

---

# DISCIPLINA DE GRADUAÇÃO

## *SEL 0367 - Controle Adaptativo*

Docente: Prof Dr Marco Henrique Terra

SEL - Departamento de Engenharia Elétrica  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
São Carlos, SP

- 1- Introdução
- 2- Modelos Paramétricos
- 3- Identificação de Parâmetros: Tempo Contínuo
- 4- Identificação de Parâmetros: Tempo Discreto
- 5- Controle Adaptativo - Modelo de Referência: Tempo Contínuo
- 6- Controle Adaptativo - Alocação de Pólos: Tempo Contínuo
- 7- Controle Adaptativo para Sistemas de Tempo Discreto
- 8- Controle Adaptativo de Sistemas Não-Lineares

## Livros:

- 1- IOANNOU, P. and FIDAN, B. *Adaptive Control Tutorial*. SIAM - Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006
- 2- SASTRY, S. and BODSON, M. *Adaptive Control - Stability, Convergence and Robustness*. Prentice Hall, 1989.
- 3- FENG, G. and LOZANO, R. *Adaptive Control Systems*. Newnes, 1999.
- 4- TAO, G. *Adaptive Control Design and Analysis*. Wiley-Interscience, 2003.

## Material Complementar:

- <http://www.siam.org/books/dc11>
- [http://www.-rcf.usc.edu/ioannou/Robust\\_Adaptive\\_Control.htm](http://www.-rcf.usc.edu/ioannou/Robust_Adaptive_Control.htm)

## **Critério:**

- Exercícios
- Trabalhos
- Provas

**Objetivo:** Introduzir alguns conceitos matemáticos básicos indispensáveis ao desenvolvimento da teoria de controle adaptativo.

## Normas de Vetores e Matrizes

**Definição:** A norma  $|x|$  de um vetor  $x \in \mathbb{R}^m$  é uma função a valores reais com as seguintes propriedades:

- (i)-  $|x| \geq 0$  e  $|x| = 0 \iff x = 0$ .
- (ii)-  $|\alpha x| = |\alpha||x|$  para qualquer escalar  $\alpha$ .
- (iii)-  $|x + y| \leq |x| + |y|$  (Desigualdade Triangular).

## Normas de Vetores e Matrizes

**Definição:** A norma  $|x|$  de um vetor  $x \in \mathbb{R}^m$  é uma função a valores reais com as seguintes propriedades:

- (i)-  $|x| \geq 0$  e  $|x| = 0 \iff x = 0$ .
- (ii)-  $|\alpha x| = |\alpha||x|$  para qualquer escalar  $\alpha$ .
- (iii)-  $|x + y| \leq |x| + |y|$  (Desigualdade Triangular).

Uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  representa uma aplicação linear do espaço  $\mathbb{R}^m$  ao espaço  $\mathbb{R}^n$ . Definimos a norma induzida de  $A$  como:

**Definição:** Seja  $|\cdot|$  uma norma dada. Então, para uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , a quantidade  $\|A\|$  definida por

$$\|A\| := \sup_{x \neq 0, x \in \mathbb{R}^m} \frac{|Ax|}{|x|} = \sup_{|x|=1} |Ax|.$$

é denominada norma matricial induzida correspondente a norma de vetores  $|\cdot|$ .

## Norma $p$

Para cada  $p \in [1, +\infty)$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$  e  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  a norma vetorial

$$|x|_p := \left( \sum_{i=0}^m |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

e a correspondente norma induzida

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0, x \in \mathbb{R}^m} \frac{|Ax|_p}{|x|_p} = \sup_{|x|_p=1} |Ax|_p.$$

são denominadas norma vetorial  $p$  de  $x$  e norma induzida  $p$  de  $A$ .



## Norma $p$

Para cada  $p \in [1, +\infty)$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$  e  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  a norma vetorial

$$|x|_p := \left( \sum_{i=1}^m |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

e a correspondente norma induzida

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0, x \in \mathbb{R}^m} \frac{|Ax|_p}{|x|_p} = \sup_{|x|_p=1} |Ax|_p,$$

são denominadas norma vetorial  $p$  de  $x$  e norma induzida  $p$  de  $A$ .

OBS: A norma vetorial  $\infty$  do vetor  $x \in \mathbb{R}^m$  e norma induzida  $\infty$  da matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  são definidas por

$$|x|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, m\}} |x_i| \quad \text{e} \quad \|A\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \left\{ \sum_{j=1}^m |a_{ij}| \right\} \quad (\text{soma das linhas}),$$

respectivamente.

## Normas vetoriais e matriciais induzidas mais comuns:

Considere

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

**Norma Vetorial sobre  $\mathbb{R}^n$**

$$\|x\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i|$$

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|$$

$$\|x\|_2 = \left( \sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

**Norma Induzida sobre  $\mathbb{R}^{m \times n}$**

$$\|A\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, m\}} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right\}$$

$$\|A\|_1 = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} \left\{ \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \right\}$$

$$\|A\|_2 = \left( \lambda_{\max}(A^T A) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

## Norma $\mathcal{L}_p$

Para funções do tempo  $x(t)$ , definimos a norma  $\mathcal{L}_p$

$$\|x\|_p = \left( \int_0^{+\infty} |x(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}}$$

para  $p \in [1, +\infty)$  e dizemos que  $x \in \mathcal{L}_p$  quando  $\|x\|_p$  existe, isto é, quando  $\|x\|_p$  é finito.

## Norma $\mathcal{L}_p$

Para funções do tempo  $x(t)$ , definimos a norma  $\mathcal{L}_p$

$$\|x\|_p = \left( \int_0^{+\infty} |x(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}}$$

para  $p \in [1, +\infty)$  e dizemos que  $x \in \mathcal{L}_p$  quando  $\|x\|_p$  existe, isto é, quando  $\|x\|_p$  é finito.

A norma  $\mathcal{L}_\infty$  é definida como

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \geq 0} |x(t)|,$$

e dizemos que  $x \in \mathcal{L}_\infty$  quando  $\|x\|_\infty$  existe

## Norma $\mathcal{L}_p$

Para funções do tempo  $x(t)$ , definimos a norma  $\mathcal{L}_p$

$$\|x\|_p = \left( \int_0^{+\infty} |x(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}}$$

para  $p \in [1, +\infty)$  e dizemos que  $x \in \mathcal{L}_p$  quando  $\|x\|_p$  existe, isto é, quando  $\|x\|_p$  é finito.

A norma  $\mathcal{L}_\infty$  é definida como

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \geq 0} |x(t)|,$$

e dizemos que  $x \in \mathcal{L}_\infty$  quando  $\|x\|_\infty$  existe

OBS: Nas definições de normas  $\mathcal{L}_p$  e  $\mathcal{L}_\infty$ ,  $x(t)$  pode ser uma função escalar ou vetorial. Se  $x(t)$  é uma função escalar, então  $|\cdot|$  denota o valor absoluto. Se  $x(t)$  é uma função vetorial no  $\mathbb{R}^n$ , então  $|\cdot|$  denota qualquer norma no  $\mathbb{R}^n$ .

## Norma $l_p$

De forma similar, para sequências de números reais (sinais discretos no tempo)  $x : \mathcal{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\mathcal{Z}^+$  denota o conjunto dos números inteiros não-negativos, definimos a norma  $l_p$  como

$$\|x\|_p := \left( \sum_{i=0}^{+\infty} |x(i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < +\infty,$$

e a norma  $l_\infty$  como

$$\|x\|_\infty := \sup_{I \in \mathcal{Z}^+} |x(i)|.$$

OBS: Dizemos que  $x \in l_p$  (respectivamente,  $x \in l_\infty$ ) se  $\|x\|_p$  (respectivamente,  $\|x\|_\infty$ ) existe.

## **Espaço $\mathcal{L}_p$**

Para cada  $p \in [1, +\infty)$ , o conjunto das funções que pertencem a  $\mathcal{L}_p$  formam um espaço vetorial chamado de Espaço  $\mathcal{L}_p$ . Pode ser verificado que a norma  $\mathcal{L}_p$  satisfaz as propriedades (i)-(iii) de norma de vetores vistas anteriormente. Os resultados a seguir apresentam algumas propriedades da norma  $\mathcal{L}_p$ .

## Espaço $\mathcal{L}_p$

Para cada  $p \in [1, +\infty)$ , o conjunto das funções que pertencem a  $\mathcal{L}_p$  formam um espaço vetorial chamado de Espaço  $\mathcal{L}_p$ . Pode ser verificado que a norma  $\mathcal{L}_p$  satisfaz as propriedades (i)-(iii) de norma de vetores vistas anteriormente. Os resultados a seguir apresentam algumas propriedades da norma  $\mathcal{L}_p$ .

**Lema (Desigualdade de Holder):** Se  $p, q \in [1, +\infty)$  e  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , então  $f \in \mathcal{L}_p$  e  $g \in \mathcal{L}_q$  implicam que  $fg \in \mathcal{L}_1$  e

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$



## Espaço $\mathcal{L}_p$

Para cada  $p \in [1, +\infty)$ , o conjunto das funções que pertencem a  $\mathcal{L}_p$  formam um espaço vetorial chamado de Espaço  $\mathcal{L}_p$ . Pode ser verificado que a norma  $\mathcal{L}_p$  satisfaz as propriedades (i)-(iii) de norma de vetores vistas anteriormente. Os resultados a seguir apresentam algumas propriedades da norma  $\mathcal{L}_p$ .

