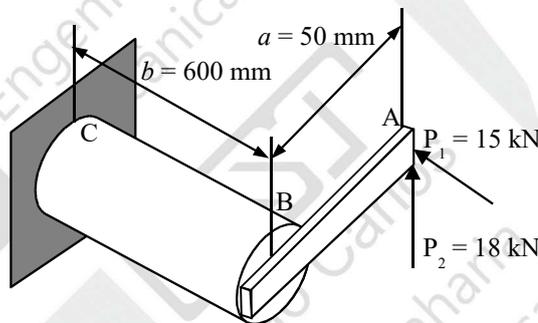


## Lista 5

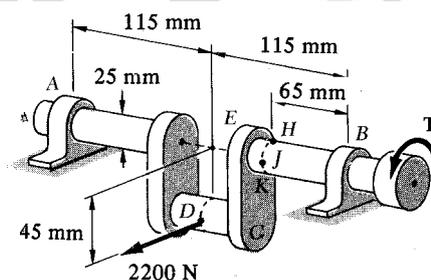
### Prédimensionamento de eixos

#### 5.1 Exercícios propostos

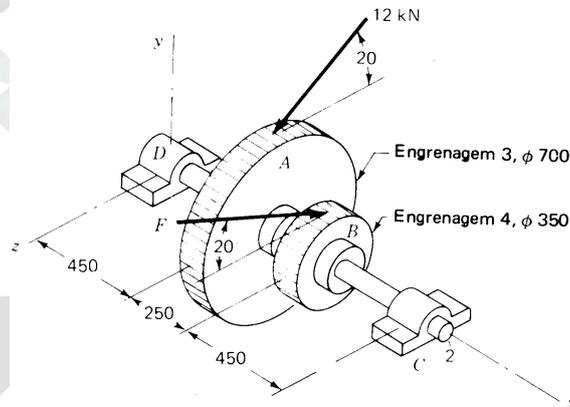
- 1) Comente as possíveis formas construtivas de um eixo.
- 2) Descreva os materiais usados e o processo de fabricação de eixos.
- 3) Cite, comentando, 4 das causas principais de ruptura de eixos.
- 4) [1, pág.300] Duas forças constantes  $P_1$  e  $P_2$ , de intensidades  $P_1 = 15$  [kN] e  $P_2 = 18$  [kN], são aplicadas na extremidade A da barra AB. Essa barra, por sua vez, é soldada à peça cilíndrica BC. Sabe-se que a distância de A ao eixo do cilindro BC é  $a = 50$  [mm] e que o comprimento total do cilindro BC é  $b = 600$  [mm]. Determine o diâmetro da peça cilíndrica sabendo-se que a mesma é feita de aço ABNT 1050. Adote os dados que julgar necessários.



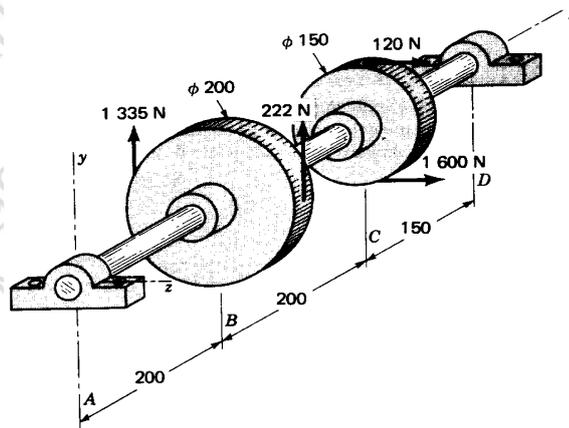
- 5) [2, pág. 79] Uma força horizontal constante de 2200 [N] está aplicada no ponto D do girabrequim AB. Este por sua vez é equilibrado estaticamente por um momento de torção T e pelas reações de apoio em A e B. Os suportes não exercem nenhum momento sobre o eixo. Determine a tensão normal e a tensão de cisalhamento nos pontos H, J, K e L, que se situam nas extremidades dos diâmetros, vertical e horizontal, da secção a 65 [mm] do apoio B. Se o aço usado for ABNT 8620, o girabrequim suportará a carga do ponto de vista estático na secção examinada?



