Capítulo I - Conceitos básicos sobre probabilidade

Muitos fenômenos não são descritos por dinâmicas determinísticas, mas sim estocásticas ou probabilística, no qual a cada ocorrência é atribuída uma probabilidade / distribuição de probabilidades associada.

Exemplos:

- Processo de medição de um dado estado num sistema quântico,
- Processo de queda / movimento de uma folha (leve) caindo de uma árvore,
- probabilidade de tirarmos 3 vezes consecutivas o número 2 num lançamento de dados.

O objetivo desse capítulo é apresentarmos os aspectos básicos sobre a teoria de probabilidades.

<u>Definições</u>:

1. Experimentos que ao serem repetidos nas mesmas condições não reproduzem o mesmo resultado são determinados experimentos aleatórios,

2. Espaço amostral é o conjunto de todos os resultados possíveis.

Ex: No lançamento de um dado, o espaço amostral $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

3. Evento: um resultado que se queira (sub-conjunto de resultados de um experimento)

4. Probabilidade: Consideramos um espaço amostral S com N eventos simples, que suporemos igualmente prováveis, seja $\underline{\underline{A}}$ um evento de $\underline{\underline{S}}$ composto de $\underline{\underline{m}}$ eventos simples. A probabilidade de A, que chamaremos de $P(A)$ é definida por $P(A) = \frac{m}{N}$.

<u>Propriedades</u>:

i) $P(A) \geq 0$ para todo $A \subset S$

ii) se A e B são mutuamente exclusivos,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

iii) $P(S) = 1$.

Distribuição de probabilidade de variáveis aleatórias discretas.

Variável aleatória ⇒ é uma função definida num espaço amostral que assume valores reais. Dentre os exemplos, citamos o número de peças defeituosas entre n peças retiradas de uma linha de produção, a duração de um componente num circuito, o número de partículas radioativas desintegradas em um dado intervalo de tempo e etc..

A distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta X, definida num espaço amostral S, é uma tabela que associa a cada valor de X uma probabilidade.

Ex: lançamento consecutivo de uma moeda

$X \Rightarrow$ função definida no espaço amostral que é igual ao número de caras nos dois lançamentos

S	X
$C\ C$	2
$C\ \bar{C}$	1
$\bar{C}\ C$	1
$\bar{C}\ \bar{C}$	0

$C \equiv$ cara

$\bar{C} \equiv$ coroa

$P(X=0) = \frac{1}{4}$, $P(X=1) = \frac{1}{2}$, $P(X=2) = \frac{1}{4}$

Ensaios de Bernoulli

É definida pelas seguintes condições:

i) Considera-se em cada ensaio somente a ocorrência de um evento (sucesso) e a não ocorrência (falha)

ii) Experimentos são independentes.

iii) a probabilidade de sucesso vale $\underline{\underline{p}}$ e é a mesma em todos os experimentos. A probabilidade de falha vale $1-p$.

a probabilidade de sucesso nos $\underline{\underline{k}}$ primeiros experimentos e falha nos $n-k$ experimentos é $p^k(1-p)^{n-k}$

Seja X o evento no qual tem-se $\underline{\underline{k}}$ sucessos e $n-k$ falhas. nesse caso

$$P[X = k] = \underbrace{\binom{n}{k}}\; p^k (1-p)^{n-k} \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

Fator combinatorial levado em conta pois não importa a sequência na qual o sucesso ocorreu.

O número de sucesso $\underline{\underline{X}}$ em $\underline{\underline{n}}$ experimentos pode ser representado por uma variável aleatória na qual a cada experimento é atribuído o valor 0 ou 1.

Note que a distribuição acima (binomial) é normalizada:

$$\sum_{k=0}^{n} P[X=k] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= [p + (1-p)]^n = 1$$

A seguir alguns gráficos da distribuição binomial para diferentes $\underline{\underline{p}}$ e $\underline{\underline{n}}$. As curvas azuis correspondem a curva $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$,

onde $\bar{x} = Np$ e $\sigma^2 = Np(1-p)$.

