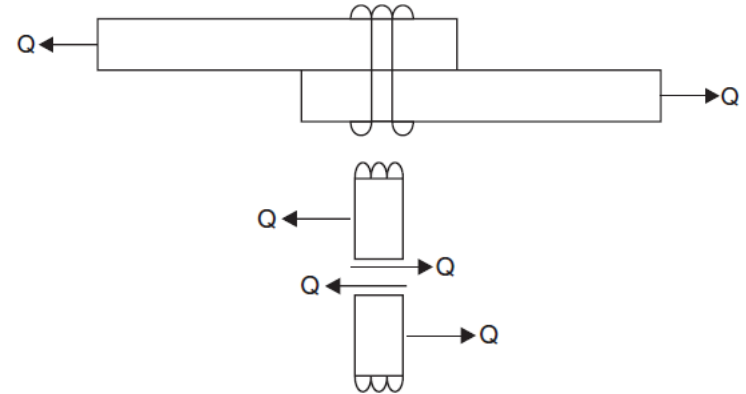


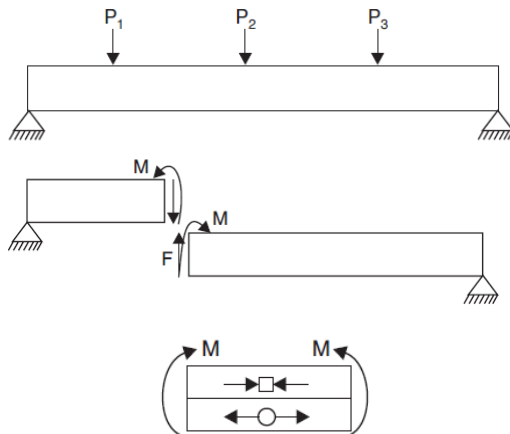
## Carregamentos - Resumo



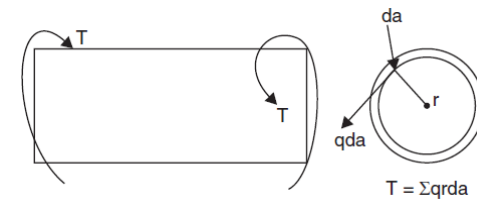
**Tração/compressão**



**Cisalhamento**



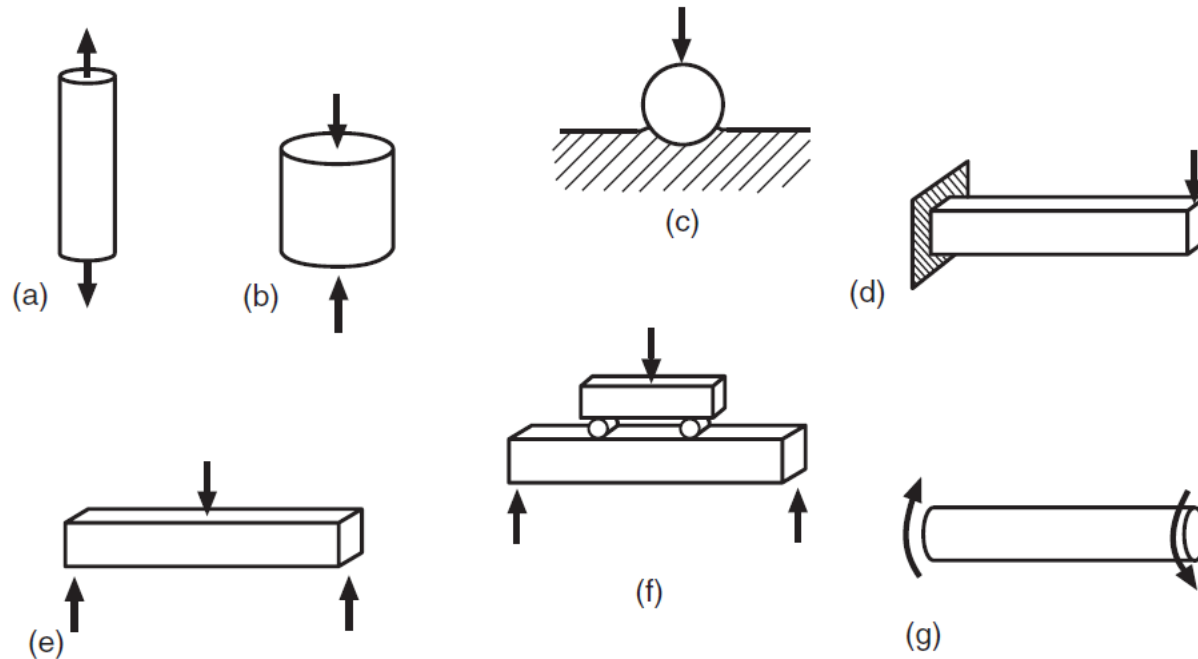
**Flexão**



$$T = \Sigma q r d a$$

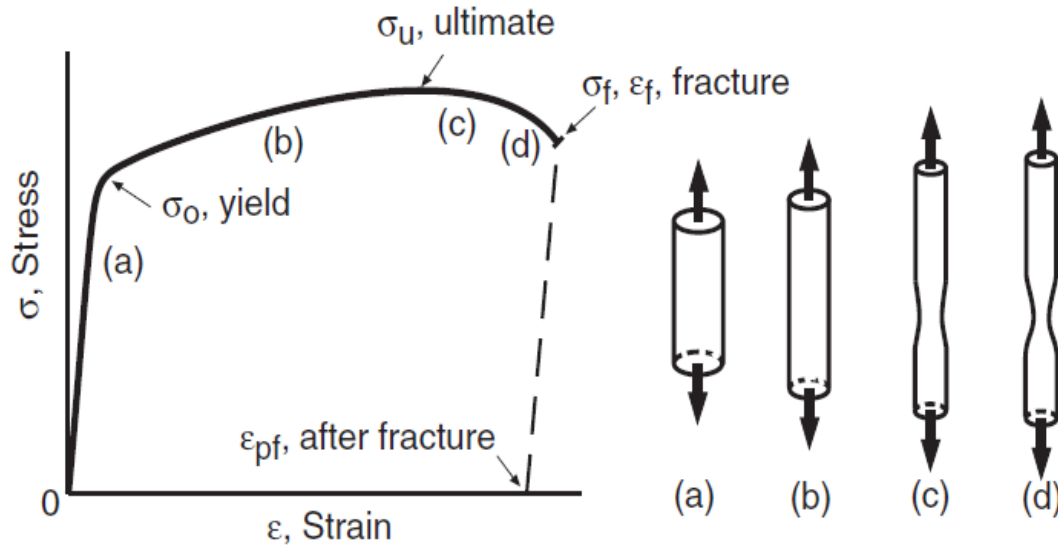
**Torção**

## Carregamentos – Ensaio

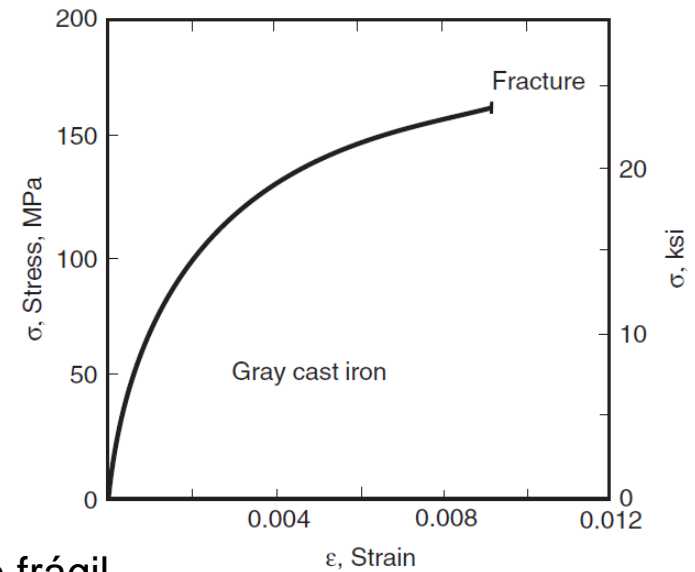


**Ensaio mais comuns:** a) tração; b) compressão; c) dureza; d) flexão em viga engastada; e) flexão 3 pontos; f) flexão 4 pontos; g) Torção

