

PMR5250 - Método de Otimização Topológica Aplicada ao Projeto Mecânico

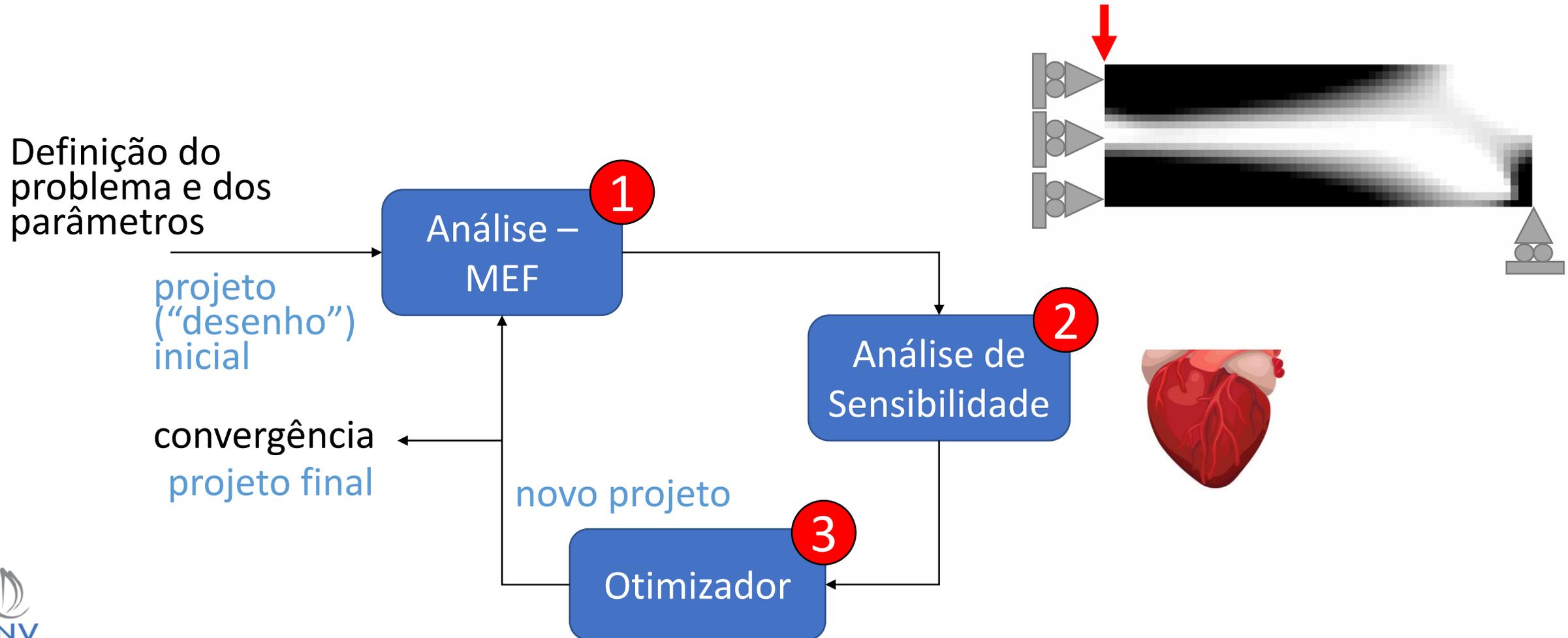
Aula 5 - Análise de sensibilidade



Prof. Dr. Emílio C. N. Silva
Prof. Dr. Renato Picelli

Departamento de Engenharia Naval e Oceânica
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

O loop de otimização topológica



Objetivos da aula

- Praticar a análise de sensibilidade
- Aprender seus detalhes (dúvidas?) através da implementação de uma expressão analítica e do Método das Diferenças Finitas

“mão na massa”

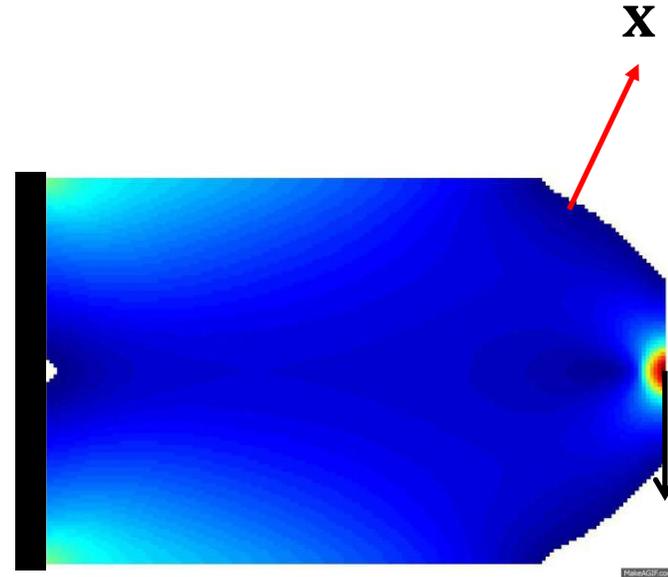
- Entender o que é o Método das Diferenças Finitas e sua aplicação em Otimização Topológica

Otimização Topológica

minimizar $f(\mathbf{x})$
sujeito a $g_j(\mathbf{x}) \leq 0$
 $\mathbf{x} = (0,1)$

- $\frac{df(\mathbf{x})}{dx_i}$
- $\frac{dg_j(\mathbf{x})}{dx_i}$

Projetar a estrutura mais rígida possível, $\longrightarrow f(\mathbf{x})$
utilizando uma fração de volume prescrita $\longrightarrow g_j(\mathbf{x})$



Maximizar a rigidez

- “rigidez = $1/\text{flexibilidade}$ ”
- “flexibilidade” = “compliance estrutural”

Compliance estrutural

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u} dV$$

$$[\mathbf{K}] = \iiint_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV$$

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow f(\mathbf{x}) \\ \longrightarrow C(\mathbf{x}) \end{array}$$

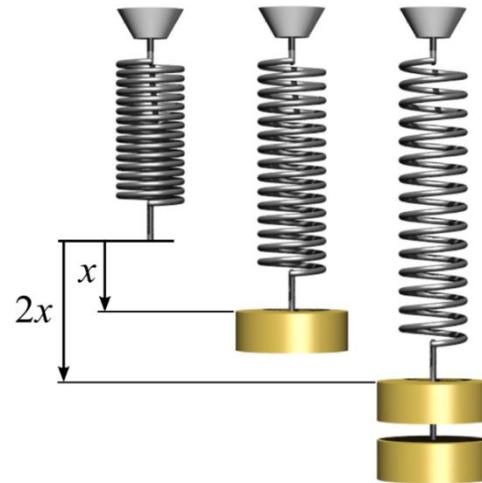
$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}$$