6) [2, pág. 79] A figura abaixo mostra um eixo no qual estão montadas duas engrenagens cilíndricas de dentes retos com ângulo de pressão de  $20^\circ$ . Deve-se usar um eixo retificado de diâmetro uniforme, feito de aço ABNT 1030 temperado e revenido. Faça o pré-dimensionamento do eixo. Dimensões da figura em [mm]



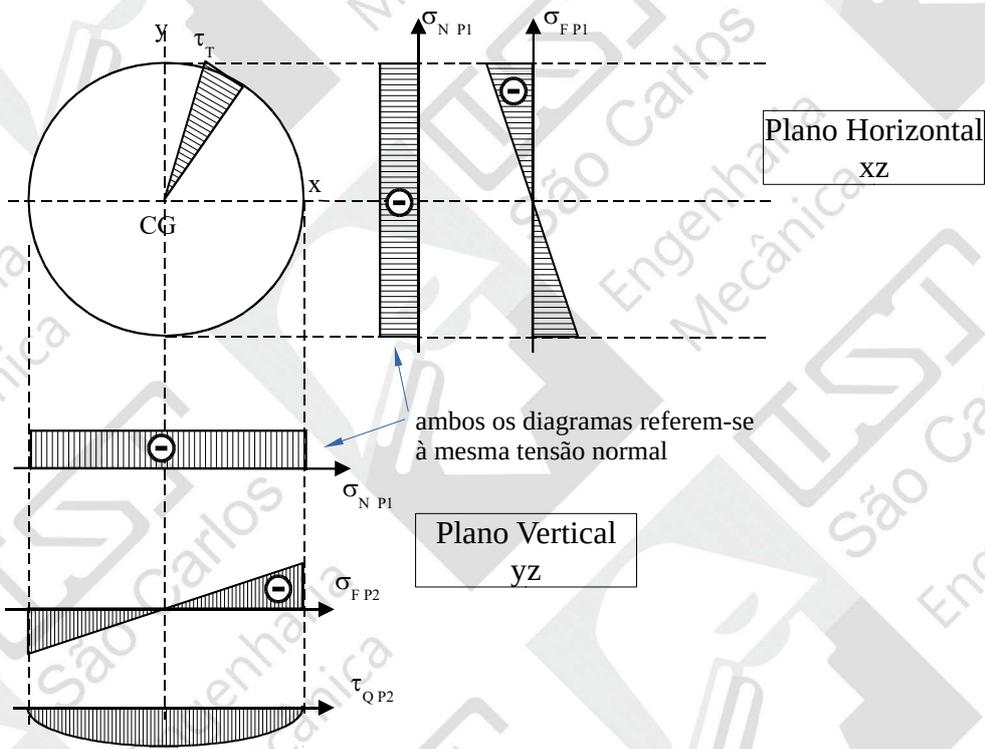
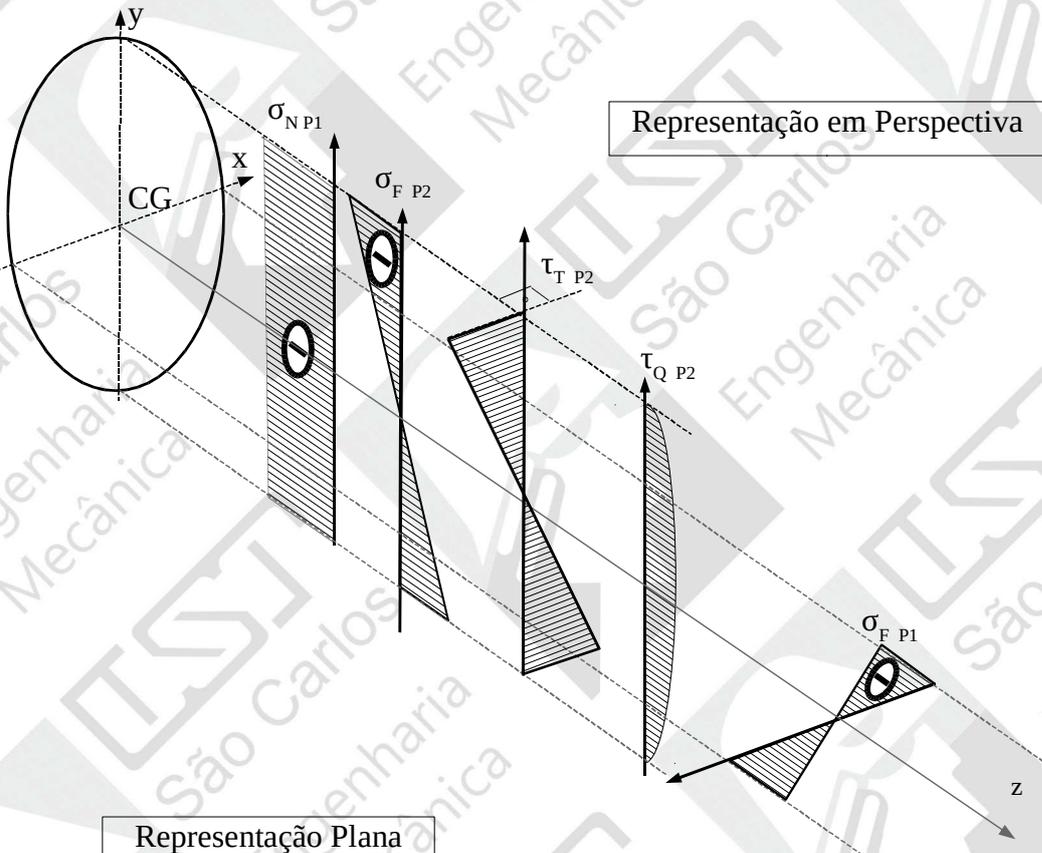
7) [2, pág. 80] A figura abaixo mostra um eixo montado em mancais em A e D, tendo as polias B e C. As forças que atuam nas polias devem-se às correias. Calcule o momento de torção aplicado ao eixo através de cada polia. Faça o pré-dimensionamento usando uma tensão de escoamento de 500 [MPa] (admita material dúctil). Dimensões da figura em [mm].