**Lema (Desigualdade de Holder):** Se  $p, q \in [1, +\infty)$  e  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , então  $f \in \mathcal{L}_p$  e  $g \in \mathcal{L}_q$  implicam que  $fg \in \mathcal{L}_1$  e

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

OBS: Quando  $p = q = 2$ , a desigualdade de Holder torna-se a desigualdade de Schwarz, isto é,

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

## Espaço $\mathcal{L}_p$

Para cada  $p \in [1, +\infty)$ , o conjunto das funções que pertencem a  $\mathcal{L}_p$  formam um espaço vetorial chamado de Espaço  $\mathcal{L}_p$ . Pode ser verificado que a norma  $\mathcal{L}_p$  satisfaz as propriedades (i)-(iii) de norma de vetores vistas anteriormente. Os resultados a seguir apresentam algumas propriedades da norma  $\mathcal{L}_p$ .

**Lema (Desigualdade de Holder):** Se  $p, q \in [1, +\infty)$  e  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , então  $f \in \mathcal{L}_p$  e  $g \in \mathcal{L}_q$  implicam que  $fg \in \mathcal{L}_1$  e

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

OBS: Quando  $p = q = 2$ , a desigualdade de Holder torna-se a desigualdade de Schwarz, isto é,

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

**Lema (Desigualdade de Minkowski):** Para  $p \in [1, +\infty)$ ,  $f, g \in \mathcal{L}_p$  implicam que  $f + g \in \mathcal{L}_p$  e

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

## Exemplo:

Considere a função  $f(t) = \frac{1}{1+t}$ . Mostre que  $f \notin \mathcal{L}_1$ ,  $f \in \mathcal{L}_2$  e  $f \in \mathcal{L}_\infty$ .

## Solução:

Usando as definições de norma

$$\|f\|_p = \left( \int_0^{+\infty} |f(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{e} \quad \|f\|_{+\infty} = \sup_{t \geq 0} |f(t)|$$

temos:

$$\|f\|_1 = \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{1+\tau} \right) d\tau = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \left( \frac{1}{1+\tau} \right) d\tau = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(1+t) = +\infty.$$

$$\|f\|_2 = \left( \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{1+\tau} \right)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{1+t} + 1 \right) \right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \geq 0} \left| \frac{1}{1+t} \right| = 1.$$

Portanto,  $f \notin \mathcal{L}_1$ ,  $f \in \mathcal{L}_2$  e  $f \in \mathcal{L}_\infty$ . E mais,  $f \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$ .

## Algumas Propriedades de Funções

Os resultados a seguir serão extremamente importantes para o entendimento de alguns argumentos de estabilidade utilizados na análise de sistemas adaptativos.

**Lema:** As seguintes afirmações são válidas para funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

- (i)- Uma função  $f(t)$  que é limitada inferiormente e decrescente admite um limite quando  $t \rightarrow +\infty$ .
- (ii)- Considere as funções escalares não-negativas  $f(t)$  e  $g(t)$  definidas  $\forall t \geq 0$ . Se  $f(t) \leq g(t)$ ,  $\forall t \geq 0$  e  $g \in \mathcal{L}_p$  então  $f \in \mathcal{L}_p, \forall p \in [1, +\infty)$ .

OBS: Um caso particular do item (i) do Lema anterior é quando  $f \geq 0$  e  $\dot{f} \leq 0$ , o qual implica que  $f(t)$  converge para um limite quando  $t \rightarrow +\infty$ .

**Lema:** Se  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(\tau) d\tau$  existe e é finito e  $f(t)$  é uma função uniformemente contínua, então  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ .

**Lema:** Se  $f, \dot{f} \in \mathcal{L}_\infty$  e  $f \in \mathcal{L}_p$  para algum  $p \in [1, +\infty)$ , então  $f(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ .

## Diferenciação de uma Matriz

**Definição:** A derivada, com relação a  $t$ , de uma matriz  $A(t)$  de dimensão  $n \times m$  é definida por uma matriz cujo elemento  $(i, j)$  é a derivada do elemento  $(i, j)$  da matriz original  $A(t)$ , isto é,

$$\frac{d}{dt}A(t) = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}a_{11}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{1m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d}{dt}a_{n1}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{nm}(t) \end{bmatrix}.$$

No caso de um vetor  $n$ -dimensional  $x(t)$ , temos

$$\frac{d}{dt}x(t) = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x_1(t) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}x_n(t) \end{bmatrix}.$$

## Diferenciação de uma Matriz

Sejam  $A(t)$  e  $B(t)$  matrizes de dimensões compatíveis, cujos elementos são funções de  $t$ .

$$(1)- \frac{d}{dt}(A(t) + B(t)) = \frac{d}{dt}A(t) + \frac{d}{dt}B(t);$$

$$(2)- \frac{d}{dt}(A(t)B(t)) = \left(\frac{d}{dt}A(t)\right)B(t) + A(t)\left(\frac{d}{dt}B(t)\right).$$

Se  $A(t)$  é uma matriz invertível para todo  $t$ , então:

$$(1)- \left(\frac{d}{dt}A(t)\right)A^{-1}(t) + A(t)\left(\frac{d}{dt}A^{-1}(t)\right) = 0;$$

$$(2)- \left(\frac{d}{dt}A^{-1}(t)\right) = -A^{-1}(t)\left(\frac{d}{dt}A(t)\right)A^{-1}(t).$$

## Diferenciação de uma função escalar com relação a um vetor

Seja  $J(x)$  uma função escalar de um vetor  $x$   $n$ -dimensional. Assim:

$$\frac{\partial}{\partial x} J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} J(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} J(x) \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} J(x) & \frac{\partial}{\partial x_1 \partial x_2} J(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_1 \partial x_n} J(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n \partial x_1} J(x) & \frac{\partial}{\partial x_n \partial x_2} J(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n^2} J(x) \end{bmatrix}.$$

Além disso, para uma função escalar  $V(x(t))$ , temos:

$$\frac{d}{dt}(V(x(t))) = \left( \frac{\partial}{\partial x} V(x) \right) \frac{d}{dt} x(t).$$

## Diferenciação de uma função escalar com relação a um vetor

Para uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e um vetor  $x \in \mathbb{R}^n$ , temos:

$$(1)- \frac{\partial}{\partial x} (x^T Ax) = Ax + A^T x.$$

$$(2)- \text{Se } A \text{ é uma matriz simétrica } (A = A^T), \text{ então } \frac{\partial}{\partial x} (x^T Ax) = 2Ax.$$

Para uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , um vetor  $x \in \mathbb{R}^n$  e um vetor  $y \in \mathbb{R}^m$ , temos:

$$(1)- \frac{\partial}{\partial x} (x^T Ay) = Ay;$$

$$(2)- \frac{\partial}{\partial y} (x^T Ay) = A^T x.$$



## Diferenciação de uma função vetorial com relação a um vetor

Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função vetorial e um vetor  $x \in \mathbb{R}^n$ . Isto é,

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{bmatrix} \quad \text{onde } f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ para cada } i = 1, \dots, m \quad \text{com } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

A derivada de  $f$  com relação a  $x$  é dada pela matriz

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(x)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

a qual é denominada Matriz Jacobiana.

## Formas Quadráticas

Para uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simétrica e um vetor  $x \in \mathbb{R}^n$ , a forma

$$J(x) = x^T A x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji},$$

é chamada forma quadrática real em  $x$ .

**Definição:** A forma quadrática  $x^T A x$ , para uma matriz real simétrica, é dita

- definida positiva, se  $x^T A x > 0$  para todo  $x \neq 0$ ;
- semidefinida positiva, se  $x^T A x \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ;
- negativa definida, se  $x^T A x < 0$  para todo  $x \neq 0$ ;
- semidefinida negativa, se  $x^T A x \leq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ;
- indefinida, se  $x^T A x$  assume qualquer sinal.

## Matrizes Definidas Positivas, Semidefinidas Positivas e Indefinidas

**Definição:** Uma matriz simétrica  $A$  é dita semidefinida positiva se  $x^T Ax \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  e definida positiva se  $x^T Ax > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $x \neq 0$ . Ela é chamada semidefinida negativa (definida negativa) se  $-A$  é semidefinida positiva (definida positiva). Caso  $x^T Ax$  assuma qualquer sinal, a matriz  $A$  é dita indefinida.

## Matrizes Definidas Positivas, Semidefinidas Positivas e Indefinidas

**Definição:** Uma matriz simétrica  $A$  é dita semidefinida positiva se  $x^T Ax \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  e definida positiva se  $x^T Ax > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $x \neq 0$ . Ela é chamada semidefinida negativa (definida negativa) se  $-A$  é semidefinida positiva (definida positiva). Caso  $x^T Ax$  assumam qualquer sinal, a matriz  $A$  é dita indefinida.

Notação:  $A \succeq 0$  se  $A$  é semidefinida positiva e  $A \succ 0$  se  $A$  é definida positiva. Escrevemos,  $A \succeq B$  e  $A \succ B$  se  $(A - B) \succeq 0$  e  $(A - B) \succ 0$ , respectivamente.

