



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo  
Departamento de Engenharia Mecânica*

*PME-3554 – Introdução às Estruturas Aeronáuticas*

*Aula #04*

*Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.*

*18/08/2023*



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

## Agenda

1. Equações de compatibilidade de deformações
2. Problemas de Estado Plano de Tensões (EPT)
3. Problemas de Estado Plano de Deformações (EPD)
4. Problemas de Estado de Tensões Axissimétrico (ETA)
5. Função de tensão de Airy



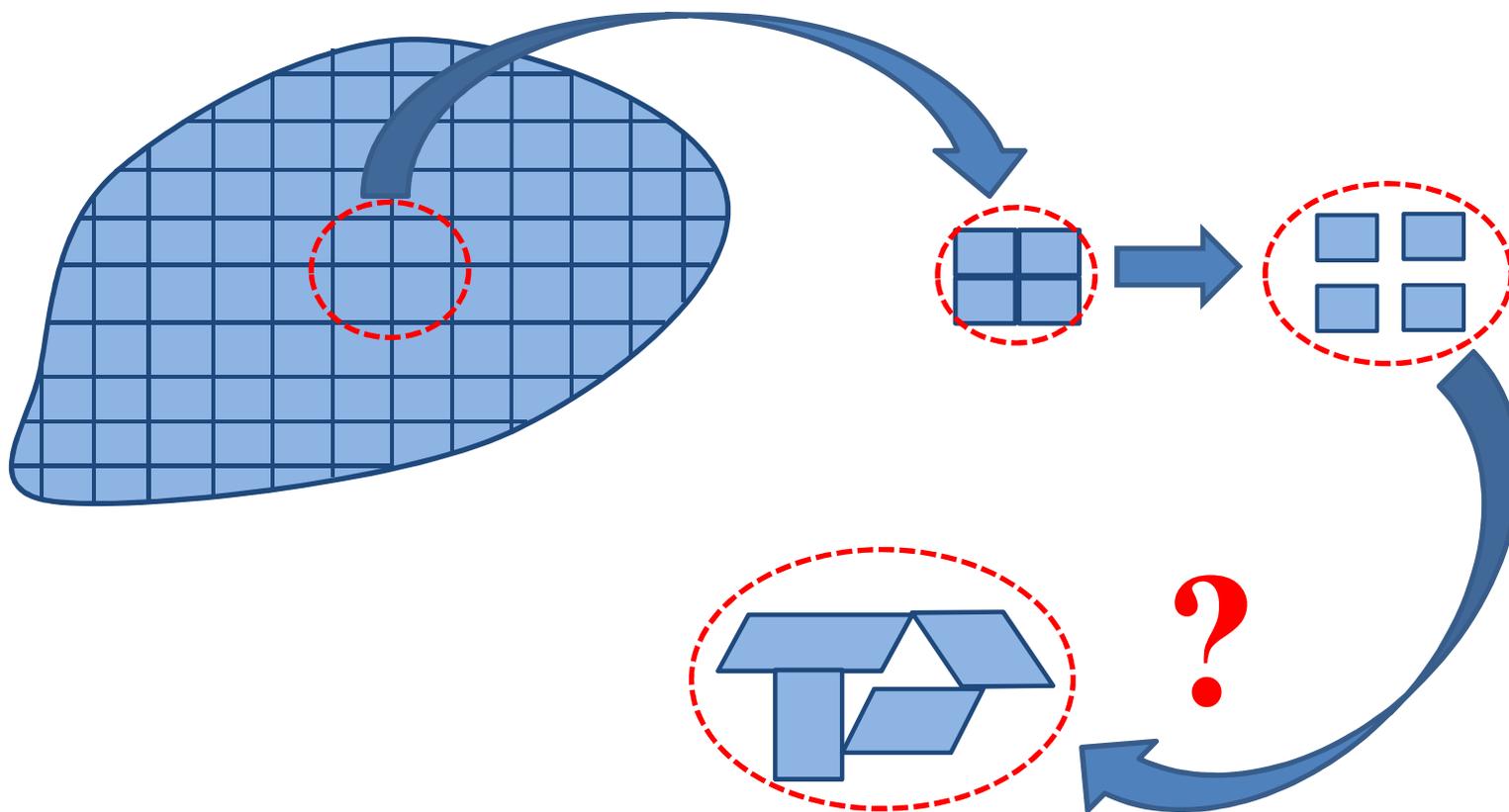
## 1. Equações de compatibilidade de deformações