## 5.2 Exercícios resolvidos

### Exercício 4)

A secção mais crítica é aquela próxima ao engastamento (C). Os diagramas de tensões nesta secção são mostrados abaixo:



### a) Cálculo das tensões atuantes

Neste ponto da resolução do exercício é possível analisar e escrever as fórmulas das tensões atuantes, porém não é ainda possível determinar seus valores porque não se dispõe do valor do diâmetro.

#### Tensões isoladas

$$\sigma_{NP1} = -\frac{P_1}{S} = -\frac{15000[N]}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}}$$

$$\sigma_{FP1} = \frac{-P_1 \cdot a \cdot x}{J} = \frac{-15000[N] \times 0,05[m] \cdot x}{\frac{\pi d^4}{64}}$$

$$\sigma_{FP2} = -\frac{P_2 \cdot b \cdot y}{J} = \frac{-18000[N] \times 0,6[m] \cdot y}{\frac{\pi \cdot d^4}{64}}$$

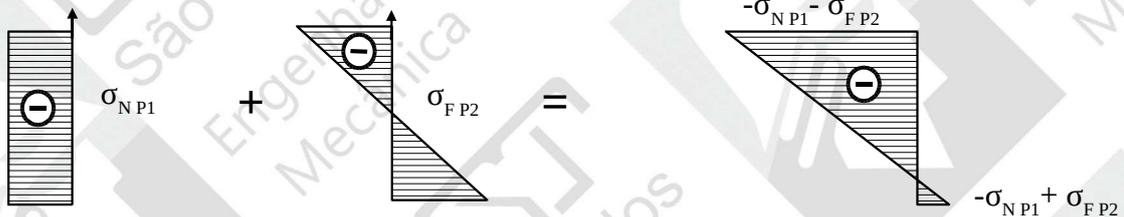
$$\tau_{QP2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{P_2}{S} \left[ 1 - \left( \frac{2 \cdot y}{d} \right)^2 \right] = \frac{4}{3} \times \frac{18000[N]}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} \times \left[ 1 - \left( \frac{2 \cdot y}{d} \right)^2 \right]$$

$$\tau_{TP2} = \frac{P_2 \cdot a \cdot r}{J_t} = \frac{18000[N] \times 0,050[m] \times \sqrt{x^2 + y^2}}{\frac{\pi \cdot d^4}{32}}$$