Claramente a distribuição binomial aproxima-se da curva acima quando N aumenta.

Média e Variância

Tipicamente a média $\langle x \rangle$ ou momentos do tipo $\langle x^k \rangle$ são importantes pois nos fornecem informações complementares acerca da distribuição. Também, eles nos permitem "reconstruir" $P[X=k]$.

No caso do experimento de Bernoulli, a "média" de um sucesso é dada por

$$\langle x \rangle = 1 \cdot p + 0\,(1-p) = p.$$

Para a distribuição binomial, temos

$$\langle x \rangle = \sum_{k=0}^{n} k\, P[X=k]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$k=0$ não contribui para a média

$$j = k-1$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{j!\,(n-1-j)!} p^{j+1} (1-p)^{n-j-1}$$

$$= np \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!\,(n-1-j)!} p^j (1-p)^{n-1-j} = np\,[p+(1-p)]^{n-1}$$

$$= np.$$

A Variância é definida por

$$\sigma^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 - 2x\langle x \rangle + \langle x \rangle^2 \rangle$$

$$= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

(a média da "média" é a média)

Vamos obter $\langle x^2 \rangle$ para a distribuição binomial

$$\langle x^2 \rangle = \sum_{k=0}^{n} k^2 \, P[X=k] = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \underset{\substack{\uparrow \\ j=k-1}}{=} p \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) \frac{n!}{j!\,(n-j-1)!} p^j (1-p)^{n-1-j}$$

$$= pn \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) \frac{(n-1)!}{j!\,(n-1-j)!} p^j (1-p)^{n-1-j}$$

$$= np \left[1 + \sum_{j=0}^{n-1} j \frac{(n-1)!}{j!\,(n-1-j)!} p^j (1-p)^{n-1-j} \right]$$

$$= np\,[1 + (n-1)p]$$

Logo $\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = np\,[1+(n-1)p] - n^2p^2$

$$= np(1-p).$$

Distribuição de Poisson

Ela aparece em diferentes contextos, dentre eles, o número de chamadas telefônicas por tempo, o número de defeitos por unidade de área, a distribuição de Erdos-Renyi e outros.

A distribuição de Poisson é um limite para a distribuição binomial quando os ensaios de Bernoulli $\longrightarrow \infty$ mas o produto $n p_n = \lambda$ é constante). Neste caso,

$P[X_n = k] = \binom{n}{k} p_n^{k} (1-p_n)^{n-k}$ é dado por

$$= \frac{n(n-1)\dots[n-(k-1)](n-k)!}{k!\,(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

Para $n \to \infty$ $\quad 1-\frac{1}{n}, 1-\frac{2}{n}, \dots, 1-\frac{(k-1)}{n} \to 1.$

Além disso, $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} \longrightarrow e^{-\lambda}$ e

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \longrightarrow 1.$$

Portanto $P[X_n = k] \longrightarrow \lambda^{k} e^{-\lambda} / k!$ $\quad k = 0, 1, 2, \dots$

Note que a distribuição acima é normalizada uma vez que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} . e^{\lambda} = 1$

Cálculo das Médias e Variância

$$\langle x \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k \, P[x_n = k] = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \underset{\substack{\uparrow \\ \ell = k-1}}{=} \lambda e^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^\ell}{\ell!} = \underline{\lambda}$$

$$\langle x^2 \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \, P[x_n = k] = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 \lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \lambda^k}{(1+k)!} \underset{\substack{\uparrow \\ \ell = k-1}}{=} e^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+1) \frac{\lambda . \lambda^\ell}{\ell!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\ell \lambda^\ell}{\ell!} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^\ell}{\ell!} \right] = \lambda^2 + \lambda$$

Finalmente, $\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \lambda$.

Distribuição de Gibbs (discreta)

Uma distribuição de probabilidades muito importante na Física Estatística é a distribuição de Gibbs (Boltzmann-Gibbs).