$$C(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{u}$$

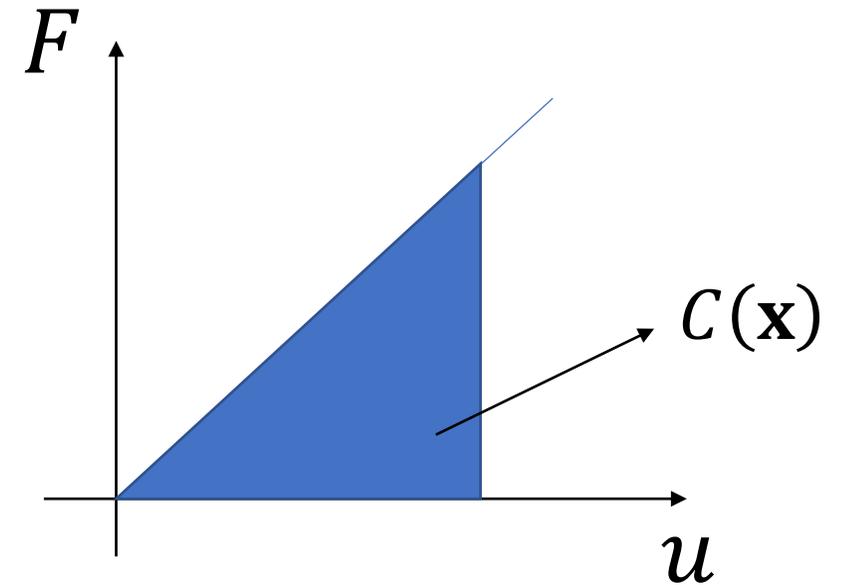
Princípios da elasticidade



Robert Hooke (1660)



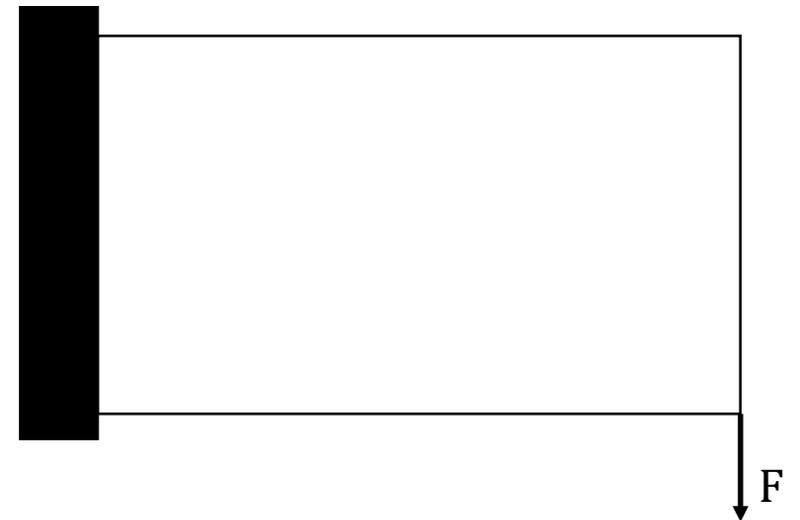
$$F = ku$$



Maximizar a rigidez

- “rigidez = 1/flexibilidade”
- “flexibilidade” = “compliance estrutural”

- $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{u}$
Forças aplicadas Deslocamentos



Minimização da compliance sujeito a volume estrutural

- Formulação do problema:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{u} \\ \text{sujeito a} & \frac{V(\mathbf{x})}{V_0} \leq \bar{V} \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \end{array}$$

- Equilíbrio: $\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{F}$

- Sensibilidade:

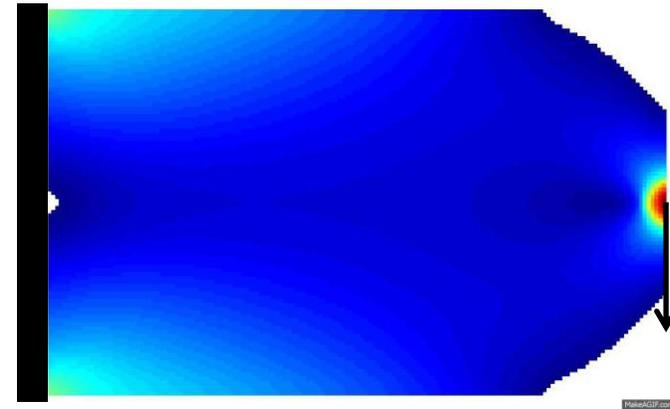
$$\frac{df(\mathbf{x})}{dx_i} = \frac{1}{2} \frac{d(\mathbf{F}^T \mathbf{u})}{dx_i}$$

$$\frac{dg_j(\mathbf{x})}{dx_i} = \frac{1}{V_0} \frac{d(V(\mathbf{x}))}{dx_i}$$

Métodos de otimização baseados em gradiente

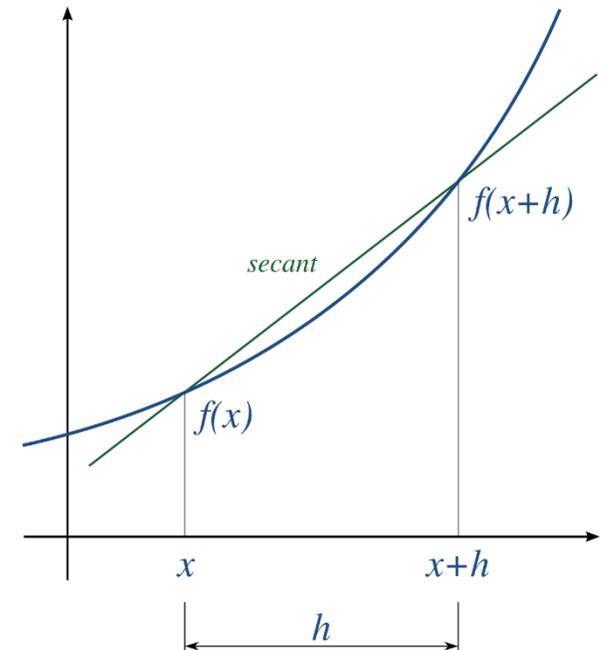
$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(\mathbf{x}) \\ &\text{sujeito a} && g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \\ &&& 0 \leq x_i \leq 1 \end{aligned}$$