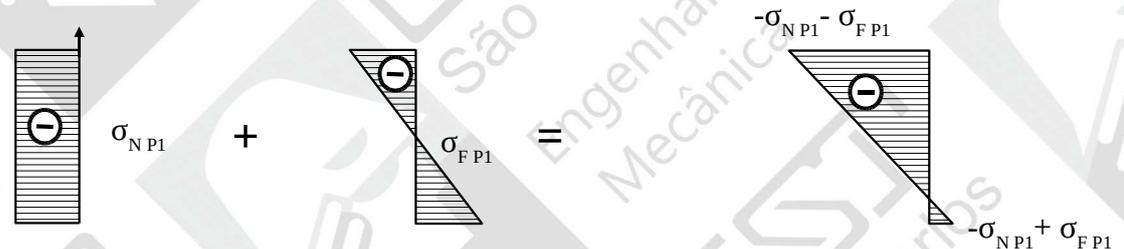
#### Tensões compostas

##### Tensões Normais

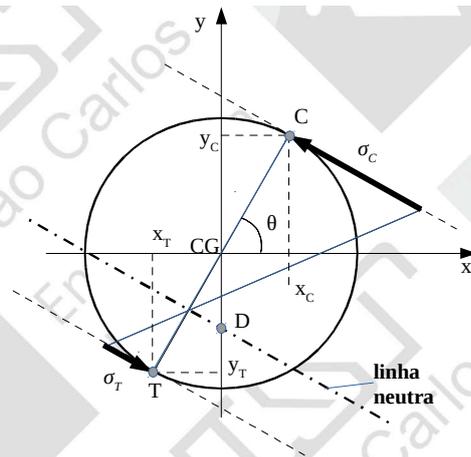
Plano Vertical



Plano Horizontal



A compressão máxima ocorre no primeiro quadrante numa direção que forma com o eixo  $x$  o ângulo  $\theta = \arctg\left(\frac{M_{\hat{y}}}{M_{\hat{x}}}\right) = \arctg\left(\frac{P_1 \cdot a}{P_2 \cdot b}\right)$ . A tração máxima se dá a  $180^\circ$  desta posição.



O valor da tensão normal composta é dado por:

$$\sigma = \frac{P_z}{S} + \frac{M_{fx} \cdot y}{J_x} + \frac{M_{fy} \cdot x}{J_y} = \frac{P_1}{S} + \frac{M_{FP2} \cdot y}{J} + \frac{M_{FP1} \cdot x}{J}$$

e o momento resultante é calculado usando-se:

$$M_R = \sqrt{M_{FV}^2 + M_{FH}^2} = \sqrt{M_{FP2}^2 + M_{FP1}^2} = \sqrt{(P_2 \cdot b)^2 + (P_1 \cdot a)^2} = \\ = \sqrt{(18000 \times 0,6)^2 + (15000 \times 0,05)^2} = 10826,010 [N \cdot m]$$

Assim, as tensões extremas (tração e compressão) serão:

$$\sigma_{tração} = -\frac{P_1}{S} + \frac{M_R}{W_f} \quad e \quad \sigma_{compressão} = -\frac{P_1}{S} - \frac{M_R}{W_f}$$

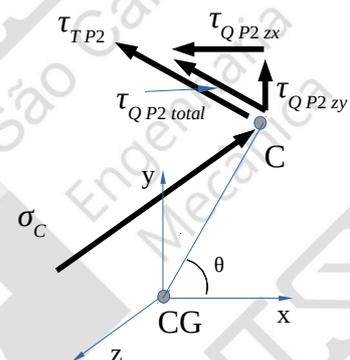
A tensão de compressão é a maior em módulo, como se vê nas figuras acima.

### Tensões Tangenciais

São devidas ao momento de torção  $\tau_{TP2}$  e à força cortante  $\tau_{QP2}$ . A tensão tangencial resultante é uma composição (soma vetorial) das tensões tangenciais acima. Ela varia de ponto a ponto dentro da secção transversal e, também, varia ao longo do eixo z. Note-se que a flexão no plano xz é uma flexão pura (sem esforço cortante) e portanto não é acompanhada da tensão cizalhante. Isto aconteceria se houvesse força na direção x.