Para um sistema com níveis de energia discretos ele é dado por

$$P_n = \frac{e^{-\beta E_n}}{S}, \quad \text{onde} \quad E_n > 0,$$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} \quad e \quad \beta = \frac{1}{K_\beta T}$$

Note que a uma dada temperatura T, os níveis de energia "mais altos" são exponencialmente "menos" populados. Note que $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$.

Limites importantes:

$T \to 0$ $(\beta \to \infty)$. Exceto para $E_0 \to 0$, $e^{-\beta E_n} \to 0$ e $P_0 = 1$ e $P_n = 0$, de forma que os níveis além do estado fundamental possuem probabilidade nula de estarem ocupados.

À medida que T aumenta, algumas "partículas" ou os estados excitados adquirem probabilidade não nula de estarem ocupados.

Para $T \to \infty$ $(\beta \to 0)$ vemos que $P_0 = P_1 = \dots \frac{1}{Z}$, implicando que todos os níveis de energia adquirem igual probabilidade de estarem ocupados.

$$\langle E_n \rangle \text{ e } \langle E_n^2 \rangle - \langle E_n \rangle^2$$

$$\langle E_n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} E_n P_n = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{e^{-\beta E_n}}{Z}$$

$$= \frac{1}{Z}\left[-\frac{\partial}{\partial \beta}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}\right] = -\frac{1}{Z}\left(\frac{\partial Z}{\partial \beta}\right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z.$$

(Note que Z não depende de E_n, pois é calculado sobre todos os valores de E_n).

$$\langle E_n^2 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n^2 e^{-\beta E_n}}{Z}$$

$$= \frac{1}{Z}\frac{\partial^2}{\partial \beta^2}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} = \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2}$$

Mas $\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \ln Z = \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial}{\partial \beta}\ln Z\right) = \frac{1}{Z}\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2}\right) - \frac{1}{Z^2}\left(\frac{\partial Z}{\partial \beta}\right)^2.$

Comparando as expressões acima, temos que:

7

$$\langle E_n^2 \rangle - \langle E_n \rangle^2 = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \ln Z$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \beta} \langle E_n \rangle = k_B T^2 \frac{\partial \langle E_n \rangle}{\partial T}$$

Identificando $\langle E_n \rangle$ com a energia média,

podemos identificar $\langle E_n^2 \rangle - \langle E_n \rangle^2 = k_B T^2 C_V$,

onde C_V é a capacidade térmica.

Note que $\langle E_n^2 \rangle - \langle E_n \rangle^2 \geq 0$ implica que $C_V \geq 0$, em consistência com a 2ª lei da Termodinâmica.

Distribuição de probabilidade contínua

Algumas variáveis aleatórias, dentre elas, o tempo de duração de uma lâmpada não assume valores discretos, mas são contínuos. Existem muitas outras que são variáveis contínuas. Nestes casos, as probabilidades estarão definidas num "range" específico de intervalos, ao invés das variáveis discretas. Mais especificamente, introduzimos a probabilidade infinitesimal, que é expressa pela ~~dep~~ densidade de probabilidade $\rho(x)$ multiplicada pelo intervalo infinitesimal dx

$\rho(x) \geq 0$ de forma que $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\, dx = 1$

A probabilidade de uma variável aleatória pertencente ao intervalo $[a, b]$ é dada por $P[a < x \leq b] = \int_a^b \rho(x)\, dx$

A partir de $\rho(x)$, os momentos da distribuição são obtidos de forma análoga ao caso discreto e dados por

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\, \rho(x)\, dx$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \rho(x)\, dx$$

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \rho(x)\, dx$$

Como um exemplo de distribuição de probabilidades contínua, citamos a distribuição Gaussiana, que descreve uma enormidade classe de sistemas. Veremos mais a diante, que uma dada distribuição de probabilidades possuindo média e variância definidas converge para uma distribuição Gaussiana no limite em que o número de experimentos (ensaios) vai a infinito. Ela possui distribuição de probabilidades dada por:

$$\rho(x) = \frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$

$f(x)$ é normalizada pois

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\sigma^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \sqrt{2\pi\sigma^2} = 1 .$$

A média $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = 0$. Por outro lado, $\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx =$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx \quad \left(a = \frac{1}{2\sigma^2} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left[-\frac{d}{da} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left[-\frac{d}{da} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}} \frac{(2\sigma^2)^{3/2}}{2} = \sigma^2,$$

como esperado.

