MAT2454 - Poli - 2011
Cônicas - Parte II

Neste texto apresentamos definições de elipse, hipérbole e parábola e deduzimos suas equações reduzidas. Nos exercícios são apresentadas as propriedades ópticas importantes dessas curvas e algumas aplicações.

Elipse

Fixemos um plano π e dois pontos F_1 e F_2 pertencentes a π. Uma *elipse* é o conjunto dos pontos P do plano π cuja soma das distâncias aos pontos F_1 e F_2 é constante. Os pontos F_1 e F_2 são chamados *focos*.

Para obtermos uma equação simples para a elipse, chamada *equação da elipse na forma reduzida*, vamos escolher um sistema de coordenadas cartesianas de modo que os focos estejam no eixo dos x e a origem seja o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$. Dessa forma, teremos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, para algum número positivo c. Note que a distância entre os focos é $2c$.

Suponha que a soma das distâncias de um ponto da elipse até os focos seja igual ao número positivo que, por conveniência, chamaremos de $2a$. Observe que $a > c$.

Um ponto $P = (x, y)$ pertence à elipse se e somente se

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

ou seja,

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

que é equivalente a

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Elevando cada lado da igualdade ao quadrado:

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

Simplificando:

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

Elevando novamente ao quadrado:

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

que pode ser re-escrito como

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \tag{1}$$

A condição $a > c > 0$ nos permite concluir que $a^2 - c^2 > 0$. Por conveniência, chamamos $a^2 - c^2 = b^2$, para algum $b > 0$. Com isso, a equação (1) pode ser escrita como

$$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

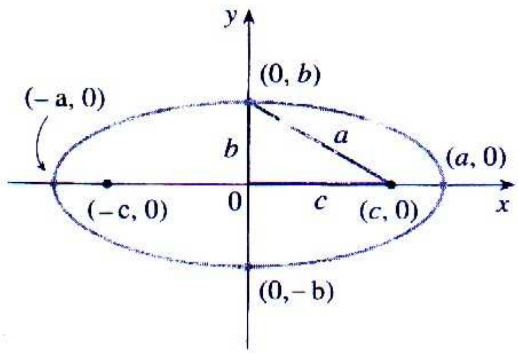
e, dividindo termo a termo por a^2b^2, obtemos a equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{2}$$

Portanto, a elipse formada pelos pontos (x, y) do plano cuja soma da distância até os focos $(-c, 0)$ e $(c, 0)$ é constante igual a $2a$ tem equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

sendo $b > 0$ o número que satisfaz $b^2 + c^2 = a^2$. As intersecções da elipse com os eixos cartesianos serão os pontos $A_1 = (a, 0)$, $A_2 = (-a, 0)$, $B_1 = (0, b)$ e $B_2 = (0, -b)$. Os segmentos $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$ são chamados, respectivamente, eixo maior e eixo menor.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

O número $e = \frac{c}{a}$ é chamado *excentricidade*. Observe que a excentricidade da elipse sempre satisfaz $0 < e < 1$ e que quando e é próximo de 0, a elipse é mais arredondada, próxima de uma circunferência. Quando e é próximo de 1, a elipse é mais "achatada".

Se a escolha de sistema de coordenadas for tal que os focos da elipse estão sobre o eixo dos y, a equação da elipse será da forma

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

os focos serão dados por $(0, -c)$ e $(0, c)$ e as intersecções da elipse com os eixos cartesianos serão os pontos $(0, a)$, $(0, -a)$, $(b, 0)$ e $(-b, 0)$.

No século XVII, Johannes Kepler descobriu que as órbitas dos planetas em torno do Sol são elipses que têm o Sol em um dos focos. Mais tarde, Isaac Newton obteve o mesmo resultado como corolário da sua Lei de Gravitação Universal.