## Matrizes Definidas Positivas, Semidefinidas Positivas e Indefinidas

**Definição:** Uma matriz simétrica  $A$  é dita semidefinida positiva se  $x^T Ax \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  e definida positiva se  $x^T Ax > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $x \neq 0$ . Ela é chamada semidefinida negativa (definida negativa) se  $-A$  é semidefinida positiva (definida positiva). Caso  $x^T Ax$  assuma qualquer sinal, a matriz  $A$  é dita indefinida.

Notação:  $A \succeq 0$  se  $A$  é semidefinida positiva e  $A \succ 0$  se  $A$  é definida positiva. Escrevemos,  $A \succeq B$  e  $A \succ B$  se  $(A - B) \succeq 0$  e  $(A - B) \succ 0$ , respectivamente.

**Lema:** Uma matriz simétrica  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é definida positiva se e somente se uma das condições são satisfeitas:

- (i)-  $\lambda_i(A) > 0, i = 1, \dots, n$ , onde  $\lambda_i(A)$  denota o  $i$ -ésimo autovalor de  $A$ , o qual é real já que  $A = A^T$ .
- (ii)- Existe uma matriz não-singular  $A_1$  tal que  $A = A_1 A_1^T$ .
- (iii)- Todo menor principal de  $A$  é positivo.
- (iv)-  $x^T Ax \geq \alpha |x|^2$  para algum  $\alpha > 0$  e  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .

## Análise de Estabilidade via Lyapunov:

Considere o sistema

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (\text{n\~{a}o-aut\~{o}nomo})$$

onde  $x$  é o vetor de estado  $n$ -dimensional e  $f(x, t)$  é um vetor  $n$ -dimensional cujos elementos são funções de  $x_1, \dots, x_n$  e  $t$ . Suponha que o sistema admita uma única solução para uma dada condição inicial.

Denotaremos a solução do sistema acima por  $\Phi(t, (x_0, t_0))$  onde  $x(t_0) = x_0$  e  $\Phi(t_0, (x_0, t_0)) = x_0$ .

**Definição:** No sistema  $\dot{x} = f(x, t)$ , um ponto  $x_e \in \mathbb{R}^n$  tal que  $f(x_e, t) = 0$  para todo  $t \geq 0$  é denominado ponto de equilíbrio do sistema.

**OBS:** Os pontos de equilíbrio correspondem às soluções constantes do sistema  $\dot{x} = f(x, t)$ . A determinação dos pontos de equilíbrio não envolve a solução das equações diferenciais do sistema  $\dot{x} = f(x, t)$ , mas somente do sistema  $f(x, t) = 0$ .

**Definição:** Um ponto de equilíbrio  $x_e$  é dito isolado se existir uma constante  $r > 0$  tal que o conjunto  $B(x_e, r) := \{x \mid \|x - x_e\| < r\} \subset \mathbb{R}^n$  não contém nenhum outro ponto de equilíbrio de  $\dot{x} = f(x, t)$  a não ser  $x_e$ .

## Análise de Estabilidade via Lyapunov:

Para cada  $\epsilon > 0$  e  $t_0$  defina os conjuntos

$$S(\delta) \equiv S(\delta(\epsilon, t_0)) := \{x_0 \mid \|x_0 - x_e\| < \delta, \forall t \geq t_0\};$$

$$S(\epsilon) := \{\Phi(t, (x_0, t_0)) \mid \|\Phi(t, (x_0, t_0)) - x_e\| < \epsilon, \forall t \geq t_0\}.$$

**Definição: (Estabilidade)** Um ponto de equilíbrio  $x_e$  é dito estável no sentido de Lyapunov se, dada uma região  $S(\epsilon)$ , existir uma região  $S(\delta)$  tal que as trajetórias partindo de  $S(\delta)$  não saem de  $S(\epsilon)$  quando  $t$  cresce indefinidamente.

OBS: Em geral, o número real  $\delta$  depende  $\epsilon > 0$  e  $t_0$ . Na definição acima, se  $\delta$  independe de  $t_0$ , então o ponto de equilíbrio  $x_e$  é dito uniformemente estável.

**Definição: (Estabilidade Assintótica Local)** Um ponto de equilíbrio  $x_e$  é dito assintoticamente estável, se ele é estável no sentido de Lyapunov e se toda solução partindo dentro de  $S(\delta)$  converge, sem sair de  $S(\epsilon)$ , para  $x_e$  quando  $t$  cresce indefinidamente.

## Análise de Estabilidade via Lyapunov:

**Definição: (Estabilidade Assintótica Global)** Um ponto de equilíbrio  $x_e$  é dito assintoticamente estável globalmente, se ele é estável no sentido de Lyapunov e se toda solução converge para  $x_e$  quando  $t$  cresce indefinidamente.

**Definição: (Instabilidade)** Um ponto de equilíbrio  $x_e$  é dito instável, se para algum  $\epsilon > 0$  e qualquer  $\delta > 0$ , tão pequenos quanto se queira, sempre há um estado  $x_0$  em  $S(\delta)$  tal que a trajetória  $\Phi(t, (x_0, t_0))$  abandona  $S(\epsilon)$  quando  $t$  cresce indefinidamente.

## Representação Gráfica:



## Análise de Estabilidade via Lyapunov:

**Funções escalares definidas positivas:** Uma função escalar  $V(x)$  é dita definida positiva em uma região  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , que inclui a origem do espaço de estados, se  $V(x) > 0$  para todo  $x \in \Omega$  não nulo e  $V(0) = 0$ .

**Definição:** Uma função escalar  $V(x)$  em uma região  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , que inclui a origem do espaço de estados, é dita:

- (i)- **definida negativa** se  $-V(x)$  é definida positiva;
- (ii)- **semidefinida positiva** se  $V(x) \geq 0$  para todo  $x \in \Omega$ ;
- (iii)- **semidefinida negativa** se  $-V(x)$  é semidefinida positiva;
- (iv)- **indefinida** se  $V(x)$  assume valores negativos e positivos em  $\Omega$ .

**Funções escalares definidas positivas (variante no tempo):** Uma função escalar variante no tempo  $V(x, t)$  é dita definida positiva em uma região  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , que inclui a origem do espaço de estados, se  $V(x, t) > 0$  é limitada inferiormente por uma função escalar definida positiva  $W(x)$  tal que  $V(x, t) > W(x)$  para todo  $t \geq t_0$  e  $V(0, t) = 0$  para todo  $t \geq t_0$ .

**Segundo Método de Lyapunov:** Trata-se de um método que não requer o conhecimento das expressões analíticas da solução do sistema dinâmico. O que torna-o extremamente conveniente para a análise da estabilidade de sistemas não-lineares, para os quais as soluções exatas, às vezes, podem não ser determináveis.

**Teorema:** Suponha que um sistema seja descrito por

$$\dot{x} = f(x, t),$$

onde  $f(0, t) = 0$  para todo  $t$ . Se existir uma função escalar  $V(x, t)$  tendo primeiras derivadas parciais contínuas e satisfazendo:

- (i)-  $V(x, t)$  é definida positiva,
- (ii)-  $\dot{V}(x, t)$  é definida negativa,

então o estado de equilíbrio na origem é uniformemente assintoticamente estável. Se, além disso,  $V(x, t) \rightarrow +\infty$  quando  $\|x\| \rightarrow +\infty$  então o estado de equilíbrio na origem é uniformemente assintoticamente estável de forma global. □

**Definição:** Uma função escalar  $V(x, t)$  que satisfaz as hipóteses do Teorema acima é definida como Função de Lyapunov.

**Exemplo:** Considere o sistema dinâmico descrito por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}.$$

É claro que a origem  $(x_1, x_2) = (0, 0)$  trata-se do único ponto de equilíbrio. Determine sua estabilidade.

**Solução:** Se definirmos função escalar  $V(x)$  como  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ , temos:

(i)-  $V(x_1, x_2)$  é definida positiva;

(ii)- a derivada temporal de  $V(x_1, x_2)$  ao longo da trajetória é dada por

$$\dot{V}(x_1, x_2) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -2(x_1^2 + x_2^2)^2,$$

a qual é definida negativa.

Portanto, de acordo com o Teorema anterior, o ponto de equilíbrio  $(x_1, x_2) = (0, 0)$  é uniformemente assintoticamente estável. Além disso, como  $V(x, t) \rightarrow +\infty$  quando  $\|x\| \rightarrow +\infty$  então  $(x_1, x_2) = (0, 0)$  é globalmente assintoticamente estável.

## **Estudo Preliminar**

É recomendável um estudo prévio detalhado do Apêndice (páginas 319-370) do Livro *Adaptive Control Tutorial* com o objetivo de resgatar alguns conceitos elementares, bem como familiarizar-se com novas definições e resultados de grande importância para o acompanhamento da disciplina.

**Objetivo:** Apresentar algumas características básicas de sistemas adaptativos e uma breve história da evolução do controle adaptativo ao longo dos anos.

---

**Definição:** O *Controle Adaptativo* pode ser definido como a combinação de um estimador de parâmetro, o qual gera *estimativas dos parâmetros online*, com uma lei de controle para controlar uma classe de plantas cujos parâmetros são completamente *desconhecidos* e ou podem variar com o tempo de forma imprevisível.

**Definição:** O *Controle Adaptativo* pode ser definido como a combinação de um estimador de parâmetro, o qual gera *estimativas dos parâmetros online*, com uma lei de controle para controlar uma classe de plantas cujos parâmetros são completamente *desconhecidos* e ou podem variar com o tempo de forma imprevisível.