No presente exercício, a secção mais crítica é aquela próxima ao engastamento ( $z = 0$ ). Dentro dela o ponto mais crítico à flexão é o ponto C (a tensão crítica à flexotorção se dá em um ponto muito próximo de C e, por simplicidade, tomam-se os dois pontos coincidentes). A tensão  $\tau_{QP2}$  anteriormente calculada atua na direção de  $P_2$  (direção y) e na figura abaixo é denotada como  $\tau_{QP2 zy}$ . Na superfície da peça cilíndrica BC só existiria tensão tangencial na direção z caso fosse aplicada uma carga nesse ponto e nesta direção. Em não existindo esta carga, consequentemente, não existirá a tensão tangencial na direção radial no ponto C.

Logo a tensão tangencial devida a  $P_2$  será na direção tangente ao cilindro ( $\tau_{QP2 total}$ ) sendo a outra componente de  $\tau_{QP2 total}$  a tensão  $\tau_{QP2 zx}$ .



O ângulo  $\theta$  pode ser calculado por  $\theta = \arctg\left(\frac{M_{fy}}{M_{fx}}\right) = \arctg\left(\frac{P_1 \cdot a}{P_2 \cdot b}\right) = 3,98[^\circ]$ . A tensão tangencial de interesse é dada por:  $\tau_{QP2total} = \frac{\tau_{QP2zy}}{\cos(\theta)}$

Então, a tensão tangencial resultante será:  $\tau_R = \tau_{TP2} + \tau_{QP2total}$

A Tensão Equivalente pelo critério de von Mises finalmente será dada por:

$$\sigma^* = \sqrt{\sigma_C^2 + 3 \cdot \tau_R^2}$$

### b) Cálculo da Tensão Admissível

A tensão estática admissível é dada por:

$$\sigma_{adm} = \frac{TP}{a \cdot b \cdot c \cdot d}$$

Material ABNT 1050 → material frágil	→ $TP = \sigma_r = 770$ [MPa]
$a = (1,6 \text{ a } 2,0)$	→ $a = 2,0$
$b =$ carga constante	→ $b = 1,0$
$c =$ carga aplicada gradualmente	→ $c = 1,0$
$d =$ material frágil	→ $d = 2,0$

Então a tensão estática admissível será:

$$\sigma_{adm} = \frac{770[\text{MPa}]}{2,0 \times 1,0 \times 1,0 \times 2,0} = 192,500[\text{MPa}]$$

### c) Dimensionamento

No dimensionamento deve-se ter  $\sigma^* \leq \sigma_{adm}$ . Caso se façam as devidas substituições nas fórmulas mostradas anteriormente, tem-se como resultado uma equação complexa em que não é possível isolar-se a variável  $d$  (diâmetro). A determinação das coordenadas  $(x, y)$  onde ocorre a máxima tensão equivalente também recai neste mesmo caso. Então é mais fácil se adotar um valor para o diâmetro e depois verificar se o mesmo é adequado. Existem técnicas para a adoção de um valor inicial para o diâmetro as quais serão vistas na próxima lista de exercícios.

Adotando-se, sem maiores justificativas no momento,  $d = 80$  [mm] = 0,08 [m], tem-se:

$$S = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 5,026 \times 10^{-3} [\text{m}^2]$$

$$W_f = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = 5,026 \times 10^{-5} [\text{m}^3]$$

$$W_t = \frac{\pi \cdot d^3}{16} = 1,005 \times 10^{-4} [\text{m}^3]$$

e agora é possível determinar as tensões atuantes substituindo-se estes valores nas equações já obtidas. A situação mais crítica, como já comentado, acontece no ponto C da secção transversal em  $z = 0$ . É possível mostrar-se que no ponto C vale  $\sigma_{FP1} + \sigma_{FP2} = \frac{M_R}{W}$ , em que o momento resultante  $M_R$  é dado por:

$$M_R = \sqrt{M_{fh}^2 + M_{fv}^2} = \sqrt{(P_2 \cdot b)^2 + (P_1 \cdot a)^2} = \\ = \sqrt{(18000[N] \times 0,6[m])^2 + (15000[N] \times 0,05[m])^2} = 10826,010[N \cdot m]$$

A máxima tensão normal atuante neste ponto será:

$$\sigma_{compress\tilde{a}o} = -\frac{P_1}{S} - \frac{M_R}{W_f} = -\frac{15000[N]}{5,026 \times 10^{-3}[m^2]} - \frac{10826,010[N \cdot m]}{5,026 \times 10^{-5}[m^3]} = -218,360[MPa]$$