## Carregamentos – Ensaio



Comportamento dúctil

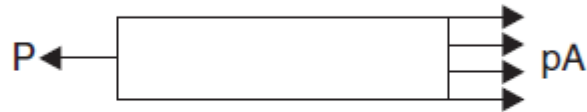


Comportamento frágil

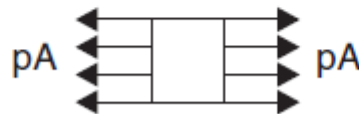
### 3.3 - Tensão normal



(a)

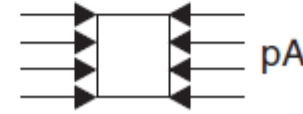


(b)



(c)

Tração



Compressão

Estado uniaxial de tensão

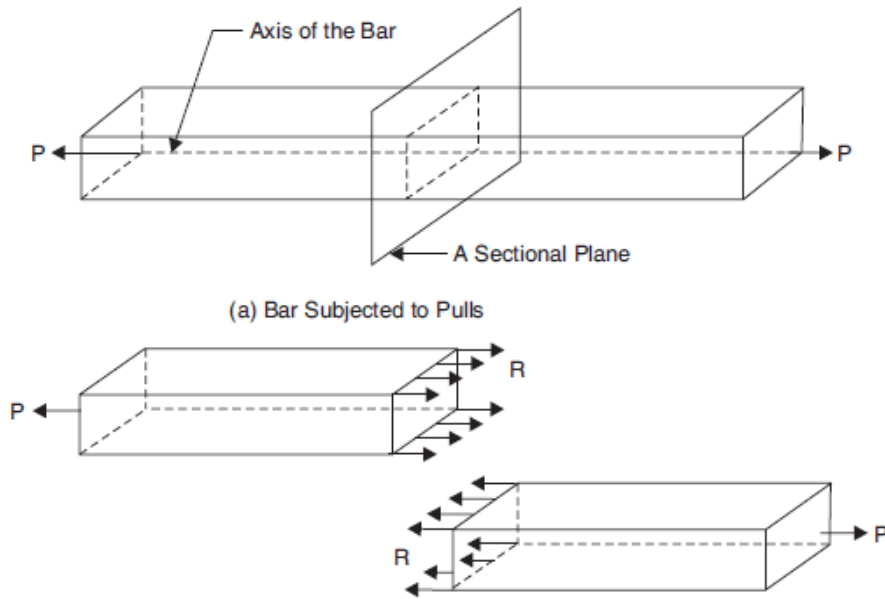
$$\sigma = \frac{P}{A}$$

[ N/m<sup>2</sup> ]

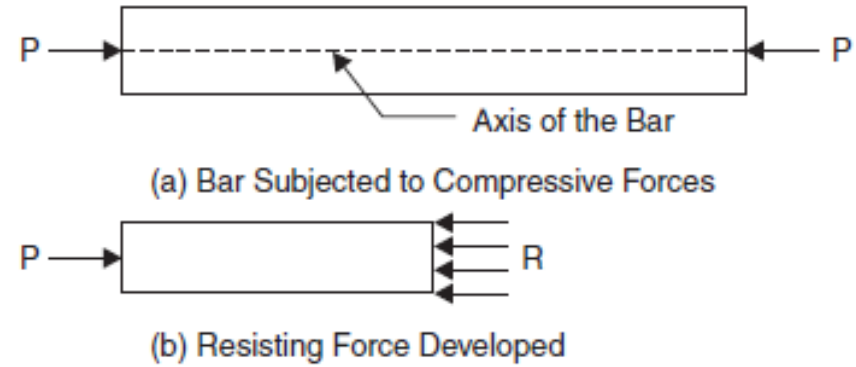
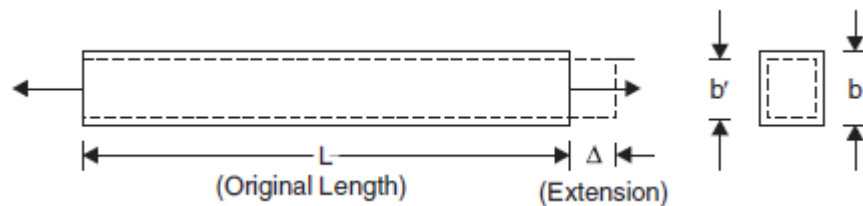
[ N/mm<sup>2</sup> ]

[ Pa ]

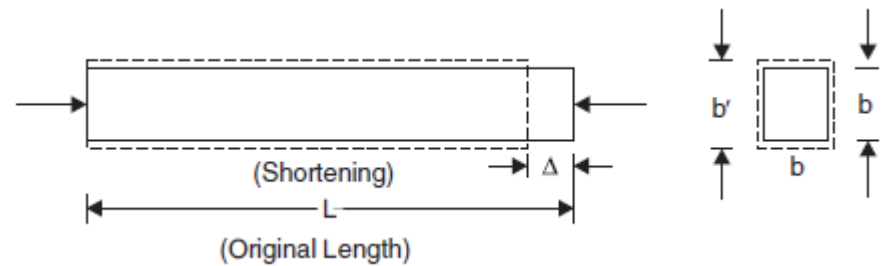
[ MPa ]



Tração



Compressão

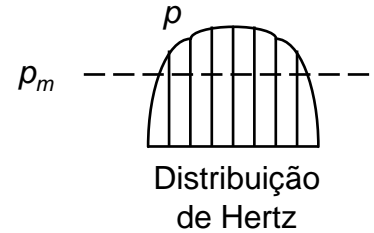
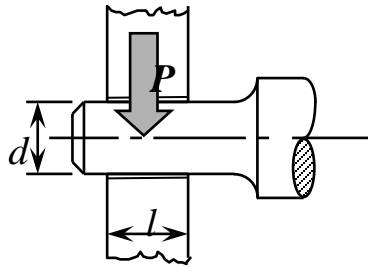


## Sistema de unidades:

- Cuidado!
- Dê preferência ao S.I. (MKS)
- Pode-se usar unidades de maior sensibilidade para engenharia (Kgf/mm<sup>2</sup>).

