Introdução à Física de Partículas Elementares (Física Moderna IIA)

Aula 05

Equação de Dirac, Antimatéria e Spin

Equação de Dirac

- Em 1927, Dirac propõe uma nova equação que:
  - busca manter a derivada de primeira ordem no tempo, para que a função de onda contenha toda a informação sobre o estado quântico
  - busca manter a simetria entre tempo e espaço, ou seja, a parte espacial também deve apresentar uma derivada de primeira ordem
  - cujas soluções também sejam compatíveis com a equação de Klein-Gordon

Equação de Dirac para uma Partícula Livre

- **Retornamos à expressão relativística da energia:**

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

- **e:** $\hat{p} \leftrightarrow -i\hbar\vec{\nabla}$ **e** $\widehat{E} \leftrightarrow i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}$

- **Porém tomando essa equação de forma linear, ou seja:**

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{r},t)}{\partial t} = -i\hbar c\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\Psi(\vec{r},t) + \beta mc^2\Psi(\vec{r},t)$$

- **e introduzindo $\vec{\alpha}$ e β para tentar "ajustar" essa equação**

Equação de Dirac para uma Partícula Livre

- Logo Dirac notou que essa equação não poderia ser resolvida se não fosse assumido um caráter vetorial a ela, ou seja:

$$\Psi(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} \Psi_1(\vec{r},t) \\ \Psi_2(\vec{r},t) \\ \cdots \\ \Psi_N(\vec{r},t) \end{pmatrix}$$

- e $\overrightarrow{\alpha}$ e β devem ser matrizes $N \times N$, com N a ser definido

Equação de Dirac para uma Partícula Livre

- Impondo a compatibilidade com a equação de Klein-Gordon, chega-se que o menor valor possível para a dimensão desse vetor é $N = 4$ e as matrizes $\overrightarrow{\alpha}$ e β podem ser escritas como:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Conservação da Probabilidade

- Neste caso, podemos novamente ter a probabilidade como

$$P(\vec{r},t)d\vec{r} = \Psi^*(\vec{r},t)\Psi(\vec{r},t)d\vec{r}$$

e com a corrente de probabilidade dada por:

$$j(\vec{r},t) \equiv c\Psi^*(\vec{r},t)\overrightarrow{\alpha}\Psi(\vec{r},t)$$

a Eq. de Dirac também se reduz a:

$$\frac{\partial P}{\partial t}(\vec{r},t) + \nabla \cdot \vec{j}(\vec{r},t) = 0$$

Equação de Dirac para um Elétron em Repouso

- Para interpretarmos fisicamente essa equação, vamos tomar o caso de um elétron em repouso, cuja função de onda deve satisfazer a equação:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{r},t)}{\partial t} = \beta mc^2\Psi(\vec{r},t)$$

- ou seja:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\Psi_1(\vec{r},t)\\ \Psi_2(\vec{r},t)\\ \Psi_3(\vec{r},t)\\ \Psi_4(\vec{r},t)\end{pmatrix} = mc^2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi_1(\vec{r},t)\\ \Psi_2(\vec{r},t)\\ \Psi_3(\vec{r},t)\\ \Psi_4(\vec{r},t)\end{pmatrix}$$

Equação de Dirac para um Elétron em Repouso

- **Que corresponde na verdade a 4 equações:**

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_1(\vec{r},t)}{\partial t} = mc^2\Psi_1(\vec{r},t)$$

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_2(\vec{r},t)}{\partial t} = mc^2\Psi_2(\vec{r},t)$$

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_3(\vec{r},t)}{\partial t} = -mc^2\Psi_3(\vec{r},t)$$

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_4(\vec{r},t)}{\partial t} = -mc^2\Psi_4(\vec{r},t)$$

Equação de Dirac para um Elétron em Repouso

- Portanto, uma possível solução para essa equação diferencial é:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} e^{-(imc^2/\hbar)t} \\ e^{-(imc^2/\hbar)t} \\ e^{+(imc^2/\hbar)t} \\ e^{+(imc^2/\hbar)t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-(iE/\hbar)t} \\ e^{-(iE/\hbar)t} \\ e^{+(iE/\hbar)t} \\ e^{+(iE/\hbar)t} \end{pmatrix}$$

- que corresponde a duas soluções com energia positiva e duas com <u>energia negativa</u>, visto que $E = mc^2$ neste caso