As componentes de deformações no interior de um sólido não podem ser arbitrárias, devendo satisfazer as seguintes equações de compatibilidade de deformações:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} & \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)\end{aligned}$$



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*





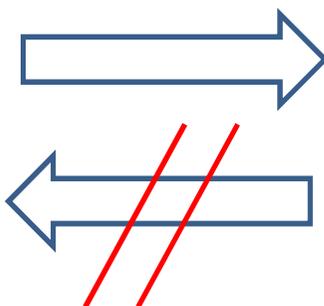
**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Campo de deslocamentos dos pontos do sólido:

$$u = u(x, y, z, t)$$

$$v = v(x, y, z, t)$$

$$w = w(x, y, z, t)$$



Campo de deformações dos pontos do sólido:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x(x, y, z, t)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y(x, y, z, t)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z(x, y, z, t)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy}(x, y, z, t)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_{xz}(x, y, z, t)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_{yz}(x, y, z, t)$$



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*

As equações de compatibilidade de deformações podem ser facilmente verificadas a partir das relações deformações-deslocamentos, como ilustra o exemplo a seguir (para a 1ª equação de compatibilidade):

$$\begin{array}{ccc} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} & \xrightarrow{\frac{\partial^2}{\partial y^2}} & \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} \\ & & + \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} & \xrightarrow{\frac{\partial^2}{\partial x^2}} & \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \\ & & || \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \xrightarrow{\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}} & \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \end{array}$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Utilizando a Lei de Hooke generalizada (para materiais isotrópicos) e as equações diferenciais de equilíbrio, pode-se mostrar que as seis equações de compatibilidade de deformações (escritas em função das tensões) ficam dadas por:

$$\nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = - \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \left( \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z} \right) - 2 \cdot \frac{\partial b_x}{\partial x}$$

$$\nabla^2 \sigma_y + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = - \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \left( \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z} \right) - 2 \cdot \frac{\partial b_y}{\partial y}$$

$$\nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = - \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \left( \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z} \right) - 2 \cdot \frac{\partial b_z}{\partial z}$$

$$\nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial z} = - \left( \frac{\partial b_z}{\partial y} + \frac{\partial b_y}{\partial z} \right)$$

$$\nabla^2 \tau_{zx} + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial x} = - \left( \frac{\partial b_z}{\partial x} + \frac{\partial b_x}{\partial z} \right)$$

$$\nabla^2 \tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} = - \left( \frac{\partial b_x}{\partial y} + \frac{\partial b_y}{\partial x} \right)$$

Onde:

$$\theta = \text{tr}(T) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

Notamos que as equações de compatibilidade de deformações (expressas em função das tensões) contém somente derivadas de 2ª ordem das componentes de tensão.

Logo, se as forças externas são tais que as equações diferenciais de equilíbrio e as condições de contorno podem ser satisfeitas tomando as componentes de tensão como constantes ou como funções lineares das coordenadas, as equações de compatibilidade são satisfeitas, sendo este sistema de tensões a solução correta do problema.

(V. Timoshenko & Goodier, “Teoria da Elasticidade”, cap.8, §85, pg.233)