Portanto $\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \sigma^2$.

Distribuição Normal

A distribuição normal é obtida a partir da distribuição normal ~~de forma~~ a partir da mudança de variáveis

$$Z = X + \mu \quad \text{e portanto}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}} .$$

Como antes, os momentos da distribuição podem ser obtidos de forma análoga

$$\langle z \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} z\, \rho(z)\, dz = \mu$$

$$\langle z^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} z^2\, \rho(z)\, dz = \sigma^2 + \mu^2 .$$

Estes resultados podem ser entendidos usando os resultados anteriores.

Como $\langle z \rangle = \langle x \rangle + \mu$, onde $\langle x \rangle = 0$,

obtemos $\langle z \rangle = 0$.

Analogamente $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \cancelto{0}{\langle x \rangle^2}$ e

$$\sigma^2 = \langle (z - \mu)^2 \rangle = \langle z^2 \rangle - 2\langle z \rangle \mu + \mu^2$$

$$= \langle z^2 \rangle - \mu^2 \quad \text{e}$$

portanto $\langle z^2 \rangle = \sigma^2 + \mu^2$.

Distribuição de Boltzmann-Gibbs

Sistemas clássicos em equilíbrio térmico com um reservatório térmico a temperatura T são descritos pela distribuição de

Probabilidades canônica:

$$\rho(q,p) = \frac{1}{h} \frac{dq\,dp}{Z} e^{-\beta \mathcal{H}(q,p)},$$

onde $\mathcal{H}(q,p)$ é a Hamiltoniana do sistema, expressa em termos das variáveis canônicas q e p, Z é a função de normalização (função de partição). Uma vez que se trata de uma densidade de probabilidades

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq\,dp}{h} \frac{e^{-\beta \mathcal{H}(q,p)}}{Z} = 1,$$

(as coordenadas q e p assumem valores de $-\infty$ a ∞)

onde $Z = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq\,dp}{h} e^{-\beta \mathcal{H}(q,p)}$

Exemplo: Oscilador harmônico clássico descrito pela Hamiltoniana $\mathcal{H}(q,p) = \frac{p^2}{2M} + \frac{M\omega^2 q^2}{2}$

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq\,dp}{h} e^{-\beta\left[\frac{p^2}{2M} + \frac{M\omega^2 q^2}{2}\right]}$$

$$= \frac{1}{h}\sqrt{\frac{2\pi}{\beta M \omega^2}}\sqrt{\frac{2\pi M}{\beta}} = \frac{2\pi K_B T}{h\omega}$$

Vimos anteriormente que $\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$, de forma que $\langle E \rangle = K_B T$, em analogia/consistência com o princípio da equipartição de energia.

Função geradora

A função geradora de uma variável aleatória X, definida por $\phi_X(t)$ é definida

por $$\phi_X(t) = \langle e^{tX} \rangle$$ para todo t,

em que a média é finita.

Para variável aleatória discreta

$$\phi_X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{t x_i} \, P[X = x_i],$$

e para a variável aleatória contínua

$$\phi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) \, dx$$

A obtenção da função geradora é vantajosa a fim de obtermos os momentos da distribuição associada à variável aleatória X, conforme vemos a seguir.