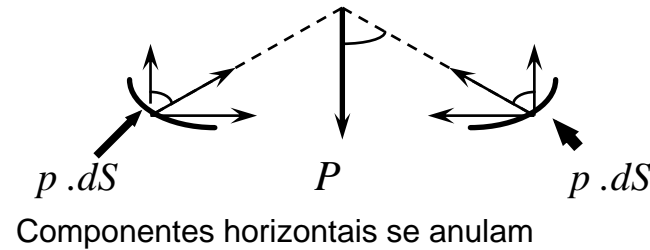
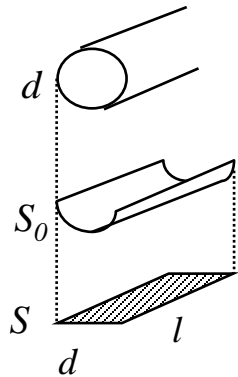
Grandeza	Nome	[mm]	[cm]	[m]
$\sigma$	Tensão	1 [Kgf/mm <sup>2</sup> ]	100 [Kgf/cm <sup>2</sup> ]	10 [MPa] 1[N/mm <sup>2</sup> ] = 1 [MPa]
$E_{aço}$	Módulo de elasticidade	$2.10 \times 10^4$ [Kgf/mm <sup>2</sup> ]	$2.10 \times 10^6$ [Kgf/cm <sup>2</sup> ]	$2.10 \times 10^5$ [MPa]
$G_{aço}$	Módulo de elasticidade transversal	$0.81 \times 10^4$ [Kgf/mm <sup>2</sup> ]	$0.81 \times 10^6$ [Kgf/cm <sup>2</sup> ]	$0.81 \times 10^5$ [MPa]
$\nu$	Coefficiente de Poisson	0.3	0.3	0.3
$\rho_{aço}$	Densidade	$7.85 \times 10^{-3}$ [g/mm <sup>3</sup> ]	7.85 [g/cm <sup>3</sup> ]	$7.85 \times 10^3$ [Kg/m <sup>3</sup> ]
$g$	Aceleração da gravidade	9810 [mm/s <sup>2</sup> ]	981 [cm/s <sup>2</sup> ]	9.81 [m/s <sup>2</sup> ]
$M_t$	Momento de torção	1[kgf.mm]	0,1 [kgf.cm]	0,01 [N.m]

### 3.4 - Tensão normal de contato entre 2 superfícies (pressão específica)



$$p_m = \frac{P}{S}$$

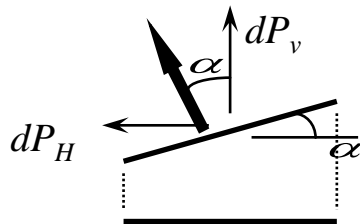
$$S = d \cdot l$$



$$dP_v = (p \cdot dS) \cdot \cos \alpha$$

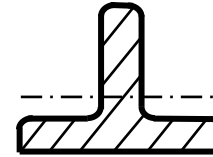
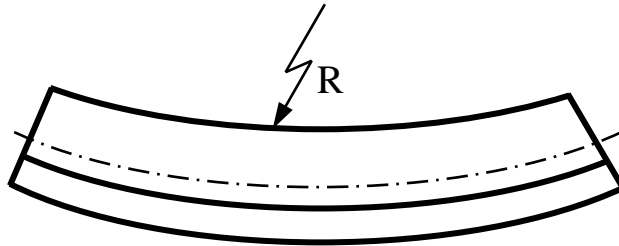
$$dP_v = p \cdot (dS \cdot \cos \alpha)$$

$$P = \int_{S_0} p \cdot \cos \alpha \cdot dS = p_m \cdot \int_S dS = p_m \cdot S$$



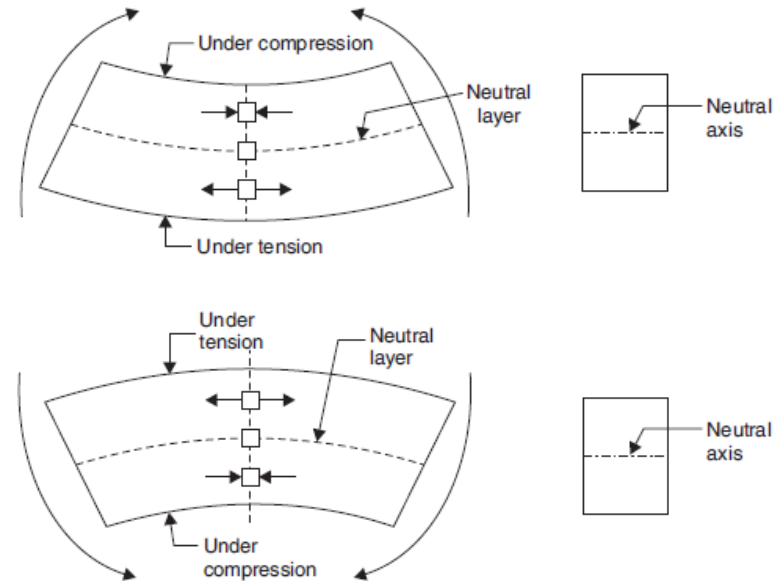
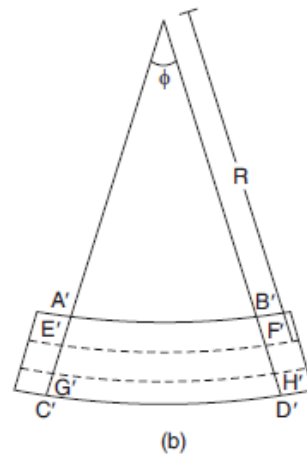
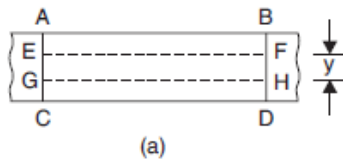
$$dS \cdot \cos \alpha = \text{área projetada}$$

### 3.5 - Tensão normal oriunda de momento fletor



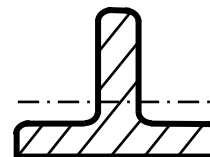
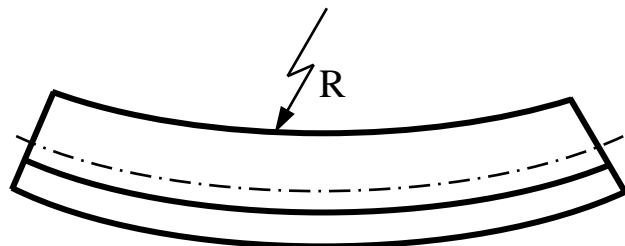
HIPÓTESES:

- Flexão pura (só Momento fletor)
- Secções planas permanecem planas após flexão
- Raio de curvatura  $R$  para cada ponto



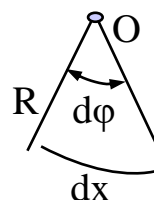
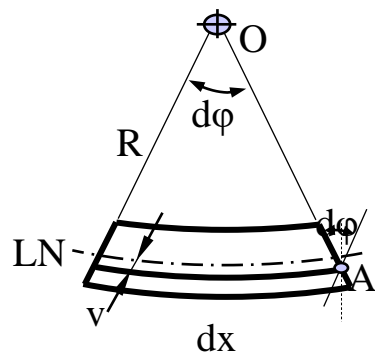
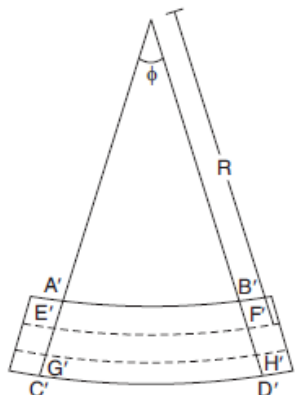


### 3.5 - Tensão normal oriunda de momento fletor



HIPÓTESES:

- Flexão pura (só Momento fletor)
- Secções planas permanecem planas após flexão
- Raio de curvatura  $R$  para cada ponto



Arco = raio x ângulo

$$S = R \cdot \theta$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{v \cdot d\phi}{dx}$$

$$dx = R \cdot d\phi$$

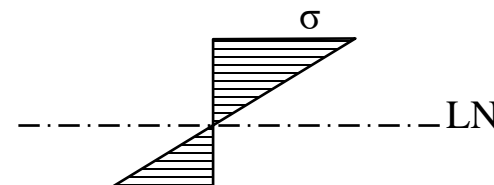
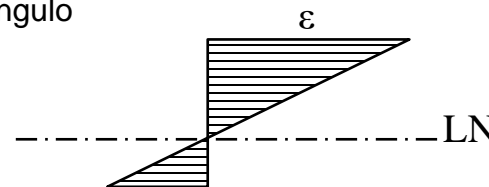
$$\varepsilon = \frac{v}{R} \frac{d\phi}{d\phi}$$