- $\frac{df(\mathbf{x})}{dx_i}$
- $\frac{dg_j(\mathbf{x})}{dx_i}$



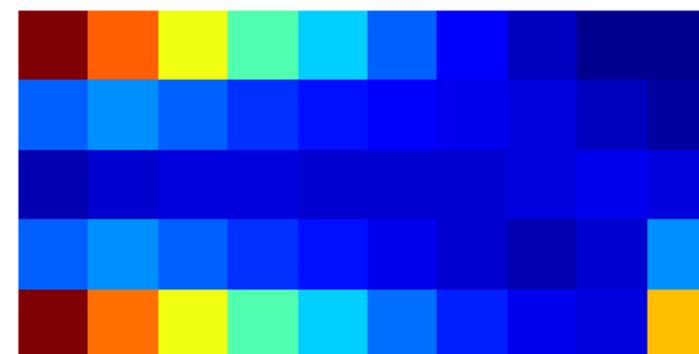
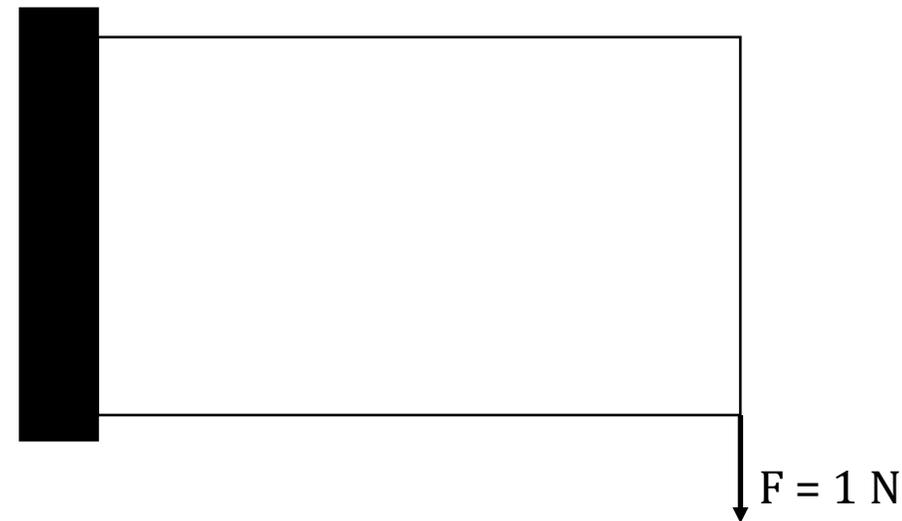
Análise de sensibilidade

- Gradiente das funções objetivo e de restrições
 - Fornecer a informação necessária ao otimizador
- Alguns métodos disponíveis
 - Método das diferenças finitas
 - Método direto
 - Método adjunto
 - Método semi-analítico
 - Diferenciação automática



Trabalho 2

- Calcular: $\frac{df(\mathbf{x})}{dx_i}; f'(\mathbf{x})$
 1. Derivar uma expressão analítica para $f'(\mathbf{x})$ e implementar uma função para calculá-la.
 2. Verificar se a função implementada está correta comparando seu resultado com o resultado obtido pelo Método das Diferenças Finitas.



Método direto

- Derivada direta da função objetivo com respeito à variável de projeto

$$\frac{df(\mathbf{x})}{dx_i} = \frac{1}{2} \frac{d(\mathbf{F}^T \mathbf{u})}{dx_i} = \frac{1}{2} \frac{d(\mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u})}{dx_i}$$

$$= \mathbf{u}^T \mathbf{K} \frac{d\mathbf{u}}{dx_i} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{d\mathbf{K}}{dx_i} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \mathbb{A} \rightarrow \mathbf{K}_i(x_i)$$

Método direto

Encontrar $\frac{d(\mathbf{u})}{dx_i}$:

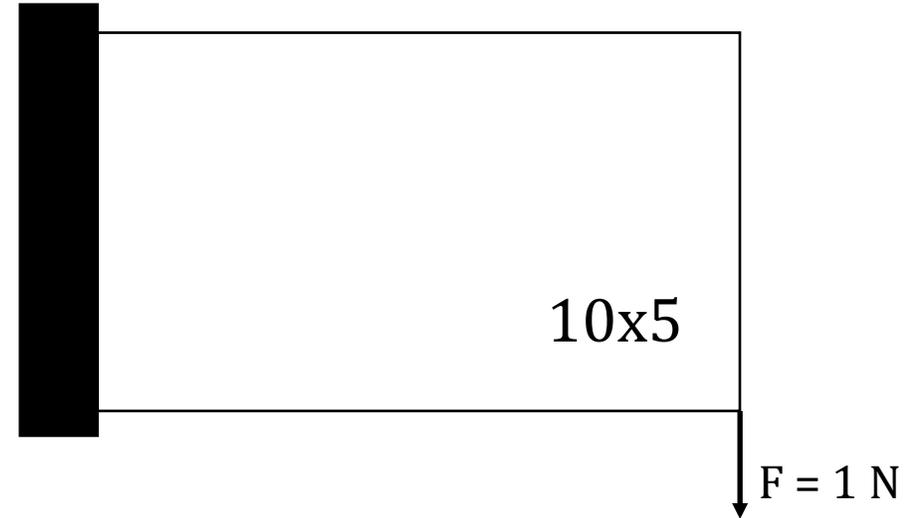
$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{u}$$

$$\frac{d\mathbf{F}}{dx_i} = \frac{d(\mathbf{K}\mathbf{u})}{dx_i}$$



$$\frac{d\mathbf{F}}{dx_i} = \mathbf{K} \frac{d\mathbf{u}}{dx_i} + \frac{d\mathbf{K}}{dx_i} \mathbf{u}$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dx_i} = -\mathbf{K}^{-1} \frac{d\mathbf{K}}{dx_i} \mathbf{u}$$



Método direto

$$\frac{df(\mathbf{x})}{dx_i} = \mathbf{u}^T \mathbf{K} \frac{d\mathbf{u}}{dx_i} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{d\mathbf{K}}{dx_i} \mathbf{u}$$

$$\frac{df(\mathbf{x})}{dx_i} = -\mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{K}^{-1} \frac{d\mathbf{K}}{dx_i} \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{d\mathbf{K}}{dx_i} \mathbf{u}$$

$$\frac{df(\mathbf{x})}{dx_i} = -\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{d\mathbf{K}}{dx_i} \mathbf{u}$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dx_i} = -\mathbf{K}^{-1} \frac{d\mathbf{K}}{dx_i} \mathbf{u}$$

Derivada da matriz de rigidez

- Calcular $\frac{d\mathbf{K}}{dx_i}$

$$\mathbf{D} = \frac{Ei(\mathbf{x})}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1 - \nu)}{2} \end{bmatrix}$$

Uso de um **modelo de material**:

$$Ei(\mathbf{x}) = x_i^p E_0 \rightarrow \frac{dE(\mathbf{x})}{dx_i} = p x_i^{p-1} E_0$$

(SIMP – Solid
Isotropic Material
with Penalization)

Derivada da matriz de rigidez

- Uso de um **modelo de material**:

$$E(\mathbf{x}) = x_i^p E_0 \rightarrow \frac{dE(\mathbf{x})}{dx_i} = p x_i^{p-1} E_0$$

$$\mathbf{D} = \frac{E(\mathbf{x})}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{df(\mathbf{x})}{dx_i} = -\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{d\mathbf{K}}{dx_i} \mathbf{u}$$

$$\frac{d\mathbf{K}(\mathbf{x})}{dx_i} = \frac{d(t \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA)}{dx_i} = p x_i^{p-1} \mathbf{K}_i$$