Equação de Dirac Independente do Tempo

- Antes de interpretarmos esse resultado, da mesma forma que fizemos para a Equação de Schroedinger, vamos escrever a Equação de Dirac independente do tempo, ou seja:

$$E\psi(\vec{r}) = -i\hbar c\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\,\psi(\vec{r}) + \beta mc^2\psi(\vec{r})$$

- E para ficar mais parecida com a Eq. de Schroedinger:

$$-i\hbar c\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\,\psi(\vec{r}) + \beta mc^2\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$$

Contração das Matrizes

- **Para facilitar, podemos escrever:**

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

- **onde σ_i são as chamadas matrizes de Pauli**

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- **e o $\mathbb{1}$ na matriz β corresponde à matriz identidade 2×2**

Equação de Dirac para uma dimensão

- Como fizemos para a Equação de Schroedinger, vamos considerar a Equação de Dirac para apenas uma dimensão (escolhemos o eixo z):

$$-i\hbar c\alpha_3\frac{\partial\psi(z)}{\partial z}+\beta mc^2\psi(z)=E\psi(z)$$

Equação de Dirac para uma dimensão

- Com isso, a função de onda pode ser escrita como:

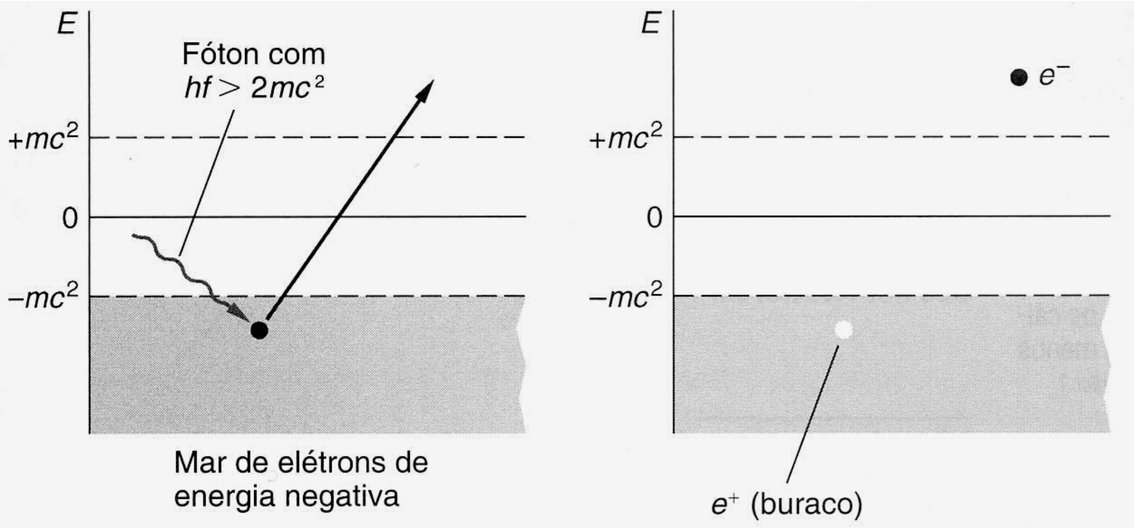
$$\Psi(z,t) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{pc}{E+mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{ipz/\hbar} \text{ e } \Psi(z,t) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\dfrac{pc}{E+mc^2} \end{pmatrix} e^{ipz/\hbar}$$

Spin e Anti-matéria

- Mas como podemos agora interpretar o significado de cada uma dessas 4 dimensões da função de onda?
- A interpretação dada (e verificada posteriormente) é que as duas dimensões (com energia positiva) correspondem a elétrons com spin “para cima” e spin “para baixo” e as duas soluções com energias negativas à anti-matéria

Interpretação de Paul Dirac

- Existe um “mar de elétrons” que pode ser “excitado” e criar um elétron deixando um “buraco” que é o pósitron



Vácuo?

- Podemos interpretar o mar de Dirac como uma proposta para o vácuo
- O conceito de vácuo é uma das questões mais fundamentais para o nosso entendimento do Universo
- Ele tem mudado bastante ao longo do tempo, do "nada" para permitir o movimento dos objetos à impossibilidade de sua existência (o "horror ao vácuo")
- Veremos que a Física de Partículas estabelece uma natureza para o vácuo (o mar de Dirac ainda não é a resposta)

IFUSP
Instituto de Física da USP

Interpretação de Paul Dirac

- Essa proposta de Dirac, bastante ousada, é consistente do ponto de vista teórico?

- E experimentalmente, como verificar sua proposta de existência de antimatéria?