Tomando a derivada de $\phi_X(t)$ com respeito a t obtemos

$$\frac{d\phi_X(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \, e^{t x_i} \, P[X = x_i]$$

Calculando-a no ponto $t=0$, temos

$$\frac{d\phi_X(0)}{dt} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \, P[X = x_i] = \langle X \rangle$$

Analogamente, podemos tomar a n-ésima derivada de $\phi_x(t)$ e calculá-lo em $t=0$

$$\left.\frac{d^n \phi_x(t)}{dt^n}\right|_{t=0} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^n P[x=x_i] = \langle x^n \rangle.$$

Exemplos:

1) Função geradora e momentos da distribuição ~~não~~ binomial

$$\phi_k(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= (p e^t + (1-p))^n$$

$$\langle k \rangle = \frac{d}{dt}\phi_k(0) = n(p e^t + (1-p))^{n-1} p e^t \Big|_{t=0}$$

$$= np$$

$$\langle k^2 \rangle = \frac{d^2}{dt^2}\phi_k(0) = np\Big[(p e^t + (1-p))^{n-1} e^t +$$

$$(n-1)(p e^t + (1-p))^{n-2} e^{2t} p\Big]\Big|_{t=0}$$

$$= np[1+(n-1)p] = np + (n^2-n)p^2$$

$$= n(n-1)p^2 + np$$

$\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 = np - np^2 = np(1-p)$, o que concorda com os resultados anteriores

2) Distribuição de Poisson

$$\phi_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^t \lambda)^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \exp\left[\lambda e^{t}\right]$$

$$\phi_k'(t) = \lambda e^{-\lambda} \exp\left[\lambda e^{t}\right] e^{t}$$

$$\langle k \rangle = \phi_k'(0) = \lambda$$

$$\phi_k''(t) = \lambda e^{-\lambda}\left[\exp\left[\lambda e^{t}\right] e^{t} + \lambda e^{2t} \exp(\lambda e^{t})\right]$$

$$\phi_k''(0) = \lambda + \lambda^2$$

$$\boxed{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 = \sigma^2}$$

//

Função Característica

A função característica $g(k)$ de uma variável aleatória x é definida como a transformada de Fourier da probabilidade/densidade de probabilidade associada a x, isto é,

$$g(k) = \int \rho(x)\, e^{ikx}\, dx = \langle e^{ikx} \rangle$$

onde $g(0) = 1$ e $|g(k)| \leq 1$

Em analogia à função geradora, ela é útil na obtenção dos momentos da distribuição, pois o desenvolvimento em série de Taylor, quando existe, nos dá

$$g(k) = \int \rho(x) \left[1 + ikx + \frac{(ik)^2}{2!} x^2 + \cdots \right] dx$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle \text{, onde}$$

$$\langle x^n \rangle = \int x^n \rho(x)\, dx$$

Cabe ressaltar que a função característica sempre existe! Entretanto, nem sempre é possível desenvolvê-la em série de Taylor, o que significa que a distribuição não possui momentos. A função característica também serve para gerar os cumulantes $\tilde{k}_n$, definidos através de

$$g(k) = \exp\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \tilde{k}_n \right\}.$$

Tomando o logaritmo do lado direito da expressão $g(k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle$ temos

$$= ik\langle x \rangle + \frac{(ik)^2}{2!} \langle x^2 \rangle + \cdots +$$

$$- \frac{1}{2} \left(ik\langle x \rangle + \frac{(ik)^2}{2!} \langle x^2 \rangle + \cdots \right)^2 + \frac{1}{3} \left(ik\langle x \rangle + \frac{(ik)^2}{2!} \langle x^2 \rangle + \cdots \right)^3$$

de forma que coletando os termos proporcionais a (ik), $\frac{(ik)^2}{2!}$, $\frac{(ik)^3}{3!}$, ... fornecerão os cumulantes $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}_3, \ldots$ respectivamente