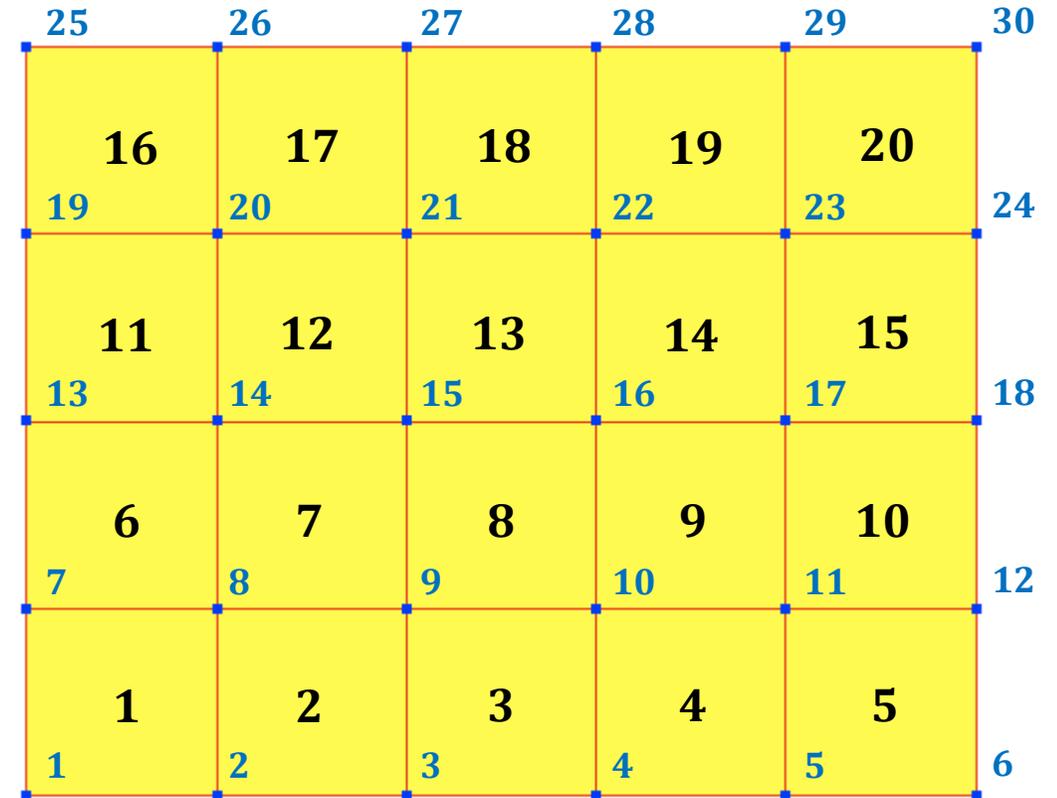


$$\frac{df(\mathbf{x})}{dx_i} = -\frac{1}{2} p x_i^{p-1} \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{u}_i$$

Derivada analítica (implementação)

$$\frac{df(\mathbf{x})}{dx_i} = -\frac{1}{2} p x_i^{p-1} \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{u}_i$$

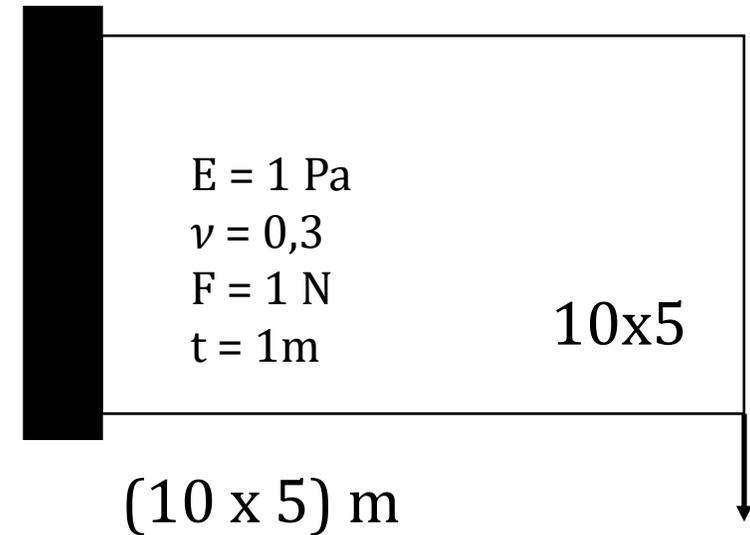
1. Pseudo-densidade x_i , penalidade p .
2. Matriz de rigidez do elemento.
3. Deslocamentos.



Derivada analítica (implementação)

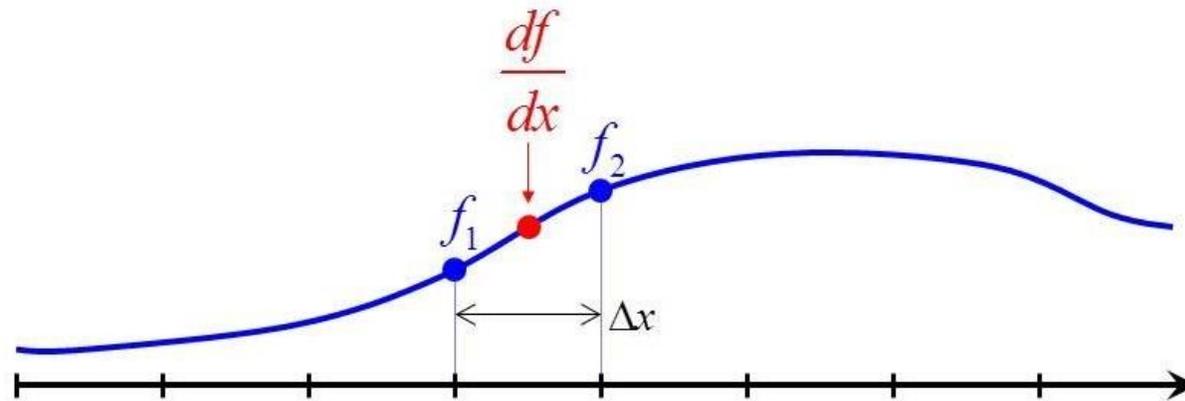
$$\frac{df(\mathbf{x})}{dx_i} = -\frac{1}{2} p x_i^{p-1} \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{u}_i$$