Exercícios

1. Escreva uma equação para a elipse, dados:
   (a) os focos $(5, 0)$ e $(-5, 0)$ e eixo menor medindo $10\sqrt{2}$.
   (b) eixo menor determinado pelos pontos $B_1 = (0, -4)$ e $B_2 = (0, 4)$, e o comprimento $l = \frac{8}{5}$ da corda perpendicular ao eixo maior da elipse e que passa por um dos focos.
   (c) os focos $(-3, 2)$ e $(-3, 6)$ e eixo maior medindo 8.

2. Encontre os focos e a excentricidade da elipse de equação dada. Faça um esboço:
   (a) $16x^2 + 25y^2 = 400$ (b) $4x^2 + y^2 = 8$
   (c) $4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 = 36$ (d) $2y^2 + 2x^2 - 4y + 12x + 8 = 0$

3. Sabe-se que a medida $2a$ do eixo maior da órbita da Terra em torno do Sol é de aproximadamente $3,0 \times 10^8$ km e a excentricidade é aproximadamente $0,02$.
   (a) Determine a equação reduzida da órbita da Terra, supondo o Sol no eixo dos x.
   (b) A posição da Terra em que a distância ao Sol é máxima é chamada *afélio* e a posição em que a distância ao Sol é mínima é o *periélio*. Calcule aproximações para as distâncias da Terra ao Sol no afélio e no periélio.

4. **Propriedade de reflexão da elipse.** Seja $P = (x_0, y_0)$ um ponto da elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tal que $y_0 \neq 0$.

(a) Mostre que a reta tangente à elipse em P tem vetor diretor dado por $(1, -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0})$.

(b) Sejam F_1 e F_2 os focos da elipe e α e β os ângulos que a reta tangente à elipse no ponto P forma, respectivamente, com os segmentos PF_1 e PF_2. Prove que $\alpha = \beta$.

Essa propriedade explica, por exemplo, por que sons sussurrados em um dos focos de uma sala com paredes em forma de elipse podem ser ouvidos no outro foco.

Hipérbole

Uma hipérbole é o conjunto de todos os pontos P de um plano cujas diferenças das distâncias a dois pontos fixados F_1 e F_2 é constante. Esses pontos fixados são chamados *focos*.

Como no caso da elipse, para obtermos uma equação reduzida para a hipérbole, podemos escolher um sistema de coordenadas cartesianas de modo que os focos estejam no eixo dos x e a origem seja o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$. Dessa forma, teremos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, para algum número positivo c. Seja $2a$ a diferença constante entre as distâncias de cada ponto da hipérbole até cada um dos focos.

Exercício. No sistema de coordenadas escolhido acima, seja $P = (x, y)$ um ponto pertencente à hipérbole, isto é,

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

Prove que se b é um número positivo tal que $a^2 + b^2 = c^2$ então as coordenadas de P satisfazem à equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3}$$

As intersecções da hipérbole com os eixos cartesianos são os pontos $A_1 = (a, 0)$ e $A_2 = (-a, 0)$. Tais pontos são chamados *vértices*. Note que não há intersecção da hiperbole com o eixo dos y (se $x = 0$ a equação $-\frac{y^2}{b^2} = 1$ não tem solução).

A excentricidade $e = \frac{c}{a}$ da hipérbole é sempre maior do que 1.

Observe que $\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1$. Logo, $x^2 \geq a^2$, ou seja, $x \leq -a$ ou $x \geq a$. Portanto, o gráfico da hipérbole tem duas partes. Cada uma dessas partes é um *ramo da hipérbole.*

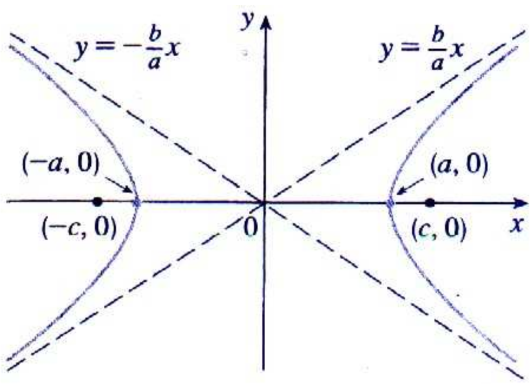
Para fazermos um bom esboço do gráfico de uma hipérbole, sempre é bom começarmos pelo desenho de suas assíntotas.