As componentes das tensões tangenciais na coordenada do ponto C:

$$y_C = r \cdot \text{sen}(\theta) = \frac{80[mm]}{2} \times \text{sen}(3,98[^\circ]) = 2,776[mm]$$

são dadas por:

$$\tau_{QP2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{P_2}{S} \left[ 1 - \left( \frac{2 \cdot y}{d} \right)^2 \right] = \frac{4}{3} \times \frac{18000[N]}{5,026 \times 10^{-3}[m^2]} \times \left[ 1 - \left( \frac{2 \times 0,002776[m]}{0,080[m]} \right)^2 \right] = 4,752[MPa]$$

$$\tau_{QP2total} = \frac{\tau_{QP2zy}}{\cos(\theta)} = \frac{4,752[MPa]}{\cos(3,98[^\circ])} = 4,764[MPa]$$

$$\tau_{TP2} = \frac{P_2 \cdot a \cdot r}{J_t} = \frac{P_2 \cdot a}{W_t} = \frac{18000[N] \times 0,050[m]}{5,026 \times 10^{-5}[m^3]} = 8,952[MPa]$$

$$\tau_R = \tau_{TP2} + \tau_{QP2total} = 4,764[MPa] + 8,952[MPa] = 13,716[MPa]$$

Finalmente se tem:

$$\sigma^* = \sqrt{(-218,360[MPa])^2 + 3 \times (13,716[MPa])^2} = 219,648[MPa] > \sigma_{adm} = 192,500[MPa]$$

Portanto a peça não resiste e seu diâmetro deve ser modificado. Para se estimar o novo diâmetro usa-se o fato de que a tensão é inversamente proporcional ao módulo de resistência à flexão  $W_f$ , o qual depende de  $d^3$ .

$$\frac{d_{novo}^3}{d_{velho}^3} = \frac{\sigma^*}{\sigma_{adm}} \Rightarrow d_{novo} = 80[mm] \times \sqrt[3]{\frac{219,648[MPa]}{192,500[MPa]}} = 83,597[mm]$$

Usando-se  $d = 84 [mm]$  tem-se:

$$S = 5,542 \times 10^{-3}[m^2]$$

$$W_f = 5,819 \times 10^{-5}[m^3]$$

$$W_t = 1,164 \times 10^{-4}[m^3]$$

Calculando-se novamente com o novo valor do diâmetro:

$$\sigma_{compress\tilde{a}o} = -\frac{P_1}{S} - \frac{M_R}{W_f} = -\frac{15000[N]}{5,542 \times 10^{-3}[m^2]} - \frac{10826,010[N \cdot m]}{5,819 \times 10^{-5}[m^3]} = -188,757[MPa]$$

$$y_C = r \cdot \text{sen}(\theta) = \frac{84[mm]}{2} \times \text{sen}(3,98[^\circ]) = 2,915[mm]$$

$$\tau_{QP2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{P_2}{S} \left[ 1 - \left( \frac{2 \cdot y}{d} \right)^2 \right] = \frac{4}{3} \times \frac{18000[N]}{5,542 \times 10^{-3}[m^2]} \times \left[ 1 - \left( \frac{2 \times 0,002915[m]}{0,084[m]} \right)^2 \right] = 4,309[MPa]$$

$$\tau_{QP2total} = \frac{\tau_{QP2zy}}{\cos(\theta)} = \frac{4,309[MPa]}{\cos(3,98[^\circ])} = 4,319[MPa]$$

$$\tau_{TP2} = \frac{P_2 \cdot a}{W_t} = \frac{18000[N] \times 0,050[m]}{1,164 \times 10^{-4}[m^3]} = 7,732[MPa]$$

$$\tau_R = \tau_{TP2} + \tau_{QP2total} = 4,319[MPa] + 7,732[MPa] = 12,051[MPa]$$

Resultando finalmente:

$$\sigma^* = \sqrt{(-188,757[MPa])^2 + 3 \times (12,051[MPa])^2} = 189,908[MPa]$$

$$\sigma^* = 189,908[MPa] < 192,500[MPa] = \sigma_{adm}$$

com CS = 1,01.