A classe de controladores adaptativos a ser estudada nesta disciplina caracteriza-se pela combinação de:

- **estimador de parâmetros online** - estima a cada instante de tempo os parâmetros desconhecidos da planta;
- **lei de controle** - projeto motivado a partir do caso de parâmetros conhecidos.

**Definição:** O *Controle Adaptativo* pode ser definido como a combinação de um estimador de parâmetro, o qual gera *estimativas dos parâmetros online*, com uma lei de controle para controlar uma classe de plantas cujos parâmetros são completamente *desconhecidos* e ou podem variar com o tempo de forma imprevisível.

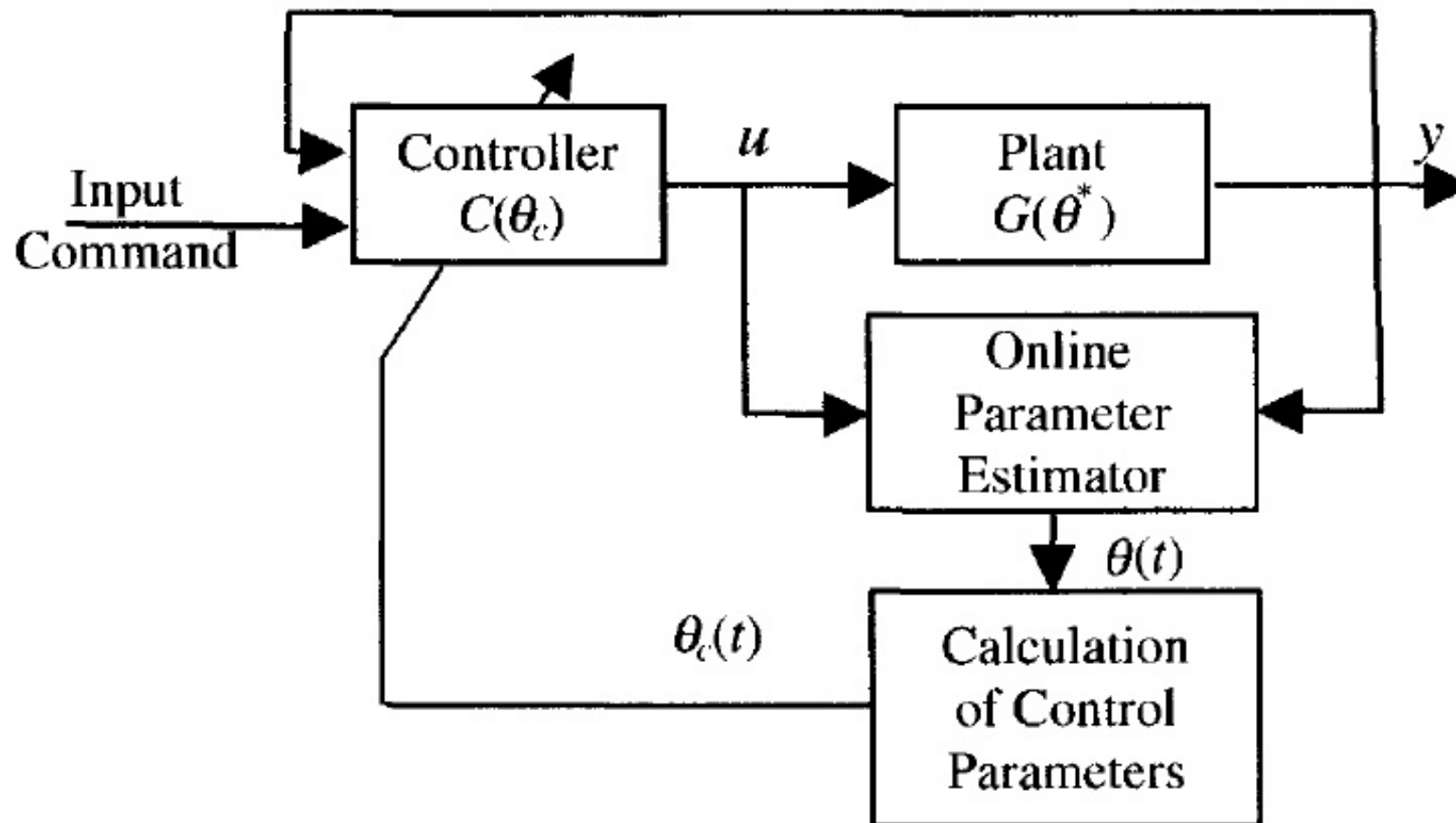
A classe de controladores adaptativos a ser estudada nesta disciplina caracteriza-se pela combinação de:

- **estimador de parâmetros online** - estima a cada instante de tempo os parâmetros desconhecidos da planta;
- **lei de controle** - projeto motivado a partir do caso de parâmetros conhecidos.

**Controle Adaptativo Indireto:** A cada instante de tempo  $t$ , a planta estimada é considerada como se fosse a planta "verdadeira" no cálculo dos parâmetros de controle.



Diagrama de Blocos - Controle Adaptativo Indireto



### **Problema de Controle Linear:**

Considere a planta escalar

$$\dot{x} = ax + u,$$

sendo  $u$  a entrada de controle e  $x$  o estado escalar da planta. Assuma o parâmetro  $a$  desconhecido. O objetivo é encontrar a lei de controle  $u$  tal que  $x$  seja limitado e tenda a zero com o passar do tempo.

### **Problema de Controle Linear:**

Considere a planta escalar

$$\dot{x} = ax + u,$$

sendo  $u$  a entrada de controle e  $x$  o estado escalar da planta. Assuma o parâmetro  $a$  desconhecido. O objetivo é encontrar a lei de controle  $u$  tal que  $x$  seja limitado e tenda a zero com o passar do tempo.

- Se  $a$  é um parâmetro conhecido, então a lei de controle

$$u = -kx, \quad k > |a|,$$

cumpre o objetivo do controle. Além disso, se apenas um limite superior  $\bar{a} \geq |a|$  é conhecido, então a lei de controle acima com  $k > \bar{a}$  também cumpre o objetivo.

- Porém, se o parâmetro  $a$  altera-se de forma que  $a > k > 0$ , então o sistema em malha fechada será instável.

### Problema de Controle Linear:

Considere a planta escalar

$$\dot{x} = ax + u,$$

sendo  $u$  a entrada de controle e  $x$  o estado escalar da planta. Assuma o parâmetro  $a$  desconhecido. O objetivo é encontrar a lei de controle  $u$  tal que  $x$  seja limitado e tenda a zero com o passar do tempo.

- Se  $a$  é um parâmetro conhecido, então a lei de controle

$$u = -kx, \quad k > |a|,$$

cumpre o objetivo do controle. Além disso, se apenas um limite superior  $\bar{a} \geq |a|$  é conhecido, então a lei de controle acima com  $k > \bar{a}$  também cumpre o objetivo.

- Porém, se o parâmetro  $a$  altera-se de forma que  $a > k > 0$ , então o sistema em malha fechada será instável.

**Conclusão:** Na ausência de um limite superior para o parâmetro desconhecido  $a$  da planta, nenhum controlador linear poderá estabilizá-la.

**Objetivo:** Apresentar várias formas de parametrizações para plantas, visando torná-las adequadas para a estimação de parâmetros.

O primeiro passo no projeto de algoritmos de identificação de parâmetros (IP) online é agrupar os parâmetros desconhecidos em um vetor, separando-os dos sinais conhecidos, funções de transferência e demais parâmetros conhecidos em uma equação que seja conveniente para estimação de parâmetros.

O primeiro passo no projeto de algoritmos de identificação de parâmetros (IP) online é agrupar os parâmetros desconhecidos em um vetor, separando-os dos sinais conhecidos, funções de transferência e demais parâmetros conhecidos em uma equação que seja conveniente para estimação de parâmetros.

## Modelo SPM

Considere a classe de parametrizações da forma

$$z = \theta^{*T} \phi,$$

sendo  $\theta^* \in \mathbb{R}^n$  o vetor com todos os parâmetros desconhecidos,  $z \in \mathbb{R}$  e  $\phi \in \mathbb{R}^n$  os sinais disponíveis para medição.

O primeiro passo no projeto de algoritmos de identificação de parâmetros (IP) online é agrupar os parâmetros desconhecidos em um vetor, separando-os dos sinais conhecidos, funções de transferência e demais parâmetros conhecidos em uma equação que seja conveniente para estimação de parâmetros.

## Modelo SPM

Considere a classe de parametrizações da forma

$$z = \theta^{*T} \phi,$$

sendo  $\theta^* \in \mathbb{R}^n$  o vetor com todos os parâmetros desconhecidos,  $z \in \mathbb{R}$  e  $\phi \in \mathbb{R}^n$  os sinais disponíveis para medição.

Definimos a classe de modelos acima como *static parametric model* (SPM).

O modelo SPM pode representar um sistema linear, não-linear, estático ou dinâmico.



## *Exemplo 1: Modelo SPM*

Considere o seguinte modelo ARMA

$$y(k) = -a_1y(k-1) - a_2y(k-2) + b_1u(k-1) + b_2u(k-2),$$

sendo as constantes  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  e  $b_2$  assumidas desconhecidas.