1. Pseudo-densidade x_i , penalidade p .
2. Matriz de rigidez do elemento.
3. Deslocamentos.



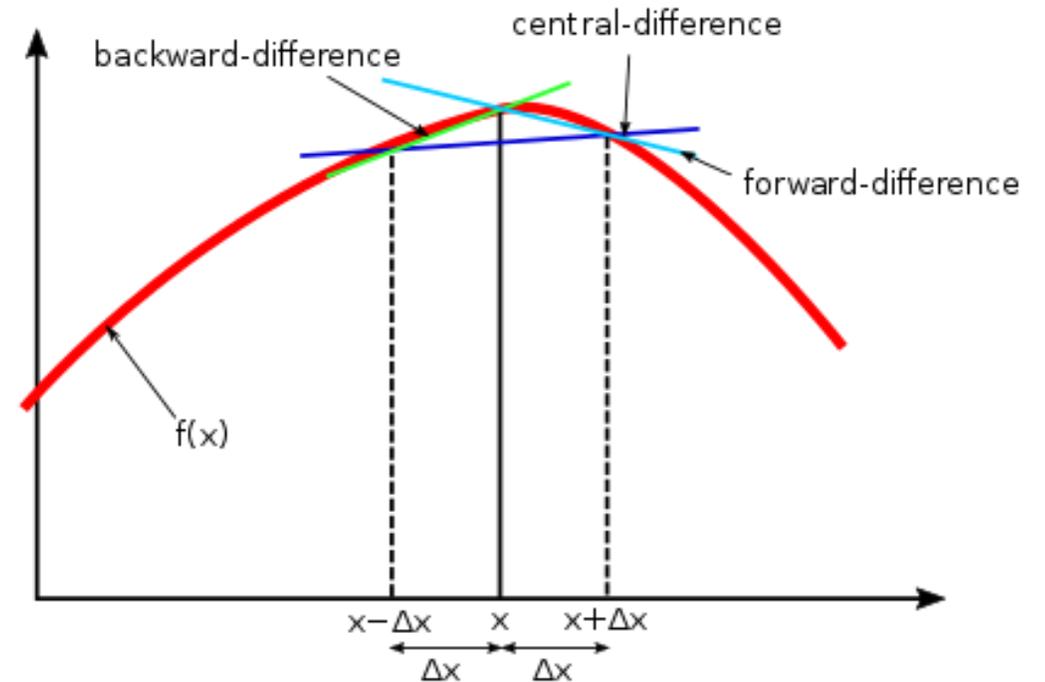
Método das diferenças finitas

$$\frac{df_{1.5}}{dx} \approx \frac{f_2 - f_1}{\Delta x}$$



Método das diferenças finitas

- O erro associado à essa derivada é geralmente menor Δx é pequeno.
- É um método de aproximação, frequentemente utilizado.
- Utilizado em casos onde não temos a expressão analítica da derivada.



https://www.wikiwand.com/en/Finite_difference

Método das diferenças finitas

- $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{u}$
- Calcular $\frac{df(\mathbf{x})}{dx_i} \approx \frac{f(\mathbf{x}+\Delta x) - f(\mathbf{x})}{\Delta x}$

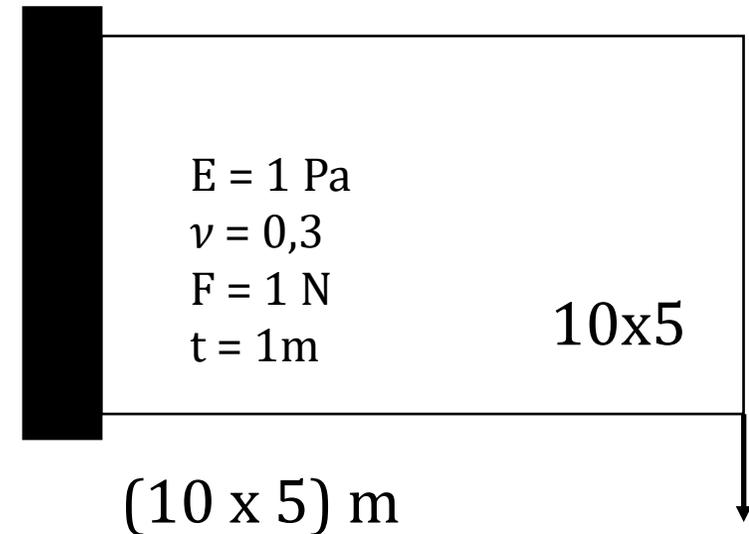
equilíbrio

$$\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{F}$$

montagem

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \mathbb{A} \rightarrow \mathbf{K}_i(x_i^p)$$

x_i = elemento



Método das diferenças finitas

- Crie um vetor de pseudo-densidades (variáveis de projeto) $\mathbf{x} = \{1\}$
- Calcule $f(\mathbf{x})$ e armazene seu valor, e.g., f_0
- “Loop” nos “pontos” x_i , i.e., nos elementos escolhidos
 - **for** $i = 1:\text{number_of_points}$
 - Adicione o passo, pseudo-densidades $x_i = x_i + \Delta x_i$
 - Resolva $\mathbf{K}(x_i^{p^*})\mathbf{u} = \mathbf{F}$, com $x_i^{p^*}$ incluindo Δx em i
 - Calcule $f(x_i^{p^*})$, i.e., $f(\mathbf{x} + \Delta x)$
 - Calcule $\frac{df(\mathbf{x})}{dx_i} \approx \frac{f(\mathbf{x} + \Delta x) - f(\mathbf{x})}{\Delta x}$



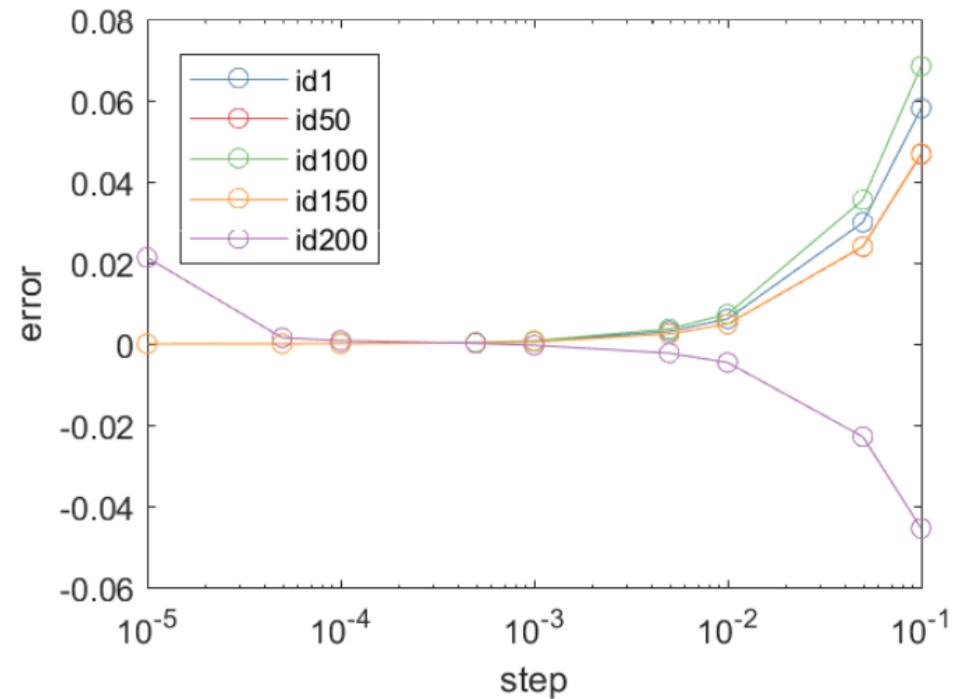
Trabalho 2

- Calcule:

$$\frac{df(\mathbf{x})}{dx_i} = -\frac{1}{2} p x_i^{p-1} \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{u}_i$$

