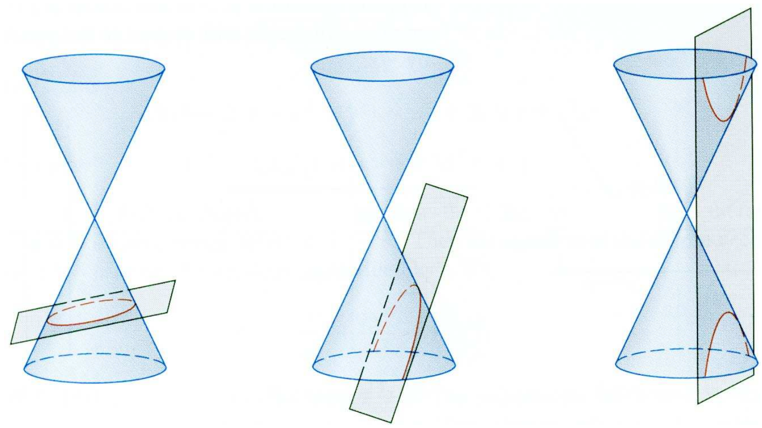
MAT2454 - Poli - 2011
Cônicas - Parte I

Uma *equação quadrática em duas variáveis*, x e y, é uma equação da forma

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0,$$

em que pelo menos um dos coeficientes a, b ou c é não nulo[1]. Os gráficos de tais equações são *curvas planas*.

É possível demonstrar que a intersecção de uma superfície cônica com um plano pode resultar em uma elipse, uma hipérbole, uma parábola, dependendo da posição relativa do plano com o cone. Por esse motivo, essas curvas são chamadas *secções cônicas*. Há outras intersecções possíveis, chamadas *cônicas degeneradas*: um ponto, uma reta, duas retas concorrentes, duas retas paralelas[2].



Note que a circunferência é uma possível intersecção de uma superfície cônica com um plano. Neste contexto, a circunferência será considerada um caso particular de elipse.

Os gregos antigos estudaram as várias propriedades geométricas das cônicas não-degeneradas. Apenas séculos depois, percebeu-se a utilidade prática desse conhecimento, que hoje contribui fortemente em muitos avanços tecnológicos, tais como construção de telescópios, sistemas de navegação, radares, antenas e outros sistemas de informação a distância.

A seguir apresentaremos uma breve análise de equações de cônicas que têm o coeficiente c igual a zero. É possível verificar que quando $c = 0$, as curvas apresentam simetria em relação a retas paralelas aos eixos cartesianos. Quando $c \neq 0$, os eixos de simetria do gráfico não são paralelos aos eixos cartesianos. Apenas um exemplo

[1]Alguns autores preferem escrever a frase "em que $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$" no lugar de "em que pelo menos um dos coeficientes a, b ou c é não nulo". Convença-se de que essas duas frases são, de fato, equivalentes!

[2]Esse último caso é obtido se considerarmos o cone como uma degeneração de um cilindro

desse tipo será trabalhado aqui. Casos gerais serão vistos como aplicações do estudo de diagonalização de operadores lineares, na disciplina de Álgebra Linear.

Na parte II deste texto apresentamos, para o leitor interessado, mais detalhes sobre as cônicas não degeneradas, tais como suas definições, propriedades óticas e algumas aplicações.

Elipse

A equação quadrática da forma

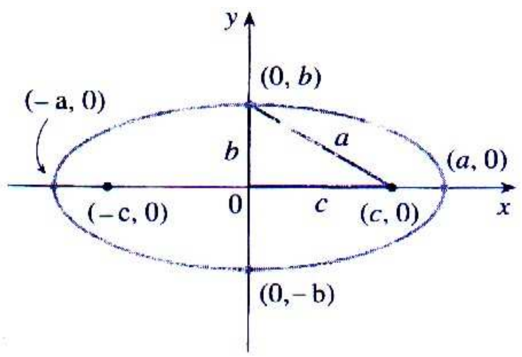
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

em que a e b são constantes positivas é uma equação de elipse na forma reduzida. O gráfico é uma curva simétrica em relação a cada um dos eixos coordenados já que, se o par (x, y) satisfaz a equação, então os pares $(-x, y)$, $(-x, -y)$ e $(x, -y)$ também satisfazem. Assim, para fazer o esboço do gráfico de uma elipse, basta que façamos o gráfico do primeiro quadrante e completemos por simetria.

Exercício: Verifique que se $f(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ então f é decrescente e tem concavidade para baixo no intervalo $]0, a[$.

Note que os pontos $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ e $(0, -b)$ são os pontos de intersecção da elipse com os eixos coordenados.