## *Exemplo 1: Modelo SPM*

Considere o seguinte modelo ARMA

$$y(k) = -a_1y(k-1) - a_2y(k-2) + b_1u(k-1) + b_2u(k-2),$$

sendo as constantes  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  e  $b_2$  assumidas desconhecidas.

Este modelo pode ser reescrito na forma SPM como

$$z(k) = \theta^{*T} \phi(k),$$

onde

$$z(k) = y(k),$$

$$\phi(k) = \left[ -y(k-1) \quad -y(k-2) \quad u(k-1) \quad u(k-2) \right]^T,$$

$$\theta^* = \left[ a_1 \quad a_2 \quad b_1 \quad b_2 \right]^T.$$

## Modelo DPM

O seguinte modelo da forma

$$z = W(q)\theta^{*T}\phi,$$

onde os sinais  $z \in \mathbb{R}$  e  $\phi \in \mathbb{R}^n$  são disponíveis para medição e  $W(q)$  é uma função de transferência estável própria também aparece frequentemente.

## Modelo DPM

O seguinte modelo da forma

$$z = W(q)\theta^{*T}\phi,$$

onde os sinais  $z \in \mathbb{R}$  e  $\phi \in \mathbb{R}^n$  são disponíveis para medição e  $W(q)$  é uma função de transferência estável própria também aparece frequentemente.

Definimos esta classe de modelos paramétricos como *dynamic parametric model* (DPM).

## Modelo DPM

O seguinte modelo da forma

$$z = W(q)\theta^{*T}\phi,$$

onde os sinais  $z \in \mathbb{R}$  e  $\phi \in \mathbb{R}^n$  são disponíveis para medição e  $W(q)$  é uma função de transferência estável própria também aparece frequentemente.

Definimos esta classe de modelos paramétricos como *dynamic parametric model* (DPM).

### Observações:

- (i) - a grande vantagem dos modelos SPM e DPM quando comparados a outros modelos é que o vetor de parâmetros desconhecidos  $\theta^*$  aparece linearmente,
- (ii) - esta propriedade é significativa no projeto de algoritmos de (IP), uma vez que as propriedades de convergência podem ser estabelecidas analiticamente.

## *Exemplo 2: Modelo DPM*

Considere o sistema

$$\dot{x} = -2x + \alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x)u,$$

sendo  $f(x)$  e  $g(x)$  funções conhecidas e  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  constantes desconhecidas.

## *Exemplo 2: Modelo DPM*

Considere o sistema

$$\dot{x} = -2x + \alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x)u,$$

sendo  $f(x)$  e  $g(x)$  funções conhecidas e  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  constantes desconhecidas.

O sistema acima pode ser reescrito como

$$x = \frac{1}{s + 2} [\alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x)u]$$

e podemos então colocá-lo na forma DPM

$$z = W(s)\theta^{*T}\phi$$

onde  $z = x$ ,  $W(s) = \frac{1}{s+2}$ ,  $\theta^* = [\alpha_1 \quad \alpha_2]^T$  e  $\phi = [f(x) \quad g(x)u]^T$ .

□

Às vezes, os parâmetros desconhecidos não podem ser escritos de forma linear nos modelos paramétricos. Nestes casos, a convergência global dos algoritmos (IP) baseado em tais modelos não pode ser demonstrada.



Às vezes, os parâmetros desconhecidos não podem ser escritos de forma linear nos modelos paramétricos. Nestes casos, a convergência global dos algoritmos (IP) baseado em tais modelos não pode ser demonstrada.

## Modelo B-SPM/B-DPM

*Caso Especial:* Um caso de não linearidade no modelo de parâmetros para o qual os resultados de convergência existem é quando os parâmetros desconhecidos aparecem na forma bilinear

$$z = \rho^*(\theta^* \phi + z_1)$$

ou

$$z = W(q)\rho^*(\theta^* \phi + z_1)$$

onde  $z \in \mathbb{R}$ ,  $\phi \in \mathbb{R}^n$  e  $z_1 \in \mathbb{R}$  são sinais disponíveis para medição a cada instante  $t$  e  $\rho^* \in \mathbb{R}^n$  e  $\theta^* \in \mathbb{R}^n$  são os parâmetros desconhecidos. A função de transferência  $W(q)$  é estável e assumida conhecida

Definimos os modelos paramétricos acima como *bilinear static parametric models* (B-SPM) ou *bilinear dynamic parametric models* (B-DPM).

## *Exemplo 3: Modelo B-SPM*

Considere novamente o seguinte modelo ARMA

$$y(k) = -a_1y(k-1) - a_2y(k-2) + b_1u(k-1) + b_2u(k-2),$$

com as constantes  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  e  $b_2$  são assumidas desconhecidas.

## Exemplo 3: Modelo B-SPM

Considere novamente o seguinte modelo ARMA

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2),$$

com as constantes  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  e  $b_2$  são assumidas desconhecidas.

Assuma agora que a constante  $b_1$  seja não-nula. Então, podemos obter um modelo do sistema na forma B-SPM

$$z = \rho^* (\theta^{*T} \phi(k) + z_1(k)),$$

onde

$$\begin{aligned} z(k) &= y(k), \\ z_1(k) &= u(k-1), \\ \phi(k) &= \begin{bmatrix} -y(k-1) & -y(k-2) & u(k-2) \end{bmatrix}^T, \\ \theta^* &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & b_2 \\ b_1 & b_1 & b_1 \end{bmatrix}^T, \\ \rho^* &= b_1. \end{aligned}$$

## Modelo SSPM

Em algumas aplicações de identificação de parâmetros ou controle adaptativo de plantas da forma

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

cujo estado  $x$  é disponível para medição, o seguinte modelo paramétrico pode ser utilizado

$$\dot{x} = A_m x + (A - A_m)x + Bu,$$

onde  $A_m$  é uma matriz de projeto estável,  $A$  e  $B$  são matrizes desconhecidas e  $x$  e  $u$  são vetores de sinais disponíveis para medição.

## Modelo SSPM

Em algumas aplicações de identificação de parâmetros ou controle adaptativo de plantas da forma

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

cujo estado  $x$  é disponível para medição, o seguinte modelo paramétrico pode ser utilizado

$$\dot{x} = A_m x + (A - A_m)x + Bu,$$

onde  $A_m$  é uma matriz de projeto estável,  $A$  e  $B$  são matrizes desconhecidas e  $x$  e  $u$  são vetores de sinais disponíveis para medição.

Este modelo também pode ser expresso na forma

$$\dot{x} = A_m x + \Theta^{*T} \Phi,$$

onde  $\Theta^{*T} = \begin{bmatrix} A - A_m & B \end{bmatrix}$  e  $\Phi = \begin{bmatrix} x^T & u^T \end{bmatrix}^T$ . Definimos esta classe de modelos paramétricos como *state-space parametric model* (SSPM).

## Modelo B-SSPM

Outra classe de modelos de espaço de estado que aparece em controle adaptativo é da forma

$$\dot{x} = A_m x + D\Theta^{*T}\Phi,$$

onde a matriz  $D$  também é desconhecida mas é definida positiva, definida negativa ou o sinal de cada um de seus elementos é conhecido.

Definimos esta classe de modelos paramétricos como *bilinear state-space parametric model* (B-SSPM).

## *Exemplo 4: Modelo SSPM*

Considere a planta

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

onde  $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ ,  $u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^T$  e  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$  são as matrizes com elementos desconhecidos.

## Exemplo 4: Modelo SSPM

Considere a planta

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

onde  $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ ,  $u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^T$  e  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$  são as matrizes com elementos desconhecidos.

O modelo SSPM é gerado como

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a_m & 0 \\ 0 & -a_m \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} a_{11} + a_m & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + a_m \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} u,$$

onde  $a_m > 0$  é uma constante de projeto.



## *Exemplo 4: Modelo SSPM*

Este modelo pode ser reescrito como

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a_m & 0 \\ 0 & -a_m \end{bmatrix} x + \Theta^{*T} \Phi,$$

onde

$$\Theta^{*T} = \begin{bmatrix} a_{11} + a_m & a_{12} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} + a_m & b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \quad e \quad \Phi = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & u_1 & u_2 \end{bmatrix}^T.$$

□

No próximo Capítulo faremos a dedução da expressão da lei adaptativa para a estimação das entradas desconhecidas das matrizes  $A$  e  $B$ .

O problema de identificação de parâmetros (IP), para os modelos paramétrico vistos anteriormente, pode ser estabelecido como segue:

- *Modelos SPM*: Dadas as medições  $z(t)$  e  $\phi(t)$ , gere  $\theta(t)$ , a estimativa do vetor desconhecido  $\theta^*$ , em cada instante de tempo  $t$ . O algoritmo IP atualiza  $\theta(t)$  com o tempo de tal maneira que, à medida que o tempo evolui,  $\theta(t)$  aproxima-se ou converge para  $\theta^*$ .
- *Modelos B-SPM/B-DPM*: Dadas as medidas de  $z$ ,  $z_1$  e  $\phi$ , gere as estimativas  $\theta(t)$  e  $\rho(t)$  de  $\theta^*$  e  $\rho^*$ , respectivamente, a cada instante de tempo  $t$  da mesma forma como nos casos SPM e DPM.
- *Modelos SSPM*: Dadas as medidas de  $x$ ,  $u$ , isto é,  $\Phi$ , gere a estimativa  $\Theta$  de  $\theta^*$  e, então, as estimativas  $\hat{A}(t)$  e  $\hat{B}(t)$  de  $A$  e  $B$ , respectivamente, a cada instante de tempo  $t$  como no caso SPM.