Temos então:

$$\tilde{K}_1 = \langle x \rangle$$

$$\tilde{K}_2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$\tilde{K}_3 = \langle x^3 \rangle - \frac{3!}{2!} \langle x \rangle \langle x^2 \rangle + \frac{3!}{3!} \langle x \rangle^3$$

$$= \langle x^3 \rangle - 3 \langle x \rangle \langle x^2 \rangle + 2 \langle x \rangle^3$$

$$\tilde{K}_4 = \langle x^4 \rangle - \frac{4!}{2} \left(\frac{\langle x^2 \rangle^2}{2!2!} + 2 \frac{\langle x \rangle \langle x^3 \rangle}{3!} \right) + \frac{4!}{3} \left(3 \frac{\langle x \rangle^2 \langle x^2 \rangle}{2} \right) - \frac{4!}{4} \langle x \rangle^4$$

$$= \langle x^4 \rangle - 3 \langle x^2 \rangle^2 - 4 \langle x \rangle \langle x^3 \rangle + 12 \langle x^2 \rangle \langle x \rangle^2 - 6 \langle x \rangle^4 .$$

e assim por diante.

Soma de Variáveis Independentes

Duas variáveis aleatórias A e B são independentes se $\underbrace{P(A\,B)}_{\text{probabilidade conjunta}} = \underbrace{P(A)\cdot P(B)}_{\text{produto das probabilidades}}$

Usaremos a propriedade acima para obtermos as relações para soma de variáveis independentes, conforme ilustrados a seguir.

Seja $Y = X_1 + X_2 + \dots X_N$ a soma de N variáveis independentes. Neste caso, estamos interessados em calcular $\langle Y \rangle$ e $\langle Y^2 \rangle$.

$$\langle Y \rangle = \langle \sum_{i=1}^{N} x_i \rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle x_i \rangle$$

$$\langle Y^2 \rangle = \langle (\sum_{i=1}^{N} x_i)^2 \rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle x_i^2 \rangle + \sum_{(i,j)} \langle x_i x_j \rangle$$

Como X_i e X_j são independentes

$$\langle x_i x_j \rangle = \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle \text{ e}$$

portanto $\langle Y^2 \rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle x_i^2 \rangle + \sum_{(i,j)} \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle$ e

Finalmente $\langle Y^2 \rangle - \langle Y \rangle^2 = \sum_{i=1}^{N} [\langle x_i^2 \rangle - \langle x_i \rangle^2]$.

Podemos obter os resultados acima por meio da função característica.

Seja $G(k) = \int e^{iky} p(y)\, dy = \int e^{ik(x_1 + x_2 + \ldots + x_N)} p(y)\, dy.$

$$= \langle e^{ik(x_1 + x_2 + \ldots + x_N)} \rangle$$

Como são independentes, o último termo vale

$$\langle e^{ikx_1} \rangle . \langle e^{ikx_2} \rangle \ldots \langle e^{ikx_N} \rangle.$$

Para cada termo, temos $\langle e^{ikx_i} \rangle = e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \tilde{k}_n^{(i)}}$

de forma que

$$\langle e^{iky} \rangle = e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \left(\tilde{k}_n^{(1)} + \tilde{k}_n^{(2)} + \ldots + \tilde{k}_n^{(N)} \right)}$$

e portanto

$$\tilde{k}_n = \sum_{j=1}^{N} \tilde{k}_n^{(j)}$$

Como $\tilde{k}_1^{(n)} = \sum_{j=1}^{N} \tilde{k}_1^{(j)} \Rightarrow \langle y \rangle = \sum_{j=1}^{N} \langle x_j \rangle$

$$\tilde{k}_2^{(n)} = \sum_{j=1}^{N} \tilde{k}_2^{(j)} \Rightarrow \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2 = \sum_{j=1}^{N} \left[\langle x_i^2 \rangle - \langle x_j \rangle^2 \right]$$

Conclusão importante: Se as N variáveis independentes acima tiverem a mesma distribuição de probabilidades, então elas terão a mesma função característica, de modo que

$$G(k) = [g(k)]^N$$

e $\tilde{k}_n = N \tilde{k}_n^{(j)}$

Em particular $\langle y \rangle = N \langle x_j \rangle$ e

$$\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2 = N \{ \langle x_j^2 \rangle - \langle x_j \rangle^2 \}$$

(Usaremos os resultados acima para provarmos a lei dos grandes números e o teorema do limite central).