Observe também que se $a = b$, a equação acima é equivalente a $x^2 + y^2 = a^2$, ou seja, uma circunferência de raio a.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hipérbole

Fixados números $a > 0$, $b > 0$, a equação quadrática da forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

é uma equação reduzida de hipérbole. Seu gráfico é uma curva simétrica em relação a ambos os eixos coordenados. (Por quê?)

Note que $(a, 0)$ e $(-a, 0)$ são as intersecções da curva com o eixo dos x e que não há intersecção com o eixo y. (Por quê?)

Escrevendo a equação na forma $\dfrac{x^2}{a^2} = 1 + \dfrac{y^2}{b^2}$ podemos ver que $\dfrac{x^2}{a^2} \geq 1$ e, portanto, $x \leq -a$ ou $x \geq a$. Com isso concluímos que o gráfico da hipérbole consiste de duas partes, chamados *dois ramos*. Além disso, também podemos escrever

$$y^2 = b^2\,(\frac{x^2}{a^2} - 1) = \frac{b^2}{a^2}\,(x^2 - a^2).$$

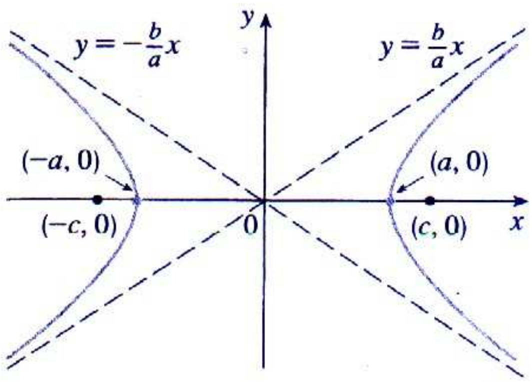
Para $y \geq 0$, escrevemos $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ e vemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{b}{a}\,x) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{b}{a}\,(\sqrt{x^2-a^2} - x)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{-ab}{\sqrt{x^2-a^2}+x} = 0\end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}(\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{b}{a}\,x) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{b}{a}\,(\sqrt{x^2-a^2} + x)\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{-ab}{\sqrt{x^2-a^2}-x} = 0\end{aligned}$$

Com o cálculo dos limites acima e a simetria em relação ao eixo x, podemos concluir que as retas $y = \dfrac{b}{a}\,x$ e $y = -\dfrac{b}{a}\,x$ são assíntotas da hipérbole de equação $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

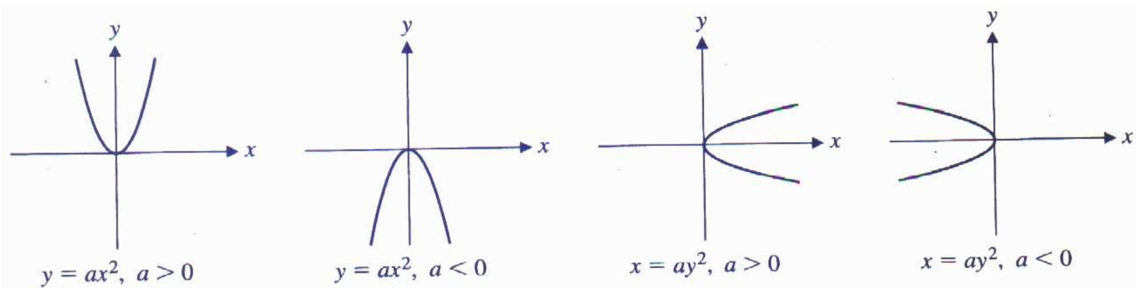
Exercício: Estude a hipérbole de equação

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

encontrando as intersecções com os eixos coordenados e provando que as retas $y = \pm\frac{b}{a}x$ são suas assíntotas.

Parábola

Há quatro tipos de equação reduzida de parábola. A figura abaixo ilustra cada tipo e seu respectivo gráfico.



Vejamos alguns exemplos de equações de cônicas na forma reduzida:

Exemplo 1. A equação $25x^2 + 16y^2 = 400$ pode ser escrita na forma

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

Portanto, seu gráfico é a *elipse* cujas intersecções com os eixos coordenados são os pontos $(4, 0), (-4, 0), (0, 5), (0, -5)$. Verifique as afirmações acima e esboce o gráfico.