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*

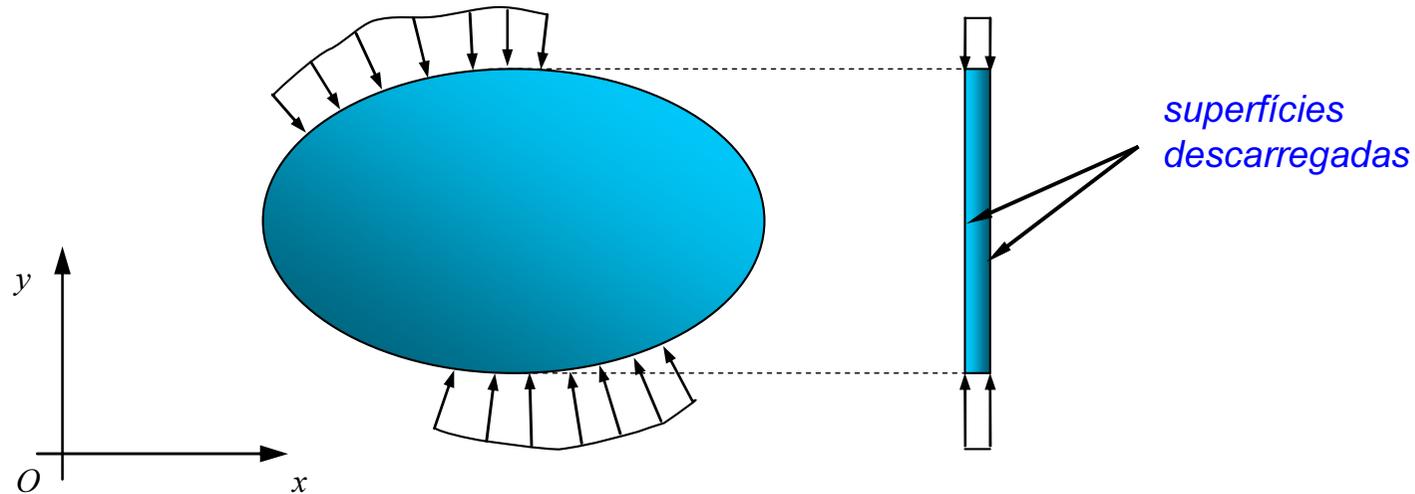
## **2. Problemas de Estado Plano de Tensão (EPT)**

Dizemos que um sólido está em estado plano de tensão (EPT) quando as seguintes condições são preenchidas:

- Geometria: a geometria da estrutura é a de uma chapa fina ( $t \ll L$ ), cujo plano de meia espessura é paralelo a um dos planos coordenados (como o plano  $Oxy$ );
- Carregamento: o carregamento consiste em forças aplicadas sobre o contorno, paralelas ao plano da chapa, e distribuídas uniformemente ao longo da espessura.



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*



Para os pontos da superfície lateral (superfícies descarregadas) temos:

$$\forall t \in [t_o, t_f], \forall P \in \partial\beta \Rightarrow T(P) \cdot \vec{n} = \vec{s}(P, t) = \vec{0}$$

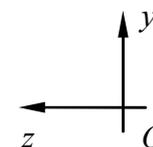


**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Assim:

Para a face de normal  $\vec{n} = (0,0,1)_b = \vec{e}_z$ :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \tau_{zx} = 0 \\ \tau_{zy} = 0 \\ \sigma_z = 0 \end{cases}$$



E, para a face de normal  $\vec{n} = (0,0,-1)_b = -\vec{e}_z$ :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \tau_{zx} = 0 \\ \tau_{zy} = 0 \\ \sigma_z = 0 \end{cases}$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Desta forma, as componentes de tensão  $\sigma_z$ ,  $\tau_{zx}$  e  $\tau_{zy}$  são nulas em ambas as faces da chapa e pode-se admitir, a princípio, que são nulas também no interior da mesma (em virtude da pequena espessura da chapa e da continuidade das tensões ao longo da espessura, uma vez fixadas as coordenadas  $x$  e  $y$ ).

O estado de tensão é então especificado apenas pelas tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$ , sendo, portanto, denominado estado plano de tensões. Pode também ser admitido, como aproximação, que estas três componentes de tensão são independentes da coordenada  $z$  (ou seja, elas não variam ao longo da espessura). Assim, podemos escrever:

$$\sigma_x \cong \sigma_x(x, y) \quad \sigma_y \cong \sigma_y(x, y) \quad \tau_{xy} \cong \tau_{xy}(x, y)$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

No caso de problemas de EPT, as equações diferenciais de equilíbrio ficam simplificadas na forma:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}} + b_x = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}} + b_y = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\cancel{\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}} + \cancel{b_z} = \mu \cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}}$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Se forem desprezadas as forças de inércia, ficaremos com:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + b_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + b_y = 0$$

Mesmo com estas simplificações, verifica-se que o problema é estaticamente indeterminado, sendo necessária uma terceira equação para que seja possível determinarmos as três componentes de tensão. Esta 3ª equação adicional é a 1ª equação de compatibilidade de deformações dada por:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2}$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Se o material for elástico-linear e isótropo, é possível mostrar que esta equação de compatibilidade de deformações, expressa em função das tensões, fica dada por:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \nu) \left( \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} \right)$$

Se as forças distribuídas no volume forem apenas as de origem gravitacional, teremos (considerando que  $b_x = 0$ , e  $b_y = \mu g$ ):

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Nesse caso, o campo de tensões deve satisfazer as equações:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\mu g$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

...além, é claro, das condições de contorno e condições iniciais.