Outra propriedade importante (pode ser entendida por meio da relação entre os cumulantes e os momentos da distribuição) é $\tilde{k}_j(cx) = c^j \tilde{k}_j(x)$. (*)

<u>Função Característica da função gaussiana</u>

Dada a função gaussiana

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

em que um dado momento n (par)

da distribuição será dado por

$$\langle x^n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= 1.3.5\ldots(n-1)\,\sigma^n$$

Dessa forma, a função característica é dada por

$$g(k) = \langle e^{ikx} \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^{2m}}{(2m)!} 1.3.5\ldots(2m-1)\sigma^{2m}$$

$$\left(g(k) = 1 + \frac{(ik)^2}{2!} \langle x^2 \rangle + \frac{(ik)^4}{4!} \langle x^4 \rangle + \frac{(ik)^6}{6!} \langle x^6 \rangle + \ldots, \text{ onde} \right.$$

$$\left. \langle x^2 \rangle = \sigma^2, \quad \langle x^4 \rangle = 3\sigma^4, \quad \langle x^6 \rangle = 15\sigma^6, \ldots \right)$$

Tendo em vista que

$$\frac{(2m)!}{1.3.5\ldots(2m-1)} = 2^m m!$$

podemos reescrever $g(k)$ como

$$g(k) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-k^2\sigma^2)^m}{2^m m!} = e^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}}$$

O resultado acima foi obtido considerando uma distribuição gaussiana de média nula. Caso ela tenha média μ, basta realizarmos a mudança de variável $y = \mu + x$, de forma que

$$\langle e^{ik(\mu+x)} \rangle = e^{ik\mu} \langle e^{ikx} \rangle$$
$$= e^{ik\mu - \frac{k^2\sigma^2}{2}}$$

Usaremos o resultado acima para demonstrarmos o teorema do limite central,

Lei dos Grandes Números

Seja $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ uma sequência de N variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, isto é, que tenham a mesma distribuição de probabilidades. A lei dos grandes números estabelece que

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \xi_j \longrightarrow a \quad \text{quando } N \to \infty$$

onde $a = \langle \xi_j \rangle$ é a média da distribuição comum. A única condição para a validade da lei dos grandes números é que a média existe.

A demonstração (lei "fraca") usando a convergência das funções características a seguir:

Seja $y = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \xi_i$ com função característica $G_y(k) = \langle e^{iky} \rangle = \langle e^{i\frac{k}{N} \sum_{j=1}^{N} \xi_j} \rangle$

$$= \prod_{j=1}^{N} \langle e^{i\frac{k}{N} \xi_j} \rangle = \left[g\left(\frac{k}{N}\right) \right]^N$$

independência entre as variáveis

variáveis aleatórias identicamente distribuídas.

Neste caso, o j-cumulante $\tilde{k}_j$ é dado por

$\tilde{k}_j = N \tilde{k}_j^{(1)}\left(\frac{\xi_i}{N}\right)$ onde

$\tilde{k}_j^{(1)}\left(\frac{\xi_i}{N}\right)$ é o j-cumulante da variável $\frac{\xi_i}{N}$.

Conforme mencionamos em (*) na página 13 a propriedade $\tilde{k}_j^{(1)}\left(\frac{\xi_i}{N}\right) = \frac{1}{N^j} \tilde{k}_j^{(1)}(\xi_i)$

de forma que

$$\tilde{k}_j = N \left[\frac{1}{N^j} \tilde{k}_j(\xi_i) \right]$$

$\tilde{k}_1 = \tilde{k}_1(\xi_i)$, $\tilde{k}_2 = \frac{\tilde{k}_2}{N}(\xi_i)$ e assim por diante, de forma que $\tilde{K}_j \rightarrow 0$ para $j \geq 2$. Isto justifica considerarmos apenas o 1º cumulante, de forma que

$$g\left(\frac{k}{N}\right) \approx 1 + \frac{ik}{N} \langle \xi_i \rangle$$

$$= 1 + \frac{ika}{N} \quad \text{e}$$

portanto $$\left[g\left(\frac{k}{N}\right)\right]^N = \left[1 + \frac{ika}{N}\right]^N \rightarrow e^{ika}$$

quando $N \rightarrow \infty$.