Exemplo 2. A equação $25x^2 - 16y^2 + 1 = 0$ pode ser escrita como

$$-\frac{x^2}{\frac{1}{25}} + \frac{y^2}{\frac{1}{16}} = 1$$

Portanto, seu gráfico é uma *hipérbole*. As assíntotas são as retas de equações $y = \pm\frac{5}{4}x$ e a intersecção da hipérbole com o eixo dos y se dá nos pontos $(0, \pm\frac{1}{4})$. Não há intersecção com o eixo dos x. Verifique as afirmações e esboce o gráfico.

Exemplo 3. A equação $4y^2 - 9x = 0$ pode ser escrita como

$$x = \frac{4}{9}y^2$$

e, por isso, concluímos que trata-se de uma *parábola* voltada para a direita.

Se uma equação quadrática não for equivalente a nenhuma das formas acima é possível que se trate de uma cônica que não esteja na posição padrão, isto é, que não esteja centrada na origem e com eixo(s) de simetria coincidente(s) com os eixos coordenados. Vejamos alguns exemplos de casos assim.

Exemplo 4. A equação $4x^2 + 2y^2 + 8x - 12y + 6 = 0$ é uma equação quadrática, que pode ser re-escrita da seguinte maneira:

$$\begin{array}{rrl} & (4x^2 + 8x) + (2y^2 - 12y) = & -6 \\ \Leftrightarrow & 4(x^2 + 2x) + 2(y^2 - 6y) = & -6 \end{array}$$

Completando os quadrados das expressões entre parênteses obtemos:

$$\begin{array}{rcl} & 4(x^2 + 2x + 1) + 2(y^2 - 6y + 9) & = -6 + 4 + 18 \\ \Leftrightarrow & 4(x + 1)^2 + 2(y - 3)^2 & = 16. \end{array}$$

Fazendo $u = x + 1$ e $v = y - 3$ obtemos $4u^2 + 2v^2 = 16$ ou, equivalentemente,

$$\frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{8} = 1$$

Esta é a equação de uma elipse que, no sistema de coordenadas $O'uv$, intercepta o eixo u nos pontos $(\pm 2, 0)$ e o eixo v em $(0, \pm 2\sqrt{2})$. A origem O' do sistema $O'uv$ coincide com o ponto de coordenadas $x = -1$ e $y = 3$. As equações $u = x + 1$ e $v = y - 3$ nos informam que os eixos $O'u$ e $O'v$ são paralelos, respectivamente, aos eixos Ox e Oy.

Exercício: Faça um esboço da elipse de equação $4x^2 + 2y^2 + 8x - 12y + 6 = 0$ indicando os eixos Ox e Oy, os eixos de simetria Ou e Ov e as intersecções da elipse com os eixos de simetria.

Quando a equação quadrática contém um termo em xy ela representa uma cônica cujos eixos de simetria não são paralelos aos eixos x e y. Como achar os eixos de simetria da figura será um assunto a ser estudado em Álgebra Linear. Por enquanto veremos apenas o importante exemplo a seguir.

Exemplo 5. A equação $xy = 1$ é uma equação quadrática em x e y. Isolando y na equação, podemos perceber que o gráfico da equação dada é o gráfico da função $y = \dfrac{1}{x}$, definida para $x \neq 0$. Esse gráfico já é conhecido de vocês, mas vamos estudá-lo agora sob outro ponto de vista.

O efeito de uma mudança de variáveis dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

é uma *rotação* de medida θ no sistema de coordenadas. Em particular, é fácil verificar que os pontos de coordenadas $(u,v)=(1,0)$ e $(u,v)=(0,1)$ têm coordenadas $(x,y)=(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ e $(x,y)=(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$ respectivamente. Faça uma figura e confira o resultado.

A rotação de $\theta=\frac{\pi}{4}$ radianos é dada por

$$\begin{cases} x = & \frac{\sqrt{2}}{2}u - \frac{\sqrt{2}}{2}v \\ \\ y = & \frac{\sqrt{2}}{2}u + \frac{\sqrt{2}}{2}v \end{cases} \tag{1}$$

O sistema de coordenadas $0uv$ tem o eixo u sobre a reta de equação $y=x$ no sistema Oxy e o eixo v sobre a reta $y=-x$. (Verifique!)

Voltemos à equação $xy=1$. Substituindo x e y dados pelas equações (1), obtemos

$$(\frac{\sqrt{2}}{2}u - \frac{\sqrt{2}}{2}v)(\frac{\sqrt{2}}{2}u + \frac{\sqrt{2}}{2}v) = 1 \Leftrightarrow \frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2} = 1$$

Logo, o conjunto dos pontos que satisfaz a equação $xy=1$ é o mesmo o conjunto de pontos que, no sistema $0uv$, satisfaz a equação $\frac{u^2}{2}-\frac{v^2}{2}=1$. Logo, trata-se de uma hipérbole cujas intersecções com o eixo Ou são os pontos $(u_1,v_1)=(\sqrt{2},0)$ e $(u_2,v_2)=(-\sqrt{2},0)$. No sistema Oxy esses mesmos pontos têm coordenadas $(x_1,y_1)=(1,1)$ e $(x_2,y_2)=(-1,-1)$.