- Compare com:

$$\frac{df(\mathbf{x})}{dx_i} \approx \frac{f(\mathbf{x} + \Delta x) - f(\mathbf{x})}{\Delta x}$$



Comportamento monotônico

- Expansão de série de Taylor com truncamento linear:

$$C(\mathbf{x}) = C_0 + \frac{\partial C(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \Delta \mathbf{x} + \text{erro}$$

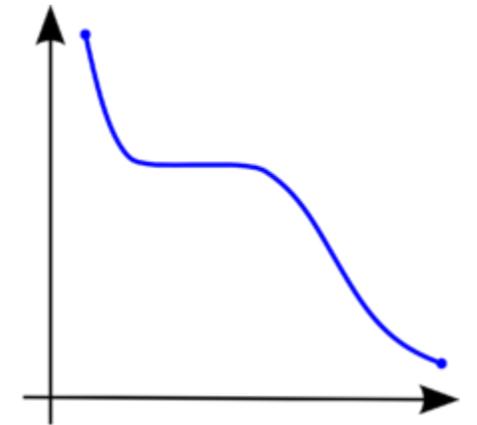
$$\frac{\partial C}{\partial \mathbf{x}} < 0$$

$$\Delta \mathbf{x} = -1$$

Remoção de um elemento, de sólido (variable 1) para vazio (variable 0)

Como ambos são negativos, a remoção de um elemento implica em um aumento na compliance $C(\mathbf{x})$.

$$\frac{\partial C(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \Delta \mathbf{x} > 0$$



Função monotônica

Método adjunto

- Derivada de uma função aumentada:

$$L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \text{equilíbrio}$$

$$L(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{u} + \lambda^T (\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{F})$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{u}$$

$$\frac{dL(\mathbf{x})}{dx_i} = \frac{df(\mathbf{x})}{dx_i}$$

Variável adjunta

Método adjunto

- Derivada de uma função aumentada :

$$L(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{F})$$

$$\frac{dL(\mathbf{x})}{dx_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial(\mathbf{F}^T \mathbf{u})}{\partial x_i} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial(\mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{F})}{\partial x_i}$$

$$\frac{dL(\mathbf{x})}{dx_i} = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} + \boldsymbol{\lambda}^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right)$$

Método adjunto

- Agrupe as variáveis desconhecidas, e.g., $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}$:

$$\frac{dL(\mathbf{x})}{dx_i} = \left(\frac{1}{2} \mathbf{F}^T + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K} \right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u}$$

Para cancelar $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}$:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}$$

$$\frac{1}{2} \mathbf{F}^T + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K} = \mathbf{0} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{K} \boldsymbol{\lambda} = -\frac{1}{2} \mathbf{F} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{\lambda} = -\frac{1}{2} \mathbf{u}$$

Método adjunto

- $\lambda = -\frac{1}{2}\mathbf{u}$:

$$\frac{dL(\mathbf{x})}{dx_i} = \left(\frac{1}{2}\mathbf{F}^T - \frac{1}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{K} \right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u}$$

$$\frac{dL(\mathbf{x})}{dx_i} = -\frac{1}{2}\mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} \longrightarrow$$

$$\frac{df(\mathbf{x})}{dx_i} = -\frac{1}{2} p x_i^{p-1} \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{u}_i$$

Método adjunto

- Geralmente

Função objetivo: $\phi = \phi(\mathbf{U}(\mathbf{x}))$

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{u}$$

Problema adjunto: $\mathbf{K}\boldsymbol{\lambda} = -\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{u}}$

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\lambda} = -\frac{1}{2} \mathbf{F} \rightarrow \boldsymbol{\lambda} = -\frac{1}{2} \mathbf{u}$$

Sensibilidade: $\frac{d\phi}{dx_i} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u}$

$$\frac{d\phi}{dx_i} = -\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u}$$

Diferenças finitas X Método direto X Método adjunto

- Diferenças finitas (DF)
 - Requer a solução de uma $f(\mathbf{x})$ para cada x_i .
 - Otimização topológica geralmente emprega muitas variáveis x_i , implicando em um alto custo computacional para a DF e impraticável.
 - Contudo, é muito útil para verificar a sensibilidade analítica.

$$\frac{df(\mathbf{x})}{dx_i} \approx \frac{f(\mathbf{x} + \Delta x) - f(\mathbf{x})}{\Delta x}$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{U} = \mathbf{F}$$

Diferenças finitas X Método direto X Método adjunto

- Método direto
 - Útil para problemas “auto-adjuntos” nos quais a derivada direta é possível (nem todos os problemas são desse tipo).
 - Oferece uma expressão analítica que pode ser diretamente implementada.
 - Baixo custo computacional.

$$\frac{df(\mathbf{x})}{dx_i} = -\frac{1}{2} p x_i^{p-1} \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{u}_i$$

Diferenças finitas X Método direto X Método adjunto

- Método adjunto
 - Mais geral e elegante, sendo útil em muitos problemas.
 - Oferece uma expressão analítica mas isso depende da solução de um problema adjunto.
 - Baixo custo computacional.

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\lambda} = -\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{U}} \quad \frac{d\phi}{dx_i} = \frac{\partial\phi}{\partial x_i} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial\mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{U}$$

Sensibilidade do volume

- Método direto:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbb{A} \rightarrow x_i V_i$$

$$\frac{dg}{dx_i} = \frac{1}{V_0} \frac{\partial(V(\mathbf{x}))}{\partial x_i} = \frac{V_i}{V_0}$$

Método semi-analítico

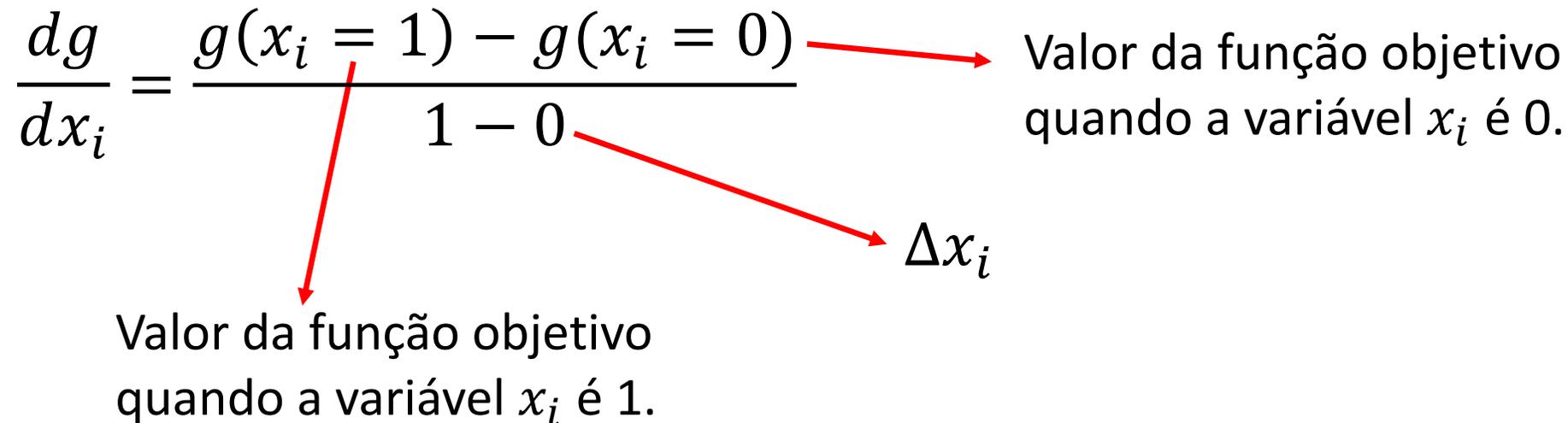
- Método **semi-analítico** (derivada discreta): operador diferencial quando há a remoção de material.