O resultado acima é justamente a função característica de uma distribuição de probabilidades $f(y) = \delta(y-a)$ (a probabilidade de y assumir o valor $y = a$ é 1 e 0 caso contrário).

$$g(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iky}\, \delta(y-a)\, dy = e^{ika}$$

Fica ilustrado que $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \xi_i \rightarrow a$ qdo $N \rightarrow \infty$.

Teorema Central do limite

O teorema central do limite afirma que a variável aleatória z, definida por

$$z = \frac{1}{\sqrt{Nb}} \left\{ \sum_{j=1}^{N} \xi_j - Na \right\}$$ em que

ξ_j são independentes, identicamente distribuídas com média $\underline{\underline{a}}$ e variância $\underline{\underline{b}}$, possui distribuição gaussiana $\frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ no limite $N \to \infty$.

Para o teorema central do limite ser válido, basta existir média $\underline{\underline{a}}$ e variância $\underline{\underline{b}}$.

Vamos argumentar de forma análoga à demonstração da lei dos grandes números.

Seja $\tilde{\kappa}_n$ o n-ésimo cumulante da variável $\underline{\underline{z}}$. Então $\tilde{\kappa}_n = N \tilde{\kappa}_n^{(j)} \left(\frac{\xi_j}{\sqrt{Nb}} \right)$

Cada $\tilde{\kappa}_n^{(j)}$ satisfaz a propriedade

$$\tilde{\kappa}_n^{(j)} = N \frac{\tilde{\kappa}_n(\xi_j)}{(Nb)^{n/2}},$$

de forma que

$$\tilde{K}_1 = \frac{N^{1/2}}{b^{1/2}} \tilde{k}_1(\xi_j)$$

$$\tilde{k}_2 = \frac{1}{b} \tilde{k}_2(\xi_j)$$

$$\tilde{k}_3 = \frac{N^{-1/2}}{b^{3/2}} \tilde{k}_3(\xi_j)$$ e assim por diante,

ou seja, $\tilde{k}_n \to 0$ qdo $N \to \infty$ para $n > 2$.

Isto justifica considerarmos apenas $\tilde{K}_1$ e $\tilde{K}_2$ e portanto a função característica de cada uma das variáveis aleatórias será dada por

$$g(k) = \exp\left\{ ika - \frac{k^2}{2!} b \right\}$$ e

a função característica da variável $\underline{\underline{z}}$ será dada por

$$G_z(k) = \langle e^{ikz} \rangle = \left\langle \exp\left\{ i \frac{k}{\sqrt{Nb}} \sum_{j=1}^{N} (\xi_j - a) \right\} \right\rangle$$

e ainda

$$G_z(k) = \prod_{j=1}^{N} \langle e^{ik^* \xi_j} \rangle e^{-ik^* N a}$$

onde $k^* = \frac{k}{\sqrt{Nb}}$. A expressão acima é reescrita como

$$G_z(k) = \left\{ g(k^*)\, e^{-ik^* a} \right\}^N .$$

Usando $g(k^*) = \exp\left\{ ik^* a - \frac{k^{*2}}{2!} b \right\}$

temos

$$G_z(k) = e^{-\frac{N}{2}\left(\frac{k}{\sqrt{Nb}}\right)^2 b} = e^{-\frac{k^2}{2}},$$

o que corresponde à uma distribuição gaussiana

$$f(z) = \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} .$$

↳ Usaremos o teorema central do limite ao longo deste curso.