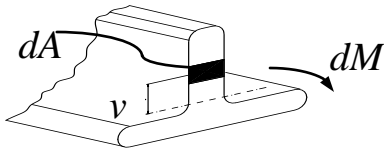
$$\Rightarrow \text{mas } \varepsilon = \frac{1}{R} v \Rightarrow$$

$$\varepsilon \propto v$$

Lei de Hooke

$$\sigma = E \varepsilon \Rightarrow \sigma = \frac{1}{R} E \cdot v$$





• Num elemento de área

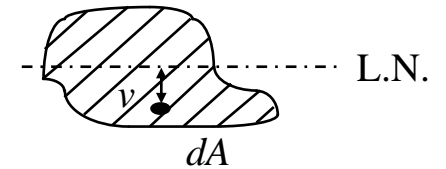
$$\Rightarrow dF = \sigma \cdot dA$$

• Não há força normal na secção devida à flexão

$$\Rightarrow F = \int_s \sigma \cdot dA = 0$$

$$\int \frac{E \cdot v}{R} \cdot dA = 0 \Rightarrow \int_s v \cdot dA = 0$$

$\Rightarrow$  LN passa pelo CG na flexão simples

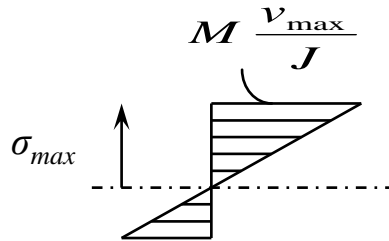


$$dF = \sigma \cdot dA \quad \text{e} \quad dM = dF \cdot v = v \cdot \sigma \cdot dA$$

$$M = \int_s v \cdot \sigma \cdot dA = \int_s v \cdot \frac{E \cdot v}{R} \cdot dA = \frac{E}{R} \cdot \underbrace{\int_s v^2 \cdot dA}_I$$

Segundo momento de área ou momento de inércia de área

$$\sigma = \frac{1}{R} E \cdot v \Rightarrow \frac{E}{R} = \frac{\sigma}{v} \Rightarrow M = \sigma \cdot \frac{J}{v} \Rightarrow \boxed{\sigma = M \cdot \frac{v}{J}}$$

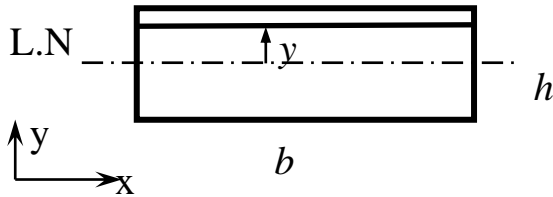


$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{max} = \frac{M}{W_f}} \quad \text{com} \quad W_f = \frac{J}{v_{max}}$$

$W_f$  = Módulo de resistência à flexão

## Determinação de $J (I)$ – momento de inércia de secções

a) Secções simples



$$J_x = \int_s y^2 \cdot dS = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b \cdot y^2 \cdot dy = b \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$$

$$J_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

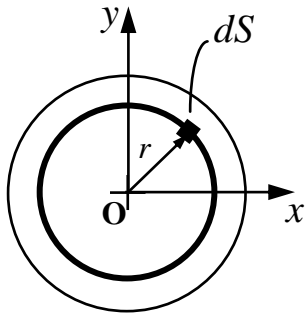
$$J_y = \frac{b^3 \cdot h}{12}$$

Secções simples



Tabelas de  $J$ 's

b) Momento de Inércia de Torção (Polar) :  $J_T$  ou  $J_z$



$$J_p = \int_s r^2 ds \quad \text{mas} \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{quando} \quad O \equiv CG$$

$$J_p = \int_s r^2 ds = \int x^2 \cdot ds + \int y^2 \cdot ds \quad \Rightarrow \quad J_p = J_y + J_x$$

No caso do círculo :

$$J_p = \int_s r^2 \cdot ds \quad \text{com} \quad ds = 2\pi \cdot r \cdot dr$$

$$J_p = 2\pi \cdot \int_s r^2 \cdot r \cdot dr = 2\pi \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^{\frac{d}{2}} \Rightarrow J_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$$

Como

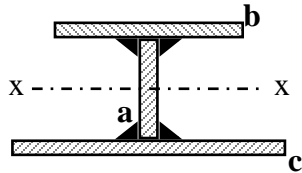
$$J_p = J_x + J_y$$

$$\text{e} \quad J_x = J_y$$

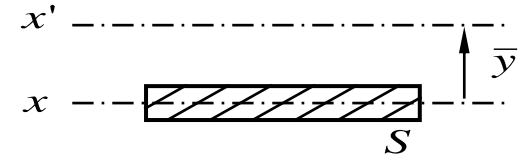
$$\Rightarrow J_{\text{círculo}} = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$$

c) Seções compostas

c<sub>1</sub>) Teorema dos eixos paralelos ou de Steiner



$$J_{x'} = J_x + \bar{y}^2 \cdot dS$$



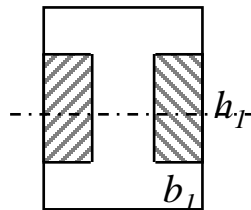
No exemplo acima:

$$J_{x-x} = b_a \cdot h_a^3 \cdot \frac{1}{12} + b_b \cdot h_b^3 \cdot \frac{1}{12} + (h_a + h_b)^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot b_b \cdot h_b + b_c \cdot h_c^3 \cdot \frac{1}{12} + (h_a + h_c)^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot b_c \cdot h_c$$

c<sub>2</sub>) Soma de J's

$$J_x = \int_S y^2 \cdot dS \quad \text{e} \quad \int_{S_1 \pm S_2} f(x) \cdot dx = \int_{S_1} f(x) \cdot dx + \int_{S_2} f(x) \cdot dx$$

$$J = \sum J_i \quad \text{Referidos ao mesmo eixo !}$$



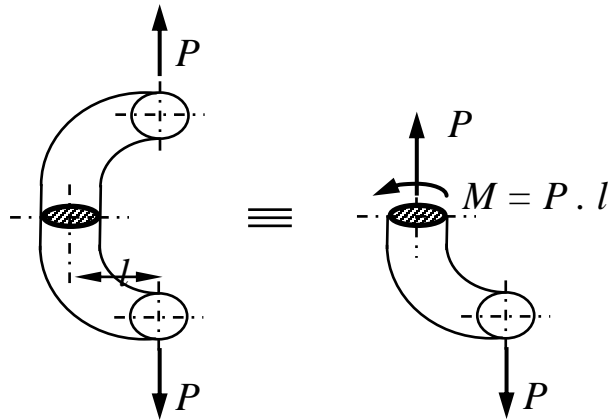
$$J_{\text{perfil I}} = J_{\text{total}} - 2 \cdot \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12}$$



$$J_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot J_o$$

$$J_{\Delta} = \frac{\pi d^4}{128}$$

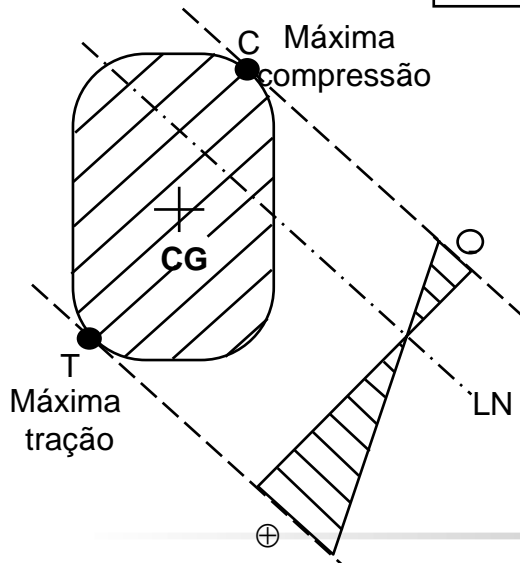
### 3.6 - Tensão normal resultante de força normal e momento fletor