Exercício

a) Mostre que os pontos da hipérbole que estão no primeiro quadrante satisfazem a equação $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$.

b) Verifique que a reta $y = \frac{b}{a}x$ é assíntota para $x \longrightarrow +\infty$ da função no item (a).

c) Conclua que as retas de equações $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$ são as assíntotas da hipérbole de equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Se a escolha de sistema de coordenadas for tal que os focos estão sobre o eixo dos y, a equação da hipérbole será da forma

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

os focos serão dados por $(0, -c)$ e $(0, c)$, as intersecções da elipse com o eixo dos y são os pontos $(0, a)$, $(0, -a)$ e não há intersecção com o eixo dos x.

Exercícios

1. Escreva uma equação para cada hipérbole descrita abaixo:

(a) os focos são $(5,0)$ e $(-5,0)$ e os vértices são $(2,0)$ e $(-2,0)$.

(b) os focos são $(3,0)$ e $(-3,0)$ e as assíntotas têm equações $y = 2x$ e $y = -2x$.

(c) os focos são $(-3,2)$ e $(-3,6)$ e os vértices, $(-3,3)$ e $(-3,5)$.

(d) Encontre os focos e a excentricidade da hipérbole de equação dada. Faça um esboço:

(a) $16x^2 - 25y^2 = 400$	(b) $4(x-1)^2 - 9(y-2)^2 = 36$
(c) $4y^2 - x^2 = 8$	(d) $2y^2 - 2x^2 - 12y + 20x + 8 = 0$

2. **(Propriedade de reflexão da hipérbole)** Seja $P = (x,y)$ um ponto da hipérbole de equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ e focos F_1 e F_2. Sejam α e β os ângulos que a reta tangente à hipérbole no ponto P forma, respectivamente, com os segmentos PF_1 e PF_2. Prove que $\alpha = \beta$.

   Essa propriedade explica por que um foco de luz apontado para um dos focos de um espelho hiperbólico é refletido no outro foco.

3. **(Sistema LORAN - Long Range Navigation)** No sistema LORAN de navegação, duas estações de rádio localizadas em A e B transmitem sinais simultâneos para um navio ou avião localizado em P. O computador de bordo converte a diferença de tempo no recebimento desses sinais na diferença entre as distâncias $d(P,A) - d(P,B)$ e, de acordo com a definição de hipérbole, consegue localizar em qual dos ramos da hipérbole o navio ou avião está.

   Suponha que uma estação B esteja localizada 400 milhas a leste da estação A que está na costa. Um navio recebe o sinal de B 1200 microsegundos antes do sinal de A.

   (a) Assumindo que o sinal de rádio viaja a 980 pés por microsegundo, encontre uma equação para a hipérbole onde o navio está.

   (b) Se o navio estiver exatamente a norte de B, qual a distância do navio até a costa? [1]

   Note que, nesse sistema, se houver uma terceira estação transmissora de sinais C, a posição do ponto P fica determinada pela análise das possíveis intersecções de duas hipérboles, uma delas determinadas pelas diferenças constantes $d(P,A) - d(P,B)$ e a outra, pelas diferenças constantes $d(P,A) - d(P,C)$.

[1] Respostas: a) $\frac{121x^2}{1.500.625} - \frac{121y^2}{3.339.375} = 1$; b) 248 milhas.

4. Seja $k > 0$. Determine o tipo de curva representado pela equação $\frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{k-16} = 1$ nos casos $k > 16$ e $k < 16$. Mostre também que todas essas curvas têm os mesmos focos, não importando o valor de k.