## Observações:

- Uma vez que estamos lidando com IP online, podemos esperar também que se  $\theta^*$  sofre uma modificação, então o algoritmo IP reagirá a tais mudanças e atualizará a estimativa  $\theta(t)$  para o novo valor  $\theta^*$ .
- Sob certas condições, a convergência ocorre de forma assintótica conforme o tempo evolui.
- O algoritmo (IP) online gera estimativas a cada instante  $t$  através de medidas atuais e passadas dos sinais. Razão esta, que tais algoritmos são denominados *Algoritmos IP Recursivos*.
- Diferentemente dos algoritmos não-recursivos, todas as medidas são coletadas a priori sobre grandes intervalos de tempo e são processadas offline para gerar as estimativas dos parâmetros desconhecidos.

# Identificação de Parâmetros

---

**Objetivo:** Projetar e analisar algoritmos para identificação de parâmetros online (*leis adaptativas*) para plantas de tempo contínuo.

O procedimento para identificação online de parâmetros envolve os seguintes passos:

- **Passo 1:** Agrupar os parâmetros desconhecidos em um vetor  $\theta^*$  e expressar a planta na forma de modelo paramétrico SPM, DPM, B-SPM ou B-DPM.

O procedimento para identificação online de parâmetros envolve os seguintes passos:

- **Passo 1:** Agrupar os parâmetros desconhecidos em um vetor  $\theta^*$  e expressar a planta na forma de modelo paramétrico SPM, DPM, B-SPM ou B-DPM.
- **Passo 2:** Usar a estimativa  $\theta(t)$  de  $\theta^*$  para a criação do *modelo de estimação* que tem a mesma forma do modelo paramétrico. O erro de estimação é utilizado para conduzir a lei adaptativa que gera  $\theta(t)$  online. A lei adaptativa é uma equação diferencial da forma

$$\dot{\theta}(t) = H(t)\epsilon(t),$$

onde  $\epsilon(t)$  é o erro de estimação que reflete a diferença entre  $\theta(t)$  e  $\theta^*$  e  $H(t)$  é o vetor variante no tempo que depende dos sinais medidos.

O procedimento para identificação online de parâmetros envolve os seguintes passos:

- **Passo 1:** Agrupar os parâmetros desconhecidos em um vetor  $\theta^*$  e expressar a planta na forma de modelo paramétrico SPM, DPM, B-SPM ou B-DPM.
- **Passo 2:** Usar a estimativa  $\theta(t)$  de  $\theta^*$  para a criação do *modelo de estimação* que tem a mesma forma do modelo paramétrico. O erro de estimação é utilizado para conduzir a lei adaptativa que gera  $\theta(t)$  online. A lei adaptativa é uma equação diferencial da forma

$$\dot{\theta}(t) = H(t)\epsilon(t),$$

onde  $\epsilon(t)$  é o erro de estimação que reflete a diferença entre  $\theta(t)$  e  $\theta^*$  e  $H(t)$  é o vetor variante no tempo que depende dos sinais medidos.

- **Passo 3:** Estabelecer condições que garantam que  $\theta(t)$  convirja para  $\theta^*$  à medida que  $t \rightarrow +\infty$ . Neste passo está envolvido o projeto da entrada da planta dado que o vetor de sinal admita certas propriedades, isto é, a garantia de que os sinais medidos carreguem informações suficientes sobre os parâmetros desconhecidos.

### **Exemplo: Caso de 1 Parâmetro**

Considere o modelo de planta de primeira ordem

$$y = \frac{a}{s+2}u, \quad (1)$$

sendo  $a$  o único parâmetro desconhecido e  $y$  e  $u$  são a saída e a entrada do sistema disponíveis para medição, respectivamente.

- **Passo 1: Modelo Paramétrico**

O modelo (1) pode ser reescrito como

$$y = \frac{a}{s+2}u = au_f, \quad (2)$$

sendo  $u_f = \frac{a}{s+2}$  disponível para medição já que  $u$  pode ser medido. Então, (2) está na forma SPM

$$z = \theta^* \phi,$$

sendo  $z = y$  e  $\phi = u_f$  disponíveis para medição e  $\theta^* = a$ .



- **Passo 2: Algoritmo de Identificação de Parâmetro**

- *Modelo de Estimação e Erro de Estimação*

Considere o modelo de estimação

$$\hat{z}(t) = \theta(t)\phi(t), \quad (3)$$

sendo  $\hat{z}(t)$  a estimativa de  $z(t)$  baseada no parâmetro estimado  $\theta(t)$  no instante  $t$ . Observe que

$$\hat{z}(t) - z(t) = \theta(t)\phi(t) - \theta^*\phi(t) = (\theta(t) - \theta^*)\phi(t) = \tilde{\theta}(t)\phi(t).$$

Como  $\theta^*$  é desconhecido, então  $\tilde{\theta}(t)$  não está disponível para medição. Dessa maneira, o único sinal a ser gerado, utilizando as medidas disponíveis, que associa a diferença entre  $\theta(t)$  e  $\theta^*$  é o sinal de erro

$$\epsilon(t) = \frac{z(t) - \hat{z}(t)}{m_s^2}, \quad (4)$$

o qual é denominado como *erro de estimação*.

OBS:  $m_s^2 \geq 1$  é um sinal de normalização projetado para garantir que  $\frac{\phi}{m_s}$  seja limitado.

- **Passo 2: Algoritmo de Identificação de Parâmetro**

- *Modelo de Estimação e Erro de Estimação*

Combinando (3) e (4), podemos expressar o erro de estimação como uma função do erro de parâmetro  $\tilde{\theta}(t)$ , isto é,

$$\epsilon(t) = -\frac{\tilde{\theta}(t)\phi(t)}{m_s^2}. \quad (5)$$

Note que, a expressão acima relaciona o erro de estimação  $\epsilon(t)$  como o erro de parâmetro  $\tilde{\theta}(t)$ . Além disso, o erro de estimação  $\epsilon(t)$  não pode ser gerado a partir de (5), já que  $\tilde{\theta}(t)$  não está disponível para medição.

- **Passo 2: Algoritmo de Identificação de Parâmetro**

- *Lei Adaptativa*

Uma ampla classe de *leis adaptativas* (estimadores de parâmetros) pode ser obtida para gerar  $\theta(t)$ , a estimativa de  $\theta^*$ , combinando (3), (4) e (5).

A abordagem considerada aqui será atualizar  $\theta(t)$  em uma direção que minimiza um determinada função custo do erro de estimação  $\epsilon(t)$ . Ou seja,  $\theta(t)$  é ajustado em um direção que faz  $|\epsilon(t)|$  cada vez menor até que um mínimo seja alcançado no qual  $|\epsilon(t)| = 0$  e a atualização é finalizada.

Considere o critério de custo

$$J(\theta) = \frac{(z - \theta\phi)^2}{2m_s^2} = \frac{\epsilon^2 m_s^2}{2}, \quad (6)$$

o qual será minimizado com relação a  $\theta$ .

- **Passo 2: Algoritmo de Identificação de Parâmetro**

- *Lei Adaptativa*

Usando o método do gradiente obtemos

$$\dot{\theta} = -\gamma \nabla J(\theta), \quad (7)$$

sendo  $\gamma > 0$  uma constante a qual denominamos de *ganho adaptativo* e  $\nabla J(\theta)$  é o gradiente de  $J$  com relação a  $\theta$ . No caso escalar em questão, temos

$$\nabla J(\theta) = \frac{dJ}{d\theta} = -\frac{(z - \theta\phi)}{m_s^2} \phi = -\epsilon\phi, \quad (8)$$

o que resulta na lei adaptativa

$$\dot{\theta} = \gamma\epsilon\phi, \quad \theta(0) = \theta_0. \quad (9)$$

A lei adaptativa encontrada deve garantir que a estimativa de parâmetro  $\theta(t)$  e a velocidade de adaptação  $\dot{\theta}(t)$  sejam limitadas e que o erro de estimação  $\epsilon(t)$  fique cada vez menor com o tempo.

- **Passo 3: Estabilidade e Convergência do Parâmetro**

Algumas condições deverão ser impostas ao vetor  $\phi(t)$  (*vetor regressor*) a fim de garantir a estabilidade e a convergência.

Usando (5) combinado ao fato que  $\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\theta} - \dot{\theta}^* = \dot{\theta}$  (pois  $\theta^*$  é constante), então (9) pode ser reescrita como

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma \frac{\phi^2}{m_s^2} \tilde{\theta}, \quad \tilde{\theta}(0) = \tilde{\theta}_0. \quad (10)$$

A equação diferencial acima admite a seguinte solução

$$\tilde{\theta}(t) = e^{-\gamma \int_0^t \frac{\phi^2(\tau)}{m_s^2(\tau)} d\tau} \tilde{\theta}_0, \quad (11)$$

a qual para  $\int_0^t \frac{\phi^2(\tau)}{m_s^2(\tau)} d\tau \geq \alpha_0 t$  e algum  $\alpha_0 > 0$ ,  $\tilde{\theta}(t)$  converge para  $\theta^*$  exponencialmente rápido. Segue de (11) que  $\tilde{\theta}(t)$  é limitada para qualquer  $\phi(t)$ . Além disso, de (10) é possível concluir que  $\dot{\theta}(t) = \dot{\tilde{\theta}}(t)$  é limitada devido a  $\frac{\phi(t)}{m_s(t)}$  ser limitada.