**Princípio da superposição:**

- Efeito de carregamento complexo é a soma de efeitos de carregamentos simples.
- Válido para pequenas deformações em regime elástico

$$\sigma = \frac{P_x}{S} + \frac{M_{fx}}{J_x} \cdot y + \frac{M_{fy}}{J_y} \cdot x$$

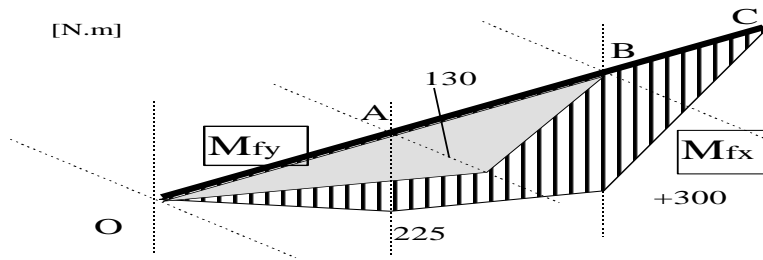


Impondo  $\sigma = 0$  :

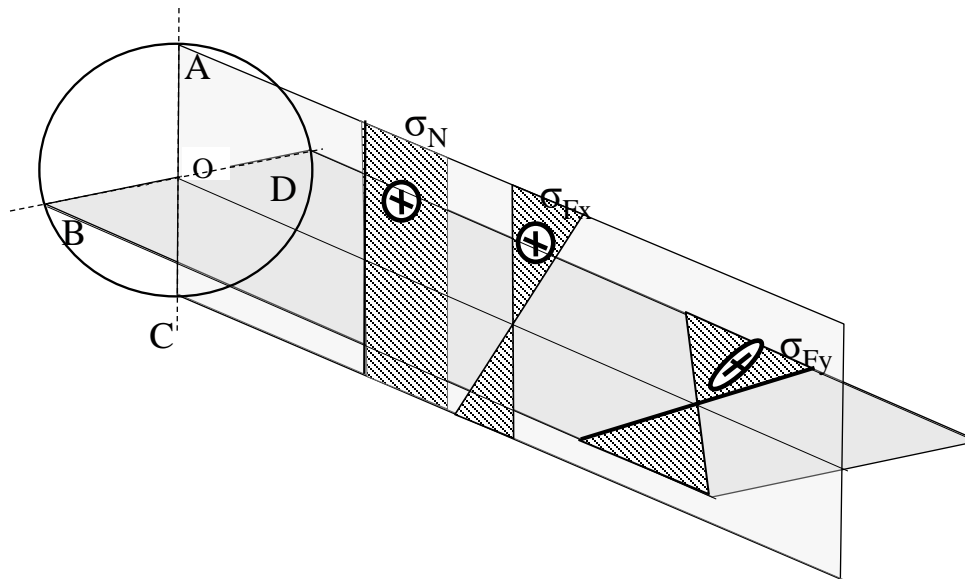
$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0 \quad (\text{Equação da LN})$$

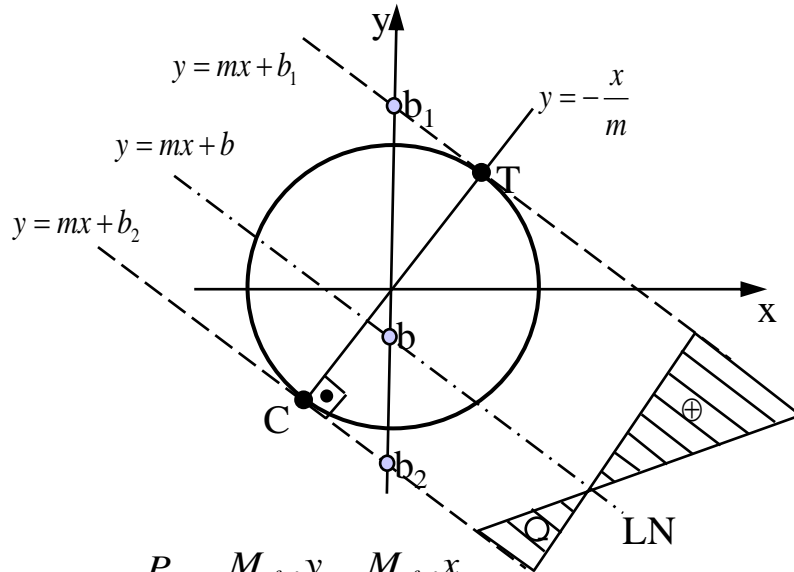
LN não passa pelo CG !

$$\sigma_{\text{max-tração}} = \sigma_T = \frac{P_z}{S} + \frac{M_{fx}}{J_x} \cdot y_T + \frac{M_{fy}}{J_y} \cdot x_T$$



notar que os momentos  $M_{fx}$  e  $M_{fy}$  (como na figura acima) e as tensões normais devidas a eles estão em planos diferentes, normais entre si (como na figura abaixo). As tensões normais entretanto tem a mesma direção e portanto podem ser somadas.





$$\sigma = \frac{P_Z}{S} + \frac{M_{fx} \cdot y}{J_X} + \frac{M_{fy} \cdot x}{J_Y}$$

Para  $\sigma = 0 \Rightarrow$  Equação da LN

$$y = -\left(\frac{M_{fy} \cdot J_X}{M_{fx} \cdot J_Y}\right) \cdot x - \frac{P_Z}{S} \cdot \frac{J_X}{M_{fx}}$$

$$y = m \cdot x + b \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{M_{fy}}{M_{fx}} \\ b = -\frac{P_Z \cdot J}{S \cdot M_{fx}} \end{cases}$$

Pontos de tração e compressão máximas:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{m} \cdot x \\ y^2 + x^2 = r^2 \end{cases} \Rightarrow \left(-\frac{1}{m} \cdot x\right)^2 + x^2 = r^2$$

$$x^2 = \frac{r^2}{1 + \frac{1}{m^2}} \quad y^2 = \frac{r^2}{1 + m^2}$$

$$x^2 = \frac{1}{1 + \left(-\frac{M_{fy}}{M_{fx}}\right)^2} \cdot r^2 = \frac{M_{fy}^2}{M_{fy}^2 + M_{fx}^2} \cdot r^2 \quad x_{T,C} = \pm \frac{M_{fy} \cdot r}{\sqrt{M_{fy}^2 + M_{fx}^2}}$$

$$y^2 = \frac{1}{1 + \left(-\frac{M_{fx}}{M_{fy}}\right)^2} \cdot r^2 = \frac{M_{fx}^2}{M_{fx}^2 + M_{fy}^2} \cdot r^2 \quad y_{T,C} = \pm \frac{M_{fx} \cdot r}{\sqrt{M_{fx}^2 + M_{fy}^2}}$$

$$M_R = \sqrt{M_{fx}^2 + M_{fy}^2} \quad \rightarrow \text{ momento resultante}$$

como  $\sigma = \frac{P_Z}{S} + \frac{1}{J} \cdot (M_{fx} \cdot y + M_{fy} \cdot x)$ , temos:

$$\sigma_T = \frac{P_Z}{S} + \frac{1}{J} \cdot \left( M_{fx} \cdot \frac{M_{fx} \cdot r}{\sqrt{M_{fx}^2 + M_{fy}^2}} + M_{fy} \cdot \frac{M_{fy} \cdot r}{\sqrt{M_{fx}^2 + M_{fy}^2}} \right)$$

$$\sigma_T = \frac{P_Z}{S} + \frac{r}{J} \cdot \left( \frac{M_{fx}^2 + M_{fy}^2}{M_R} \right) = \frac{P_Z}{S} + \frac{r}{J} \cdot \frac{M_R^2}{M_R}$$

$$\sigma_T = \frac{P_Z}{S} + \frac{r}{J} \cdot M_R \quad \text{ou} \quad \sigma_T = \frac{P_Z}{S} + \frac{M_R}{W_f}$$

