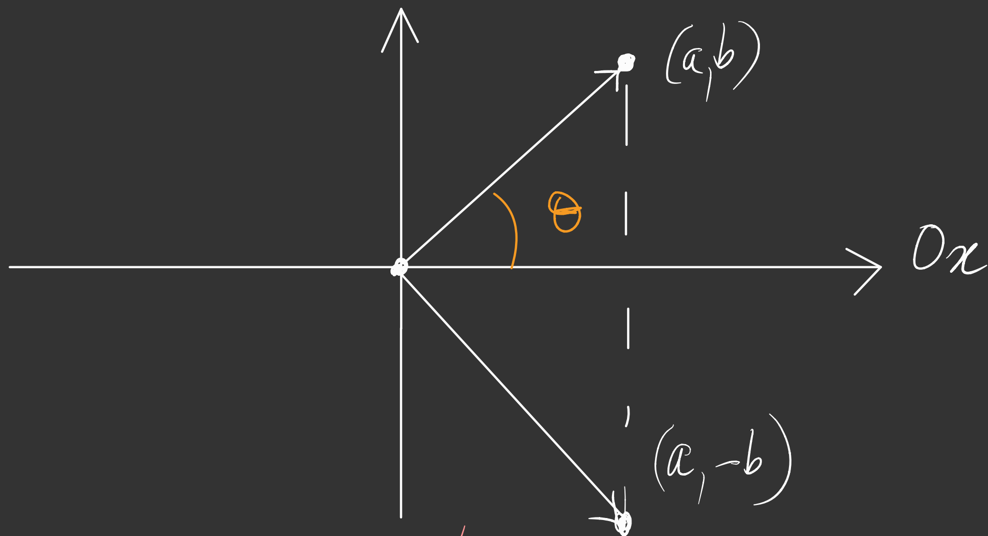


Veja que $|z| = |a+bi| := \sqrt{a^2+b^2} = r$

$$\therefore \quad z = r\cos\theta + r\,\text{sen}\,\theta\, i = r e^{i\theta}$$

se denotamos $e^{i\theta} := \cos\theta + \text{sen}\,\theta\, i$.

O conjugado $\bar{z} = \overline{(a+bi)} = a - bi$ corresponde em refletir z em relação ao eixo real Ox.



Teorema fundamental da álgebra

Todo polinômio com coeficientes em $\mathbb{C}$ possui raízes complexas.

OBS: Observe que $p(x) = x^2 + 1$ não possui raízes em $\mathbb{R}$ mas em $\mathbb{C}$.

Def: Os conj. que satisfazem a propriedade do teorema acima é chamado de algebricamente fechado. Assim $\mathbb{C}$ é algebricamente fechado e $\mathbb{R}$ não.

Corpos

Vamos desenvolver o conceito de espaço vetorial sobre corpos arbitrários.

Def: $\mathbb{K}$ é um corpo se possui duas operações adição $+$ e multiplicação $\cdot$ satisfazendo:

(A1) $a+b=b+a \quad \forall a,b \in \mathbb{K}$ (comutativa)

(A2) $(a+b)+c=a+(b+c) \quad \forall a,b,c \in \mathbb{K}$ (associativa)

(A3) $\exists$ elemento neutro $0 \in \mathbb{K}$ tq. $0+a=a+0=a$ $\forall a \in \mathbb{K}$.

(A4) Para cada $a \in A$ $\exists$ $b \in A$ tq $a+b=0$.

oposto ou simétrico

Nesse caso denotamos $b:=-a$ (inverso aditivo).

(M1) $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a,b \in \mathbb{K}$ (comutativa)

(M2) $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c \quad \forall a,b,c \in \mathbb{K}$ (associativa)

(M3) $\exists$ $1 \in \mathbb{K}$ tq. $a\cdot 1 = 1\cdot a = a \quad \forall a \in \mathbb{K}$

(elemento neutro da multiplicação)

(M4) Para cada $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, $\exists\, b \in \mathbb{K}$, $b = a^{-1}$

tal que $a \cdot b = b \cdot a = 1$ (inverso multiplicativo)

(D) $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \forall\, a, b, c \in \mathbb{K}$

(distributiva)

Exemplos.

1) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são corpos. $\mathbb{Z}$ não é corpo.

2) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{ a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q} \}$ é corpo.

- soma $a + b\sqrt{2} + c + d\sqrt{2} = (a+b) + (c+d)\sqrt{2}$
- produto $a + b\sqrt{2} \cdot c + d\sqrt{2} = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$

3) $\mathbb{Z}_m = \{ \bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1} \}$ $m \in \mathbb{N}$

- $\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}$ onde c é o resto da divisão de $a+b$ por m.
- $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{c}$ onde c é o resto da divisão de $a \cdot b$ por c.

Neste caso vale: $\mathbb{Z}_n$ é um corpo se só se n é primo.

Com efeito, se n não é primo $\exists\, p, q$ primos entre si tq. $pq = n$, e daí $\bar{p} \cdot \bar{q} = 0$.

Assim, se $\mathbb{Z}_m$ é corpo, $m \neq pq$ $\forall\, p, q$ em $\mathbb{N}$ com $1 < p \leq q < m$.

Por outro lado, se m é primo e $a \in \mathbb{Z}_m$, temos

$\operatorname{mdc}(m, a) = 1 \overset{\text{Teo. de Bézout}}{\rightsquigarrow} \exists\, r, s \in \mathbb{Z}$ tq.

$ar + ms = 1 \rightsquigarrow \bar{a} \cdot \bar{r} = 1$ (a divisão de $a r$ por m tem resto 1.)

$\therefore$ a possui inverso multiplicativo

Exercícios: Seção 1.1.4 1

Seção 1.2.3 1 e 3.