### Estabilidade e Convergência do Parâmetro - Outra Análise

Considere a função de Lyapunov

$$V = \frac{\tilde{\theta}^2}{2\gamma}.$$

A derivada de  $V$  ao longo da trajetória  $\tilde{\theta}(t)$  é dada por

$$\dot{V} = \frac{dV}{d\tilde{\theta}} \frac{d\tilde{\theta}}{dt} = \frac{\tilde{\theta}}{\gamma} \frac{d\tilde{\theta}}{dt} = -\frac{\phi^2}{m_s^2} \tilde{\theta}^2,$$

ou ainda, utilizando  $\epsilon = -\frac{\tilde{\theta}\phi}{m_s^2}$ , obtemos  $\dot{V} = -\frac{\phi^2}{m_s^2} \tilde{\theta}^2 = -\epsilon^2 m_s^2$ .

Note que  $\dot{V} = -\epsilon^2 m_s^2 \leq 0$ ,  $\forall \theta$ , logo  $\dot{V}$  é semidefinida negativa no espaço de  $\tilde{\theta}$ . Observe também que,  $\dot{V}$  não é definida negativa, pois  $\dot{V}$  pode se anular sem que  $\tilde{\theta}$  seja nulo.

Baseado nestes fatos, de acordo com os critérios de estabilidade via Lyapunov, podemos concluir que o ponto de equilíbrio  $\tilde{\theta}_e = 0$  trata-se de um ponto de equilíbrio uniformemente estável e a solução para  $\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma \frac{\phi^2}{m_s^2} \tilde{\theta}$ ,  $\tilde{\theta}(0) = \tilde{\theta}_0$  é uniformemente limitada.

### **Estabilidade e Convergência do Parâmetro - Outra Análise**

A estabilidade assintótica não foi garantida ainda. As propriedades de  $V$  e  $\dot{V}$  permitirão conclusões adicionais.

Como  $V(t) > 0$  e  $\dot{V}(t) \leq 0$ , segue que  $V(t)$  é limitada e conseqüentemente  $\tilde{\theta}(t)$  é limitada em virtude de  $V = \frac{\tilde{\theta}^2}{2\gamma}$ . Logo,  $V(t)$  converge para uma constante quando  $t \rightarrow \infty$ , isto é,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V = V_\infty \in \mathbb{R}$ .

Integrando ambos os lados da expressão  $\dot{V} = -\frac{\phi^2}{m_s^2} \tilde{\theta}^2 = -\epsilon^2 m_s^2$ , obtemos

$$\int_0^t \dot{V}(\tau) d\tau = - \int_0^t \epsilon^2(\tau) m_s^2(\tau) d\tau$$

ou

$$V(t) - V(0) = - \int_0^t \epsilon^2(\tau) m_s^2(\tau) d\tau.$$

Uma vez que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V = V_\infty$ , segue da expressão acima que

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \epsilon^2(\tau) m_s^2(\tau) d\tau = V_0 - V_\infty < +\infty.$$

### Estabilidade e Convergência do Parâmetro - Outra Análise

Da expressão anterior é possível concluir que  $\epsilon m_s \in \mathcal{L}_2$ , pois

$$\|\epsilon m_s\|_2 = \left( \int_0^{+\infty} \epsilon^2(\tau) m_s^2(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

E mais, como  $m_s^2 \geq 1$  então  $\epsilon^2 \leq \epsilon^2 m_s^2$ . Logo,  $\epsilon \in \mathcal{L}_2$ .

Da igualdade  $\epsilon = -\frac{\tilde{\theta}\phi}{m_s}$  concluímos que  $\frac{\tilde{\theta}\phi}{m_s} \in \mathcal{L}_2$ , já que  $\epsilon m_s \in \mathcal{L}_2$ .

E também  $\frac{\tilde{\theta}\phi}{m_s} \in \mathcal{L}_\infty$ , pois  $\tilde{\theta} \in \mathcal{L}_\infty$  e  $\frac{\phi}{m_s} \in \mathcal{L}_\infty$ . Dessa maneira,  $\frac{\tilde{\theta}\phi}{m_s} \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$ . Que por sua vez, implica que  $\epsilon m_s \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$ .

Observe que

$$\|\epsilon\|_\infty \leq \|\tilde{\theta}\|_\infty \left\| \frac{\phi}{m_s} \right\|_\infty \leq +\infty,$$

logo  $\epsilon \in \mathcal{L}_\infty$ . Então,  $\epsilon \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$ .



### Estabilidade e Convergência do Parâmetro - Outra Análise

Dada a expressão

$$\dot{\theta} = \gamma \epsilon \phi = \gamma \epsilon m_s \frac{\phi}{m_s},$$

como  $\frac{\phi}{m_s} \in \mathcal{L}_\infty$  e  $\epsilon m_s \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$  então  $\dot{\theta} \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$ .

Concluimos então que

(i)-  $\theta \in \mathcal{L}_\infty$ ,

(ii)-  $\epsilon, \epsilon m_s$  e  $\dot{\theta} \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$ ,

independentemente da limitação de  $\phi$ .

Seria desejável também concluir que  $\epsilon, \epsilon m_s$  e  $\dot{\theta}$  tendessem a zero quando  $t \rightarrow +\infty$ . Este fato pode ser estabelecido quando a entrada  $u$  é assumida limitada.

### **Estabilidade e Convergência do Parâmetro - Outra Análise**

Até agora não ficou garantido que  $\theta(t) \rightarrow \theta^*$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . No entanto, para que tal fato seja estabelecido é preciso impor que  $\frac{\phi}{m_s}$  seja persistentemente excitante (PE), isto é, satisfazer

$$\int_t^{t+T_0} \phi(\tau)\phi^T(\tau)d\tau \succeq \alpha_0 T_0 I \quad (12)$$

para algum  $\alpha_0 > 0$ ,  $T_0 > 0$  e  $\forall t \geq 0$ .

A condição PE é necessária e suficiente para que  $\theta(t) \rightarrow \theta^*$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . Na prática esta propriedade fica garantida pela escolha apropriada da entrada  $u$ .

### **Exemplo: Caso de 2 Parâmetros**

Considere o modelo de planta

$$\dot{y} = -ay + bu, \quad (13)$$

sendo  $a$  e  $b$  os parâmetros desconhecidos. Assuma que  $\dot{y}$ ,  $y$  e  $u$  são disponíveis para medição.

- **Passo 1: Modelo Paramétrico**

Como  $\dot{y}$ ,  $y$  e  $u$  são disponíveis para medição, então o modelo (13) pode ser reescrito na forma SPM

$$z = \theta^{*T} \phi, \quad (14)$$

onde  $z = \dot{y}$ ,  $\theta^* = [a \quad b]^T$ ,  $\phi = [u \quad -y]^T$ , e  $z$ ,  $\phi$  são disponíveis para medição.

- **Passo 2: Algoritmo de Identificação de Parâmetro**

- *Modelo de Estimação:*

$$\hat{z} = \theta^T \phi, \quad (15)$$

onde  $\theta(t)$  é a estimativa de  $\theta^*$  no instante de tempo  $t$ .

### Exemplo: Caso de 2 Parâmetros

- **Passo 2: Algoritmo de Identificação de Parâmetro**

- *Erro de Estimação:*

$$\epsilon = \frac{z - \hat{z}}{m_s^2}, \quad (16)$$

onde  $m_s$  é o sinal de normalização tal que  $\frac{\phi}{m_s} \in \mathcal{L}_\infty$ . Uma escolha direta para  $m_s$  é  $m_s^2 = 1 + \alpha \phi^T \phi$  para qualquer  $\alpha > 0$ .

- *Lei Adaptativa:* Usando o método do gradiente para minimizar a função custo

$$J(\theta) = \frac{\epsilon^2 m_s^2}{2} = \frac{(z - \theta^T \phi)^2}{2m_s^2} = \frac{(z - \theta_1 \phi_1 - \theta_2 \phi_2)^2}{2m_s^2}, \quad (17)$$

onde  $\phi_1 = u$  e  $\phi_2 = -y$ , obtemos

$$\dot{\theta} = -\Gamma \nabla J, \quad (18)$$

### Exemplo: Caso de 2 Parâmetros

- **Passo 2: Algoritmo de Identificação de Parâmetro**

- *Lei Adaptativa:*

onde

$$\nabla J = \begin{bmatrix} \frac{\partial J}{\partial \theta_1} & \frac{\partial J}{\partial \theta_2} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$\Gamma = \Gamma^T \succ 0$  é o ganho adaptativo, e  $\theta_1, \theta_2$  são os elementos de  $\theta$ . Desde que

$$\frac{\partial J}{\partial \theta_1} = -\epsilon \phi_1 \quad e \quad \frac{\partial J}{\partial \theta_2} = -\epsilon \phi_2 \quad (20)$$

nós temos que

$$\dot{\theta} = \Gamma \epsilon \phi, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad (21)$$

o qual trata-se da lei adaptativa para atualização de  $\theta(t)$  iniciando a partir da condição inicial  $\theta(0) = \theta_0$ .