Parábola

Fixados um ponto F e uma reta d em um plano, parábola é o conjunto de todos os pontos P do plano que são equidistantes de F e d. O ponto F e a reta d são chamados, respectivamente, *foco* e *diretriz* da parábola.

Tente, usando apenas a definição, esboçar o conjunto de pontos que equidistam de um ponto P e uma reta d fixados. Observe que a reta que passa pelo foco e é perpendicular à diretriz é um eixo de simetria da parábola. Note também que o ponto médio do segmento perpendicular à diretriz que liga o foco e a diretriz é um ponto da parábola. Esse ponto é chamado *vértice*.

Equações bem simples para a parábola podem ser obtidas se escolhermos um sistema de coordenadas de modo que a origem esteja no vértice da parábola, um dos eixos paralelo à diretriz e o outro eixo coincidindo com o eixo de simetria.

No caso em que o eixo dos x é paralelo à diretriz e eixo dos y contém o foco, temos $F = (0, p)$.

(a) Se $p > 0$, a equação da diretriz será $y = -p$. Por definição, um ponto $P = (x, y)$ pertence à parábola se e somente se

$$d(P, F) = d(P, d)$$

Como $d(P, F) = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}$ e $d(P, d) = |y + p|$, obtemos

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |y + p|$$

ou, equivalentemente,

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

Simplificando, chegamos à equação

$$x^2 = 4py$$

(b) Se $p < 0$, a equação da diretriz é também $y = -p$ (mas neste caso, $-p > 0$). A parábola terá concavidade para baixo e sua equação será $x^2 = -4py$.

Se escolhermos um sistema de coordenadas de modo que o eixo dos x contém o foco, temos $F = (p, 0)$ e a diretriz terá equação $x = -p$. Nesse caso, a parábola será simétrica em relação ao eixo dos x. Além disso:

(c) Se $p > 0$, a parábola será voltada para o semiplano dos $x > 0$ e terá equação $y^2 = 4px$.

(d) Se $p < 0$, a parábola será voltada para o semiplano dos $x < 0$ e terá equação $y^2 = -4px$.

Observe que de um modo geral a parábola sempre se volta para o foco.

Exercícios

1. Encontre o foco, vértice, diretriz e faça um esboço de cada parábola:

   (a) $y = x^2$ (b) $y^2 = 20x$ (c) $x + 1 = (y - 3)^2$

2. Encontre uma equação para a parábola de foco $(2, 3)$ e diretriz $x = -1$

3. Mostre que a equação para a reta tangente à parábola $x^2 = 4py$ no ponto (x_0, y_0) pode ser escrita como $x_0x = 2p(y + y_0)$.

4. **(Propriedade de reflexão da parábola)** Seja $P = (x_0, y_0)$ um ponto da parábola $x^2 = 4py$ de foco $F = (0, p)$. Seja t a reta tangente à parábola em P. Considere o ângulo α determinado pela reta t e o segmento $\overline{FP}$. Seja β o ângulo determinado pela reta tangente em P e a semirreta paralela ao eixo de simetria, com origem em P, contida na região interior da parábola. Prove que $\alpha = \beta$.

   Essa propriedade garante que sinais captados de algum local muito distante, quando refletidos em uma superfície parabólica, são projetados para o foco e vice-versa. Por esse motivo, os faróis de carro e a lâmpada usada em consultórios de dentistas são parabólicos, as antenas que captam sinais de satélites são parabólicas, bem como alguns tipos de lentes usadas em telescópios.

Investigação

a) Fixados dois pontos em um plano, determine o conjunto de todos os pontos do plano fixado cujo *quociente* das distâncias aos pontos fixados é uma constante.

b) Fixados uma reta e um ponto fora dela em um plano π, determine o conjunto de todos os pontos do plano π cujo quociente das distâncias à reta e ao ponto é constante.