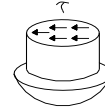
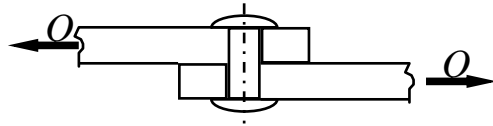
$$W_f = \text{módulo de resistência à flexão} = \frac{J}{r}$$

$$\text{para } \left| \frac{P_Z}{S} \right| > \left| \frac{M_R}{W_f} \right| \Rightarrow \text{ só tração ou só compressão}$$

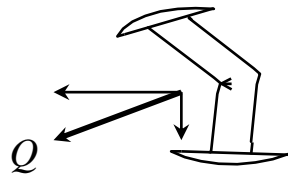


### 3.7- Tensão de cisalhamento

a) Cisalhamento puro (“corte”)



$$\tau_m = \frac{V}{S}$$



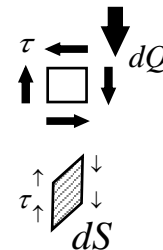
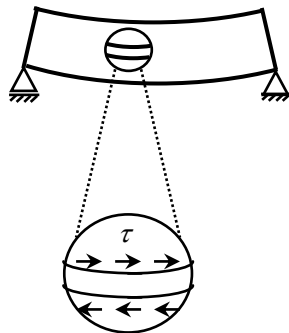
- distribuição de  $\tau$  não é uniforme sobre a seção transversal
- despreza-se flexão e normal

$$\tau_m \leq \tau_{adm} = 0.55 \text{ a } 0.60 \cdot \sigma_{adm} \Rightarrow \text{Fadiga}$$

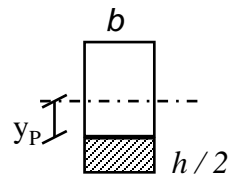
$$\tau_m \leq \tau_{adm} = 0.80 \cdot \sigma_{adm} \Rightarrow \text{Estático}$$

b) Cisalhamento em flexão (efeito Q)

b.1- em uma viga de seção retangular



$$\int_S \tau \cdot dS = dQ$$



$$\tau = \frac{Q \cdot M_S}{b \cdot J}$$

$M_S$  = Momento estático da seção

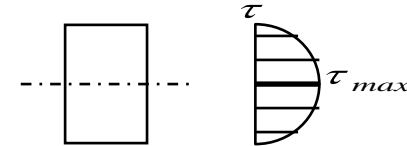
$$M_S = \int_{y_p}^{\frac{h}{2}} y \cdot dS = b \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_y^{\frac{h}{2}}$$

$$M_S = \frac{b}{2} \cdot y^2 \Big|_y^{\frac{h}{2}} = \frac{b \cdot h^2}{8} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{2 \cdot y}{h} \right)^2 \right]$$

\*\* A tensão de cisalhamento devido a cortante será máxima na linha neutra ( $y=0$ ) e nula na fibra externa ( $y=h/2$ ), o inverso do que é observado nas tensões normais devido a flexão, raramente um estado de tensão originará situação de tensão no interior pior que o verificado nas fibras externas.

$$M_S = A - B \cdot y^2$$

- Quadrática em  $y$
- Depende da forma da secção

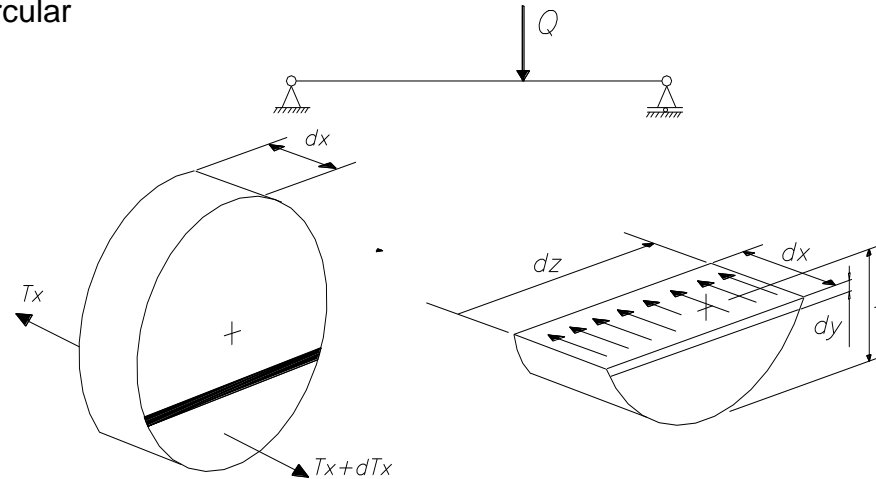


$$\tau_{\text{retang}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b \cdot h} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{2 \cdot y}{h} \right)^2 \right], \quad \tau_{\text{max}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b \cdot h} = \frac{3}{2} \cdot \tau_{\text{med}}$$

Observações:

1.  $\tau$  não é distribuído uniformemente e depende da forma da secção
2. Para  $\frac{l}{h} > 5$ , ( $l =$  vão)  $\tau_{\text{max}}$  é 2% a 5% de  $\sigma_{\text{flexão}}$   
 $\Rightarrow$  desprezível! Se  $\frac{l}{h} < 3$  a teoria apresentada não vale!
3. Em alguns casos somente se preocupa com  $\tau$  na flexão.  
 Ex: colagem, rebites
4. Se a secção não é simétrica em relação a  $P_y$ ,  $Q$  não se aplica no C.G. mas no centro de torção T da secção.

b.2- em um eixo de seção circular



$$\tau \cdot dx \cdot dz = dT_x$$

$$T_x = \int_y^{y_1} \frac{M_x}{J} \cdot y \cdot dS = \frac{M_x}{J} \cdot M_s$$

$$T_{x+dx} = \frac{M_{x+dx}}{J} \cdot M_s$$

$$\therefore dT_x = T_{x+dx} - T_x = \frac{M_{x+dx} - M_x}{J} \cdot M_s$$

como  $dM = Q \cdot dx$  temos:

$$\tau \cdot dx \cdot dz = dT_x = \frac{Q \cdot dx}{J} \cdot M_s$$

$$\tau \cdot dz = \frac{Q}{J} \cdot M_s$$

$$\tau(y) = \frac{Q}{J} \cdot \frac{1}{dz} \cdot M_s$$

$$\tau_{\theta} = \frac{Q}{J} \cdot \frac{1}{dz} \cdot \int_y^r y \cdot dS = \frac{Q}{J} \cdot \frac{1}{dz} \cdot \int_y^r y \cdot dz \cdot dy$$