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*

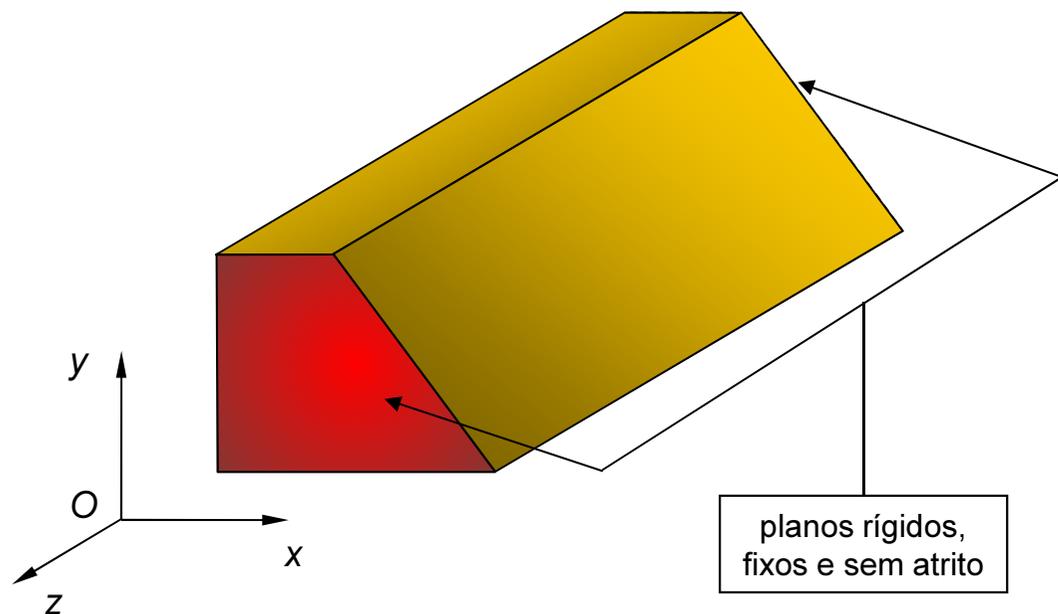
### **3. Problemas de Estado Plano de Deformação (EPD)**

Dizemos que um sólido está em estado plano de deformação (EPD) quando as seguintes condições são preenchidas:

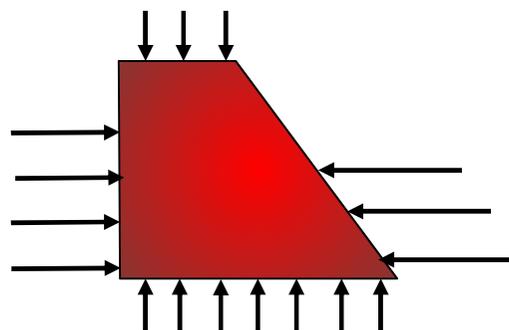
- Geometria: aplicável a estruturas prismáticas (prisma reto), sem variação na seção transversal, e que possuem a dimensão na direção longitudinal (comprimento) muito maior que as dimensões da própria seção transversal;
- Carregamento: o sólido deve ser solicitado por forças perpendiculares aos elementos longitudinais e que não variam ao longo desta direção;
- Condições de contorno nas extremidades: admite-se a existência de planos rígidos, fixos e sem atrito, que impedem os deslocamentos de todos os pontos destas extremidades na direção longitudinal (direção  $z$ ).



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*



Carregamento deve ser uniforme e autoequilibrado:





**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Decorre das hipóteses admitidas que:

- i. Não há deslocamentos axiais nas extremidades, nem, por simetria, na seção do meio (o mesmo valendo, portanto, para todas as demais seções transversais);
- ii. Todas as seções se comportam da mesma forma e, portanto, as componentes de deslocamento  $u$  e  $v$  são independentes da coordenada  $z$ .