$$\frac{dg}{dx_i} = \frac{g(x_i = 1) - g(x_i = 0)}{1 - 0}$$

Valor da função objetivo quando a variável x_i é 1.

Valor da função objetivo quando a variável x_i é 0.

Δx_i



Método semi-analítico

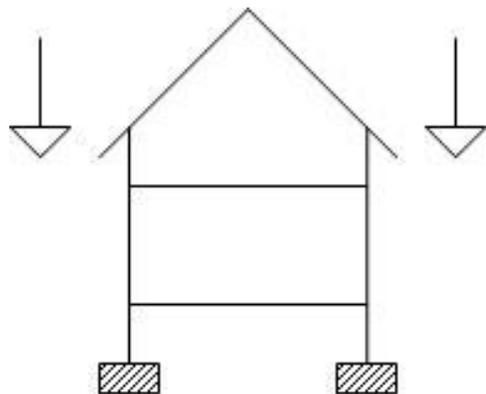
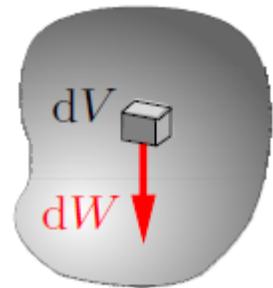
- Método **semi-analítico** (derivada discreta): operador diferencial quando há a remoção de material.

$$\frac{dg}{dx_i} = \frac{g(x_i = 1) - g(x_i = 0)}{1 - 0}$$

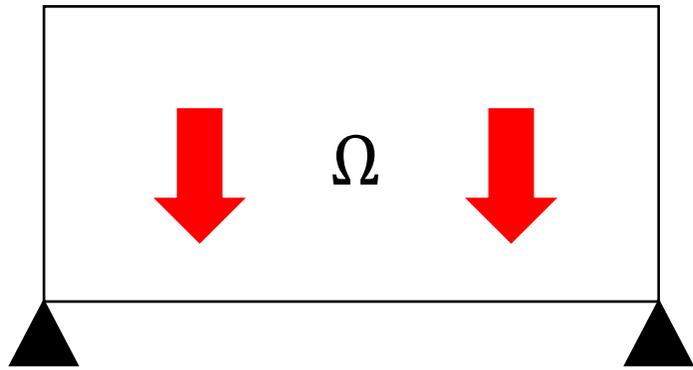
$$\frac{dg}{dx_i} = \frac{1}{V_0} \frac{V(x_i = 1) - V(x_i = 0)}{1 - 0} = \frac{V_i}{V_0}$$

- Obrigado!

Estruturas civis (peso próprio)



Peso próprio - modelagem



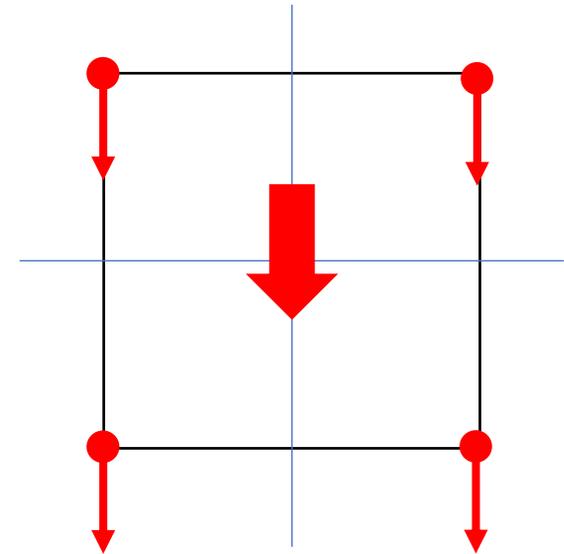
 $\mathbf{b} = \rho \mathbf{g} = \rho \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix}$

Força de corpo: depende do volume ocupado pela estrutura!

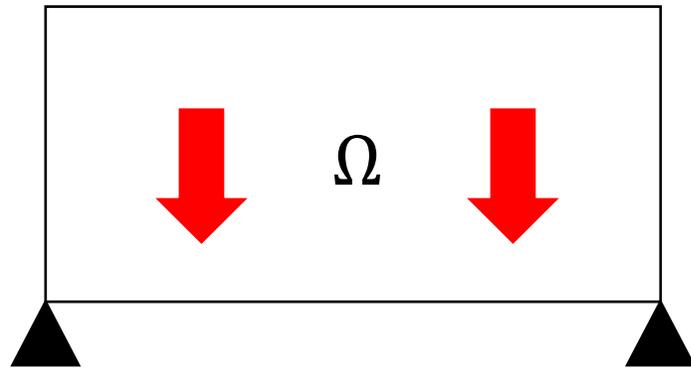
$$\mathbf{b}_e = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega$$

$$\mathbf{N} = \{N_1, 0, N_2, 0, N_3, 0, N_4, 0; \\ 0, N_1, 0, N_2, 0, N_3, 0, N_4\}$$

$$\mathbf{b}_e = V\rho g \left\{ 0, -\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4} \right\}$$



Análise estrutural



$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{b} = 0 \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \text{ in } \Gamma \end{array} \right.$$

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}$$

$$C(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{U}$$

$$\mathbf{F} \longrightarrow \sum_{i=1}^{\text{nel}} \mathbf{b}_e(\rho)$$

Análise de sensibilidade

$$\frac{dL(\mathbf{x})}{dx_i} = \frac{dC(\mathbf{x})}{dx_i}$$

- Pelo método adjunto:

$$L(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{U} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{F})$$

$$\frac{dL(\mathbf{x})}{dx_i} = \frac{1}{2} \frac{d(\mathbf{F}^T \mathbf{U})}{dx_i} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{d(\mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{F})}{dx_i}$$

$$\frac{dL(\mathbf{x})}{dx_i} = \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{F}^T}{dx_i} \mathbf{U} + \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \frac{d\mathbf{U}}{dx_i} + \boldsymbol{\lambda}^T \left(\frac{d\mathbf{K}}{dx_i} \mathbf{U} + \mathbf{K} \frac{d\mathbf{U}}{dx_i} - \frac{d\mathbf{F}}{dx_i} \right)$$