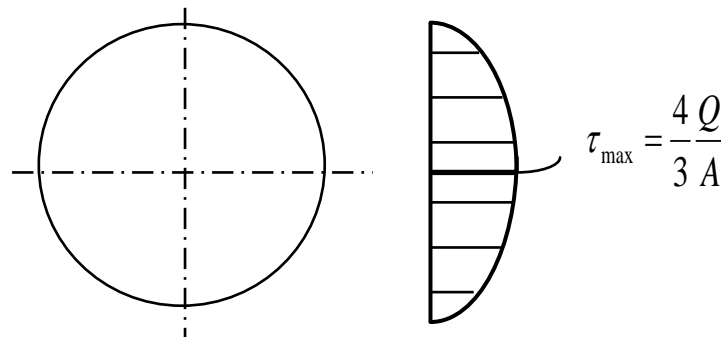
$$\tau_{\theta}(y) = \frac{Q}{J} \cdot \int_y^r y \cdot dr = \frac{Q}{J} \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_y^r = \frac{Q}{J} \left( \frac{r^2}{2} - \frac{y^2}{2} \right)$$

para secção circular:

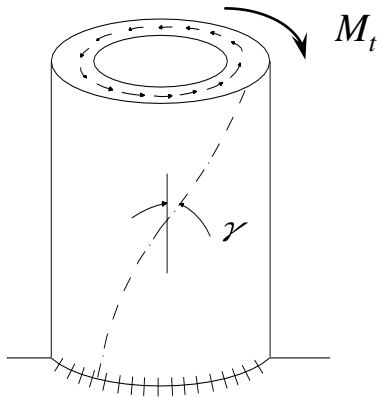
$$J = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot r^4}{2}$$

$$\tau(y) = \frac{Q}{\frac{\pi \cdot r^4}{2}} \cdot \frac{r^2}{2} \left[ 1 - \left( \frac{y}{r} \right)^2 \right] = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi \cdot r^2} \left[ 1 - \left( \frac{y}{r} \right)^2 \right]$$

$$\tau_y = \tau_m \cdot \left[ 1 - \left( \frac{y}{r} \right)^2 \right]$$



### 3.8- Tensão de cisalhamento devido ao Momento Torçor



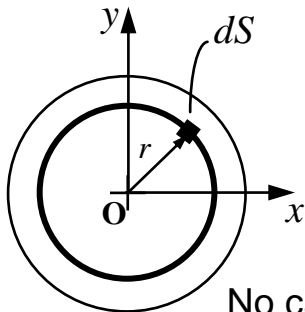
$$\tau = G \cdot \gamma$$

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} \quad ; \quad W_t = \frac{J_t}{y_{\max}}$$

- Distribuição de  $\tau$  não é linear em geral
- empenamento (*warp*) em seções não-circulares

Momento de Inércia de Torção (Polar) :  $J_T$  ou  $J_Z$



$$J_P = \int_s r^2 ds \quad \text{mas} \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{quando} \quad O \equiv \text{CG}$$

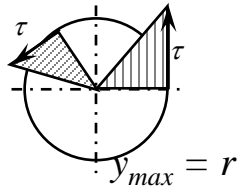
$$J_P = \int r^2 dS = \int x^2 \cdot dS + \int y^2 \cdot dS \quad \Rightarrow \quad \boxed{J_P = J_Y + J_X}$$

No caso do círculo :  $J_P = \int_s r^2 \cdot dS$  com  $dS = 2\pi \cdot r \cdot dr$

Como  $J_P = 2\pi \cdot \int_s r^2 \cdot r \cdot dr = 2\pi \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^{\frac{d}{2}} \Rightarrow \boxed{J_P = \frac{\pi \cdot d^4}{32}}$

$J_P = J_X + J_Y$  e  $J_X = J_Y \Rightarrow \boxed{J_{\text{circulo}} = \frac{\pi \cdot d^4}{64}}$

a) Seções circulares

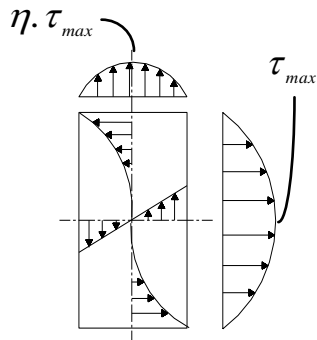


- Distribuição linear

$$J_t = J_p = J_X + J_Y = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \quad , \quad W_t = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$$

$$J_t = \frac{b \cdot h^3}{12} + \frac{h \cdot b^3}{12} \quad y_{\max} = \frac{h}{2} \text{ ou } \frac{b}{2}$$

b) Seções retangulares



- Nas faces: parábolas  $p/h < 3b$   
parábola achatada  $p/h > 3b$

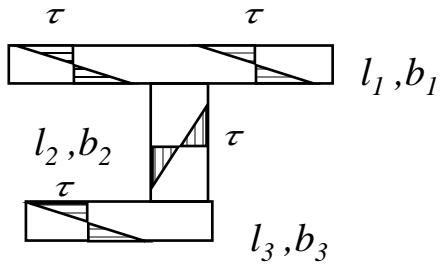
face maior  $\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} \quad , \quad W_t = \eta_2 \cdot b^2 \cdot h$

$$J_t = \eta_3 \cdot b^3 \cdot h$$

face menor  $\tau_{\max \text{ menor}} = \eta_1 \cdot \tau_{\max}$

$\eta_1, \eta_2, \eta_3 \rightarrow$  tabelados (Ex tab. 3.1 Nieman)

c) Seções compostas



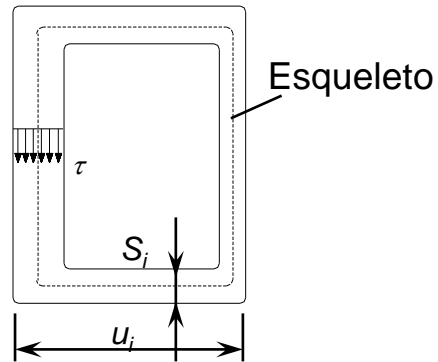
$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{J_t} \cdot b_{\max}$$

$$J_t \cong \frac{1}{3} \cdot (b_1^3 \cdot l_1 + b_2^3 \cdot l_2 + \dots)$$

$$W_t = \frac{J_t}{b_{\max}}$$

d) Tubos de paredes finas

- Distribuição cte ao longo da espessura



$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{2 \cdot S_{\mu} \cdot s_{\min}}$$

$$S_{\mu} = \text{área interna do esqueleto}$$

$$s_{\min} = \text{espessura mínima}$$

$$J_t = \frac{4 \cdot S_{\mu}^2}{\sum \frac{\mu_i}{s_i}}$$

$$; \quad W_t = 2 \cdot S_{\mu} \cdot s_{\min}$$

e) Ângulo de torção

$$\theta = \frac{M_t \cdot l_0}{G \cdot J_t}$$

$\theta$ , ângulo de torção em radianos

$J_t$ , segundo momento polar de área

$G$ , módulo de rigidez

f) Potência

Potência (N) = Quantidade de energia (ou trabalho de uma força) x Unidade de tempo ( $N = M_t \cdot \omega$  ;  $N = F \cdot v$ )