Ou seja:  $\forall t \in [t_o, t_f], \forall P \in \beta \Rightarrow \begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \\ w = 0 \end{cases}$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Logo, as componentes de deformação ficam:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x(x, y) & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy}(x, y) \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y(x, y) & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0\end{aligned}$$

E, da lei de Hooke, segue que:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + 2G\varepsilon_x & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + 2G\varepsilon_y & \tau_{yz} &= 0 \\ \sigma_z &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) & \tau_{zx} &= 0\end{aligned}$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Assim, no caso de problemas de EPD, as equações diferenciais de equilíbrio ficam simplificadas na forma:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + b_x = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + b_y = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Se forem desprezadas as forças de inércia, ficaremos com:



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + b_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + b_y = 0$$

Como nos casos de EPT, os problemas de EPD são também estaticamente indeterminados, sendo necessária a equação de compatibilidade de deformações para que seja possível resolver o problema:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Se o material for elástico-linear e isótropo, é possível mostrar que esta equação de compatibilidade de deformações, expressa em função das tensões, fica dada por:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{1-\nu} \left( \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} \right)$$

Porém, se as forças distribuídas no volume forem apenas as de origem gravitacional, teremos (considerando que  $b_x = 0$  e  $b_y = \mu g$ ):

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Nesse caso, o campo de tensões deve satisfazer as equações:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\mu g$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

...além das condições de contorno e condições iniciais do problema.



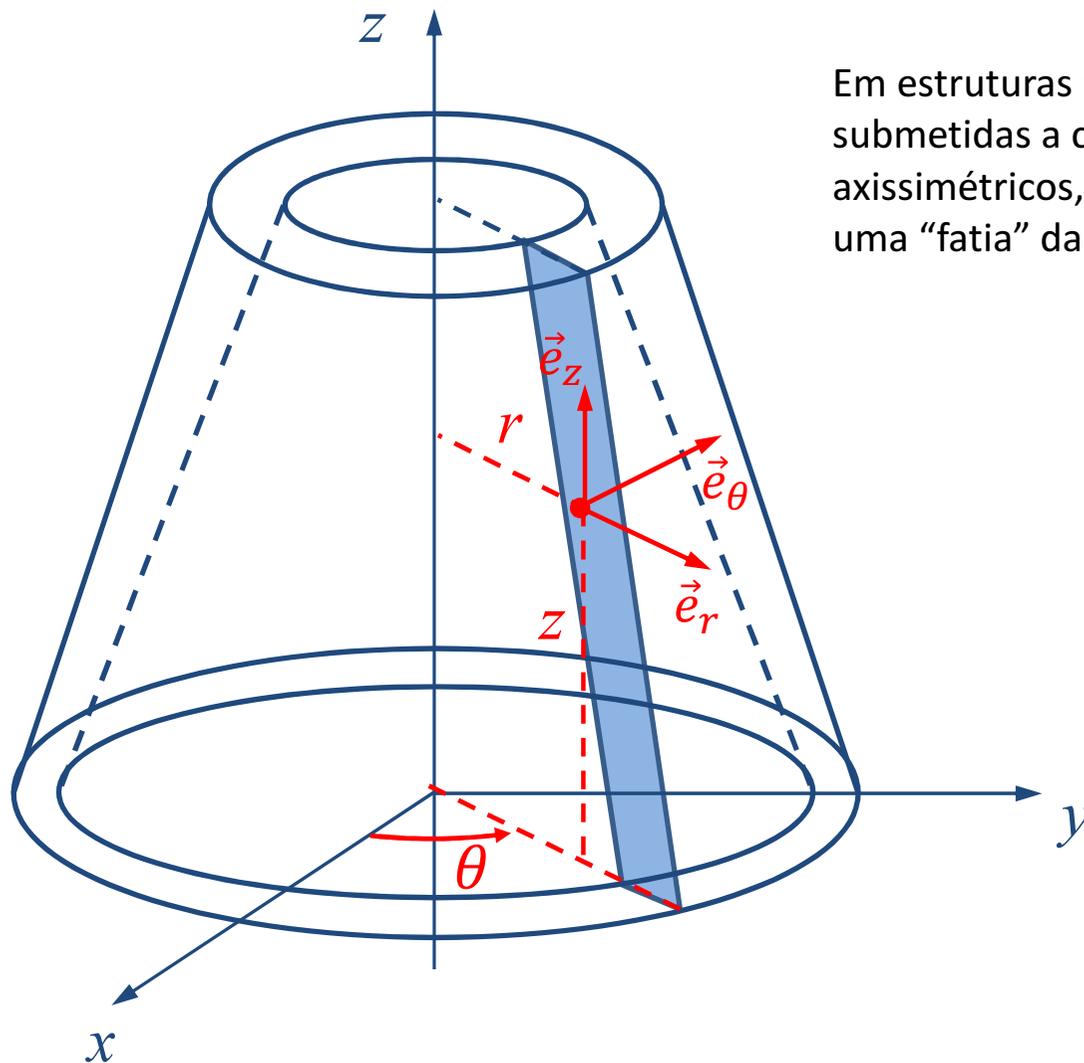
## **4. Problemas de Estado de Tensão Axissimétrico (ETA)**