Análise de sensibilidade

- Agrupando $\frac{d\mathbf{U}}{dx_i}$:

$$\frac{dL(\mathbf{x})}{dx_i} = \left(\frac{1}{2} \mathbf{F}^T + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K} \right) \frac{d\mathbf{U}}{dx_i} + \frac{d\mathbf{F}^T}{dx_i} \mathbf{U} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{d\mathbf{K}}{dx_i} \mathbf{U} - \boldsymbol{\lambda}^T \frac{d\mathbf{F}}{dx_i}$$

To cancel $\frac{d\mathbf{U}}{dx_i}$:

$$\frac{1}{2} \mathbf{F}^T + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K} = \mathbf{0} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{K} \boldsymbol{\lambda} = -\frac{1}{2} \mathbf{F} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\lambda} = -\frac{1}{2} \mathbf{U}}$$

Análise de sensibilidade

- $\lambda = -\frac{1}{2}\mathbf{U}$:

$$\frac{dL(\mathbf{x})}{dx_i} = \left(\frac{1}{2}\mathbf{F}^T - \overset{0}{\mathbf{U}^T\mathbf{K}} \right) \frac{d\mathbf{U}}{dx_i} + \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{F}^T}{dx_i} \mathbf{U} - \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \frac{d\mathbf{K}}{dx_i} \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \frac{d\mathbf{F}}{dx_i}$$

$$\frac{dL(\mathbf{x})}{dx_i} = \frac{d\mathbf{F}^T}{dx_i} \mathbf{U} - \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \frac{d\mathbf{K}}{dx_i} \mathbf{U}$$

Comportamento não monotônico

$$\frac{dL(\mathbf{x})}{dx_i} = \frac{d\mathbf{F}^T}{dx_i} \mathbf{U} - \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \frac{d\mathbf{K}}{dx_i} \mathbf{U}$$

$$\frac{df(\mathbf{x})}{dx_i} = \mathbf{b}_i^T \mathbf{u}_i - \frac{1}{2} p x_i^{p-1} \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{u}_i$$

Modelo de material:

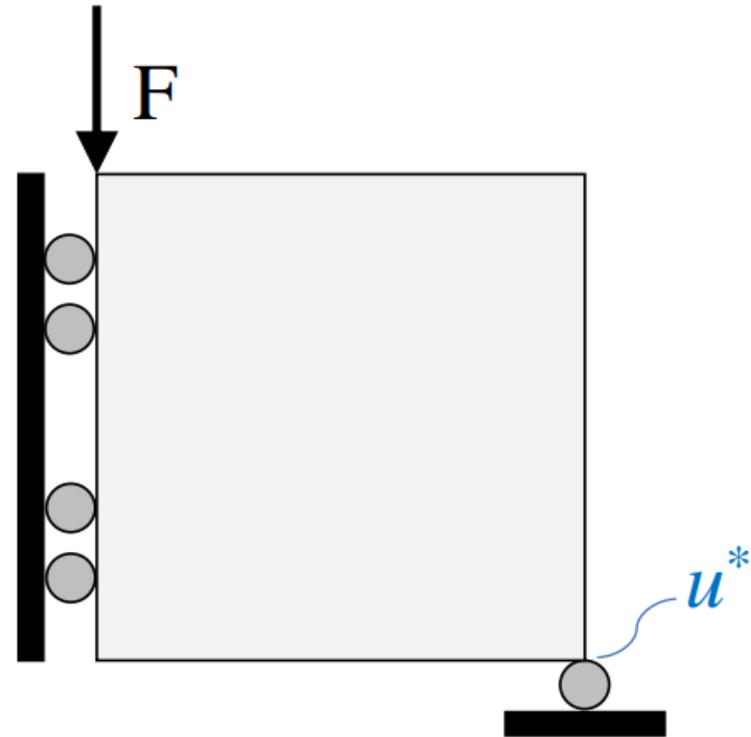
$$\bar{\rho} = x_i \rho_0$$

$$\bar{E} = x_i^p E_0$$

(Bruyneel and Duysinx, 2004)

Outros casos - restrição de deslocamento

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{x}}{\text{Minimize}} && C(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u}, \\ & \text{Subject to} && \frac{V(\mathbf{x})}{V_0} \leq \bar{V}, \\ & && \mathbf{u}^* \leq \bar{\mathbf{u}}, \\ & && \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}, \\ & && x_j \in \{0, 1\}, \quad j \in [1, N_d] \end{aligned}$$



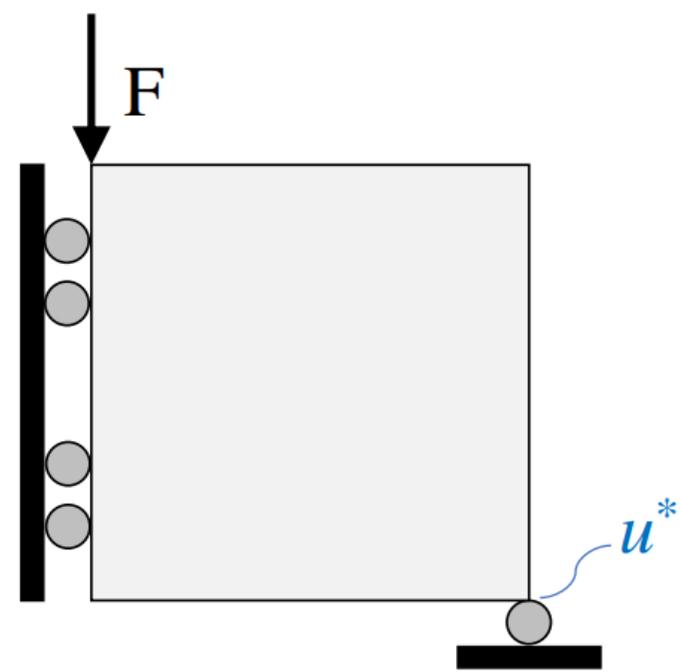
Outros casos - restrição de deslocamento

Problema adjunto:

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\lambda} = -\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{U}} \quad \longrightarrow \quad K\boldsymbol{\lambda} = -P$$

Expressão final:

$$\frac{d\phi}{dx_i} = \frac{\partial\phi}{\partial x_i} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial\mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{U} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial u^*}{\partial x_j} = p x_j^{p-1} (E_0 - E_{\min}) \boldsymbol{\lambda}_j^T \mathbf{k}_0 \mathbf{u}_j$$



$$\phi(x_i) = u^*$$

Sensibilidade da frequência natural

- Equilíbrio:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{u} = 0$$

- Função objetivo:

$$\mu = \omega^2$$

- Sensibilidade:

$$\frac{d\mu}{dx_i} = \frac{\mathbf{u}^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \right) \mathbf{u}}{\mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u}}$$