Também é fácil verificar que as assíntotas são as retas $v=u$ e $v=-u$, correspondentes às retas de equação $y=0$ e $x=0$.

A seguir mostraremos exemplos de cônicas degeneradas.

Exemplo 6. $x^2+y^2+2xy-2x-2y+1=0$

Essa equação pode ser escrita, de modo equivalente, na forma

$$\begin{aligned} (x+y)^2 - 2(x+y) + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+y-1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x+y-1 &= 0 \end{aligned}$$

Assim, vemos que o conjunto dos pontos que satisfaz a equação original é o conjunto dos pontos que satisfaz a equação $x+y-1=0$, ou seja, é uma reta.

Exemplo 7. $x^2+y^2+2xy+x+y-2=0$

A equação é equivalente a

$$\begin{aligned} (x+y)^2 + (x+y) - 2 = 0 &\Leftrightarrow [(x+y)-1][(x+y)+2] = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+y-1)(x+y+2) = 0 \end{aligned}$$

Se um ponto P, de coordenadas (x, y) satisfaz a equação dada, então as coordenadas de P ou satisfazem a equação $x + y - 1 = 0$ ou satisfazem a equação $x+y+2 = 0$. Logo, o conjunto solução da equação dada é a reunião de duas retas paralelas.

Exemplo 8. A equação $x^2 - 4y^2 = 0$ é equivalente a $(x + 2y)(x - 2y) = 0$. Logo, a equação quadrática dada representa um par de retas concorrentes.

Exemplo 9. A equação $3x^2 + 47y^2 = 0$ equivale a $x = y = 0$ e, portanto, representa o ponto $P = (0, 0)$.

Exercícios

1. Represente graficamente o conjunto dos pontos que satisfaz:
   (a) $25x^2 + 9y^2 = 225$
   (b) $9x^2 - 18x + 4y^2 = 27$
   (c) $\dfrac{x^2}{144} - \dfrac{y^2}{25} = 1$
   (d) $4y^2 - x^2 = 4$
   (e) $16x^2 - 9y^2 + 64x - 90y = 305$
2. Classifique a cônica em função dos valores de k dados:
   (a) $9x^2 + 16y^2 = k$ para $k = 0, k = 1, k = 9, k = 144$
   (b) $x^2 + ky^2 = 1$ para $k = 0, k = 1, k = 4, k = -1, k = -4$
   (c) $xy = k$ para $k = 0, k = 1, k = 4, k = -1, k = -4$
   (d) $\dfrac{x^2}{k} + \dfrac{y^2}{k - 25} = 1$ para $k > 25, 0 < k < 25, k < 0$
3. Para verificar se você consegue visualizar as diversas situações relativas entre um plano e um cone e o resultado de suas intersecções, tente responder as perguntas abaixo. Lembre-se de que, "oficialmente", a superfície chamada *cone* tem duas componentes (como na figura no início do texto).
   a) A intersecção de um cone com um plano ortogonal ao eixo de simetria do cone resulta (no caso degenerado) em um ponto ou em ....
   b) A intersecção de um cone com um plano paralelo ao eixo de simetria do cone resulta (no caso degenerado) em duas retas concorrentes no vértice do cone ou em ....
   c) A intersecção de um cone com um plano paralelo a uma reta geratriz do cone resulta (no caso degenerado) em uma reta ou em ....

d) Imagine que um plano π intercepta o cone em uma parábola. Mudando ligeiramente o ângulo que o plano forma com o eixo de simetria do cone, o que ocorre?

e) Imagine que um plano π intercepta o cone em uma elipse. Mudando ligeiramente o ângulo que o plano forma com o eixo de simetria do cone, o que ocorre?

f) Imagine que um plano π intercepta o cone em uma circunferência. Mudando ligeiramente o ângulo que o plano forma com o eixo de simetria do cone, o que ocorre?

4. Uma equação de cone circular reto é dada por $x^2 + y^2 = z^2$.

a) Calcule as intersecções do cone com os planos cartesianos.

b) Faça um esboço do cone.

c) Tente visualizar e tente resolver algebricamente o resultado da intersecção desse cone com os seguintes planos:
i) $z = 1$ ii) $x = 1$ iii) $x = y$ iv) $x = 2z$