$$M_t = \frac{N (W)}{\omega \left(\frac{rad}{s}\right)}$$

$$1 \text{ HP} = 746,6 \text{ W}$$



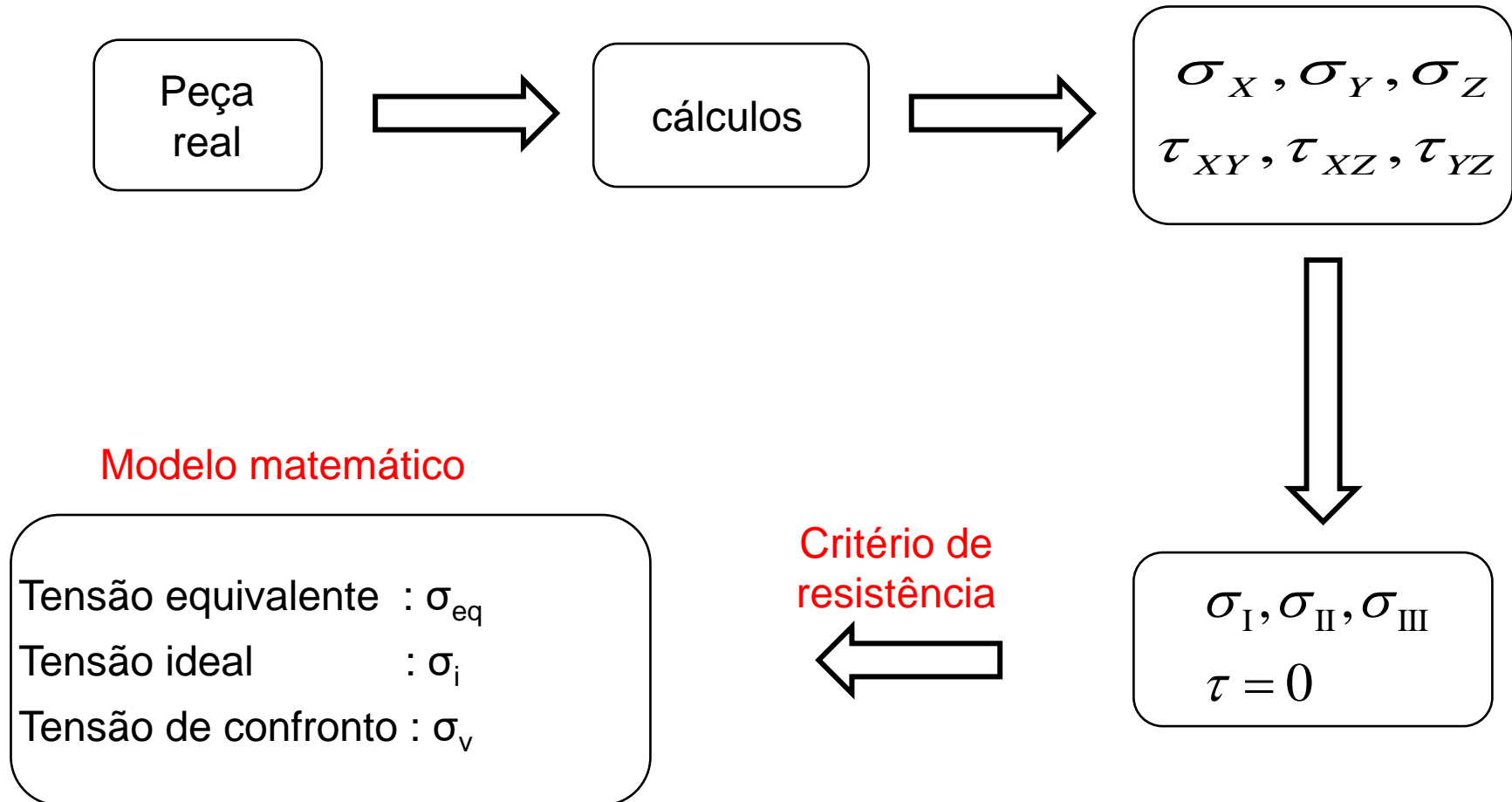
$$1 \text{ rpm} = \frac{2 \cdot \pi \text{ (rad)}}{60 \text{ (s)}}$$

$$M_t = 7162 \cdot \frac{N}{n}$$

$N$  = potência em HP;  
 $M_t$  = momentor torçor em N.m;  
 $n$  = rotação em rpm;

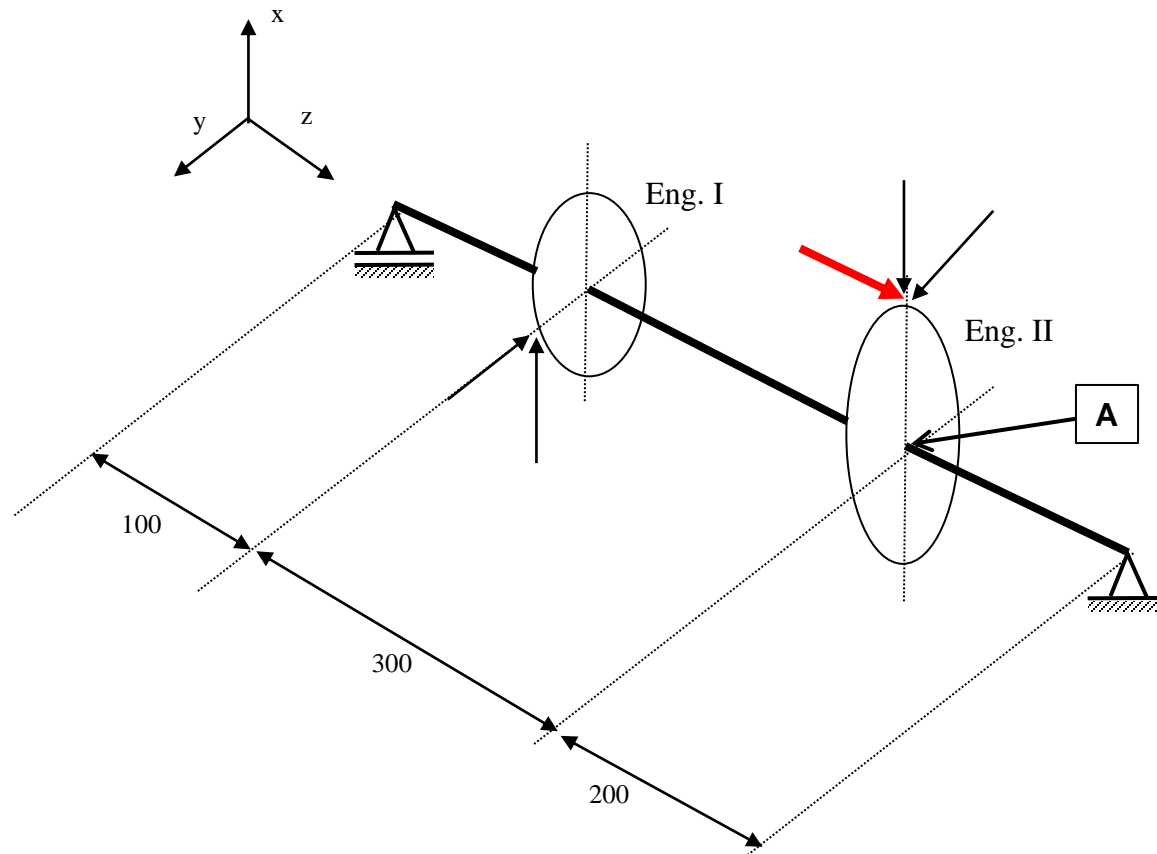


### 3.8 - Tensão equivalente e tensão admissível



**Se  $\sigma_{eq} \leq \sigma_{adm}$  a peça não romperá !**

**Exemplo:** Considere o exemplo anterior, indicado abaixo e cujos diagramas de esforços já foram calculados.



Pede-se:

- a) Traçar os diagramas de esforços solicitantes ( $M$ ,  $N$ ,  $Q$  e  $M_t$ ).
- b) Calcular e traçar os diagramas de distribuição de tensões na seção A do eixo circular da figura, considerando  $d = 60$  mm, na fixação da engrenagem II.
- c) Determinar o ponto mais solicitado na mesma seção, considerando todas tensões atuantes;
- d) Discutir se, dos valores calculados no item anterior, alguns valores são mais representativos. Caso afirmativo, justificar fisicamente o porquê.
- d) Calcular a tensão equivalente (Von Mises) para o ponto determinado no item anterior.