Dizemos que um sólido está em um estado de tensão axissimétrico (ETA) quando as seguintes condições são preenchidas:

- Geometria: o sólido possui um eixo de axissimetria, de tal forma que a estrutura pode ser construída pela revolução de uma seção plana (qualquer) em torno desse eixo;
- Carregamento: também deve ser axissimétrico;
- Condições de contorno e condições iniciais: igualmente axissimétricas.



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**



Em estruturas axissimétricas submetidas a carregamentos axissimétricos, basta analisar uma “fatia” da estrutura.



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Nas condições de ETA:  $u_r = u_r(r, z, t)$ ,  $u_\theta = 0$ ,  $u_z = u_z(r, z, t)$

Logo, as relações deformações-deslocamentos em coordenadas cilíndricas ficam:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \quad \Rightarrow \quad \gamma_{r\theta} = 0 \quad (\tau_{r\theta} = 0)$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \quad \Rightarrow \quad \gamma_{\theta z} = 0 \quad (\tau_{\theta z} = 0)$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Com estas simplificações, as equações diferenciais de equilíbrio em coordenadas cilíndricas ficam dadas por:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \cancel{\frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta}} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + b_r = \mu \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}$$

$$\cancel{\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r}} + \cancel{\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta}} + \cancel{\frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z}} + \cancel{\frac{2\tau_{r\theta}}{r}} + \cancel{b_\theta} = \mu \cancel{\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}}$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \cancel{\frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta}} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + b_z = \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Ou seja, as condições de equilíbrio na direção circunferencial ficam automaticamente satisfeitas, bastando impor o equilíbrio nas direções radial e axial que ficam:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + b_r = \mu \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + b_z = \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

Utilizando a Lei de Hooke generalizada e as relações deformações-deslocamentos apresentadas no slide #27, podemos obter um sistema de duas EDP's nas incógnitas  $u_r = u_r(r, z, t)$  e  $u_z = u_z(r, z, t)$ .



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*

## 5. Função de Tensão de Airy

Vimos que tanto para problemas de EPT quanto para problemas de EPD as equações resultantes obtidas são da forma:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\mu g$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Consideremos uma função  $\phi = \phi(x, y)$  tal que:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \mu g y \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \mu g y \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

Substituindo  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$ , como definidos acima, nas eqs. diferenciais de equilíbrio e na equação de compatibilidade de deformações indicadas no slide anterior, obtemos:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\mu g \Leftrightarrow -\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} - \mu g = -\mu g \Leftrightarrow 0 = 0$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \Leftrightarrow \nabla^2 (\nabla^2 \phi - 2\mu g y) = 0 \Leftrightarrow \nabla^4 \phi(x, y) = 0$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Assim, se encontrarmos uma função  $\phi = \phi(x, y)$  que seja biarmônica (ou seja, que atenda à condição):

$$\nabla^4 \phi(x, y) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0$$

...então a solução de um problema 2D da Teoria da Elasticidade (em condições de EPT ou de EPD) é encontrado, desde que as condições de contorno sejam também atendidas.

Este método de solução foi proposto por Sir George Biddell Airy em 1862 e utilizado para resolver diversos problemas bidimensionais da Mecânica dos Sólidos, tendo sido utilizado, por exemplo, por H.M. Westergaard para determinar o campo de tensões e deformações nas vizinhanças da ponta de uma trinca, o que contribuiu em grande escala para o desenvolvimento da Mecânica da Fratura.

Ref.: [https://en.wikipedia.org/wiki/George\\_Biddell\\_Airy](https://en.wikipedia.org/wiki/George_Biddell_Airy)



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

***Referências:***

- [1] Timoshenko, S.P., Goodier, J.N., Theory of Elasticity, McGraw-Hill, 1970.