### Exemplo: Caso de 2 Parâmetros

- **Passo 3: Estabilidade e Convergência do Parâmetro**

O erro de parâmetro  $\tilde{\theta} = \theta - \theta^*$  é obtido a partir de (16) e (21) notando que

$$\epsilon = \frac{z - \theta^T \phi}{m_s^2} = \frac{\theta^{*T} \phi - \theta^T \phi}{m_s^2} = -\frac{\tilde{\theta}^T \phi}{m_s^2} = -\frac{\phi^T \tilde{\theta}}{m_s^2} \quad (22)$$

e  $\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\theta}$ , isto é,

$$\dot{\tilde{\theta}} = \Gamma \phi \epsilon = -\Gamma \frac{\phi \phi^T}{m_s^2} \tilde{\theta}. \quad (23)$$

Observe que, a estabilidade do ponto de equilíbrio  $\tilde{\theta}_e = 0$  dependerá muito das propriedades matriz variante no tempo  $-\frac{\Gamma \phi \phi^T}{m_s^2}$ , que, por sua vez, depende da propriedade de  $\phi$ .

**Questão:** Quais propriedades de  $\phi$  garantirão que o ponto de equilíbrio  $\tilde{\theta}_e = 0$  seja exponencialmente estável?

### Persistência de Excitação e Entradas Suficientemente Ricas

**Definição:** O vetor  $\phi \in \mathbb{R}^n$  é PE com nível  $\alpha_0$  se ele satisfaz

$$\int_t^{t+T_0} \phi(\tau)\phi^T(\tau)d\tau \succeq \alpha_0 T_0 I \quad (24)$$

para algum  $\alpha_0 > 0$ ,  $T_0 > 0$  e  $\forall t \geq 0$ .

**Definição:** O sinal  $u \in \mathbb{R}$  é chamado suficientemente rico de ordem  $n$  se ele contém pelo menos  $\frac{n}{2}$  frequências distintas não-nulas.

Vamos considerar que o vetor de sinal  $\phi \in \mathbb{R}^n$  gerado por

$$\phi = H(s)u, \quad (25)$$

onde  $u \in \mathbb{R}$  e  $H(s)$  é um vetor cujos elementos são funções de transferência que são estritamente próprias com pólos estáveis.

**Teorema:** Considere  $\phi = H(s)u$  e assumamos que os vetores complexos  $H(j\omega_1), \dots, H(j\omega_n)$  sejam linearmente independentes sobre  $\mathbb{C}^n \forall \omega_1, \dots, \omega_n \in \mathbb{R}$ , onde  $\omega_i \neq \omega_j$  para  $i \neq j$ . Então,  $\phi$  é PE se e somente se  $u$  é suficientemente rico de ordem  $n$ .

### Algoritmos Gradientes baseados no Modelo Linear

O algoritmo gradiente é desenvolvido utilizando o método do gradiente para minimizar um funcional  $J(\theta)$  apropriado. Diferentes escolhas para  $J(\theta)$  resultam em algoritmos diferentes.

A estimativa  $\hat{z}$  de  $z$  é gerada pelo modelo de estimação

$$\hat{z} = \theta^T \phi, \quad (26)$$

onde  $\theta(t)$  é a estimativa de  $\theta^*$  no instante de tempo  $t$ . O erro de estimação é construído como

$$\epsilon = \frac{z - \hat{z}}{m_s^2} = \frac{z - \theta^T \phi}{m_s^2}, \quad (27)$$

onde  $m_s^2 \geq 1$  é o sinal de normalização para limitar  $\phi$ . O sinal de normalização assume frequentemente a forma  $m_s^2 = 1 + n_s^2$ , onde  $n_s^2 \geq 0$  é denominado como sinal de normalização estático para garantir que  $\frac{\phi}{m_s}$  seja limitada. Algumas escolhas imediatas para  $n_s^2$  são

$$n_s^2 = \alpha \phi^T \phi, \quad \alpha > 0 \quad e \quad n_s^2 = \phi^T P \phi, \quad P = P^T \succ 0,$$

onde  $\alpha$  é um escalar e  $P$  é uma matriz selecionada pelo projetista.



### Algoritmo Gradiente com Função Custo Instantânea

A função custo  $J(\theta)$  é escolhida como

$$J(\theta) = \frac{\epsilon^2 m_s^2}{2} = \frac{(z - \theta^T \phi)^2}{2m_s^2} \quad (28)$$

Em cada instante  $t$ , a função custo  $J(\theta)$  é uma função convexa em  $\theta$  e portanto admite um mínimo global.

O algoritmo gradiente assume a forma

$$\dot{\theta} = -\Gamma \nabla J, \quad (29)$$

onde  $\Gamma = \Gamma^T \succ 0$  é uma matriz de projeto denominada como *ganho adaptativo*.

Como  $\nabla J(\theta) = \frac{(z - \theta^T \phi)\phi}{m_s^2} = -\epsilon\phi$ , nós temos

$$\dot{\theta} = \Gamma \epsilon \phi. \quad (30)$$

A lei adaptativa (30) associada ao modelo de estimação (26), ao erro de estimação (27) e aos sinais medidos  $z$  e  $\phi$  constituem o algoritmo gradiente de identificação de parâmetro baseado na função custo instantânea.

### Algoritmo Gradiente com Função Custo Instantânea

**Teorema:** O algoritmo gradiente (30) garante que

- (i) -  $\epsilon, \epsilon m_s, \dot{\theta} \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$  e  $\theta \in \mathcal{L}_\infty$ .
- (ii) - Se  $\frac{\phi}{m_s}$  é PE, então  $\theta(t) \rightarrow \theta^*$  exponencialmente rápido. Além disso,

$$(\theta(t) - \theta^*)^T \Gamma^{-1} (\theta(t) - \theta^*) \leq (1 - \gamma_1)^n (\theta(t) - \theta^*)^T \Gamma^{-1} (\theta(t) - \theta^*), \quad (31)$$

onde  $0 \leq t \leq nT_0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  e

$$\gamma_1 = \frac{2\alpha_0 T_0 \lambda_{\min}(\Gamma)}{2 + \beta^4 \lambda_{\max}^2 T_0^2}, \quad \beta = \sup_t \left| \frac{\phi}{m_s} \right|. \quad (32)$$

- (iii) - Se a planta  $y = G(s)u$  possui pólos estáveis e nenhum cancelamento de pólos nulos e a entrada  $u$  é suficientemente rica de ordem  $n + m + 1$ , então  $\phi$  e  $\frac{\phi}{m_s}$  são PE. Além disso,  $|\theta(t) - \theta^*|$ ,  $\epsilon$ ,  $\epsilon m_s$  e  $\dot{\theta}$  convergem para zero exponencialmente rápido.

### Algoritmo Gradiente com Função Custo Integral

A função custo  $J(\theta)$  é escolhida como

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \epsilon^2(t, \tau) m_s^2(\tau) d\tau, \quad (33)$$

onde  $\beta > 0$  é uma constante denominada fator de esquecimento e

$$\epsilon(t, \tau) = \frac{z(\tau) - \theta^T(t)\phi(\tau)}{m_s^2}, \quad \epsilon(t, t) = \epsilon, \quad \tau \geq t, \quad (34)$$

é o erro de estimação que depende da estimativa  $\theta(t)$  e dos valores dos sinais em  $\tau \leq t$ . Veja que:

- O funcional custo penaliza todos os erros passados entre  $z(\tau)$  e  $\hat{z}(\tau)$  para  $\tau \leq t$ , obtidos pelo uso da estimativa atual  $\theta(t)$  com medidas passadas de  $z(\tau)$  e  $\phi(\tau)$ .
- O fator de esquecimento  $e^{-\beta(t-\tau)}$  é utilizado para dar mais peso para as informações mais recentes através do desconto das entradas anteriores.

### Algoritmo Gradiente com Função Custo Integral

Observe que  $J(\theta)$  é um função convexa de  $\theta$  a cada instante  $t$ . Portanto, admite um mínimo global. Uma vez que  $\theta(t)$  não depende de  $\tau$ , o gradiente de  $J$  com relação a  $\theta$  é fácil de calcular apesar da presença da integral. Aplicando o método do gradiente, temos

$$\dot{\theta} = -\Gamma \nabla J, \quad (35)$$

onde

$$\nabla J = - \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{z(\tau) - \theta^T(t)\phi(\tau)}{m_s^2} \phi(\tau) d\tau. \quad (36)$$

A lei adaptativa acima pode ser implementada como

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -\Gamma(R(t)\theta + Q(t)), & \theta(0) &= \theta_0, \\ \dot{R} &= -\beta R + \frac{\phi\phi^T}{m_s^2}, & R(0) &= 0, \\ \dot{Q} &= -\beta Q - \frac{z\phi}{m_s^2}, & Q(0) &= 0, \end{aligned} \quad (37)$$

onde  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $\Gamma = \Gamma^T \succ 0$  é o ganho adaptativo,  $n$  é a dimensão do vetor  $\theta^*$  e  $m_s$  é o sinal de normalização.

### Algoritmo Gradiente com Função Custo Integral

**Teorema:** O algoritmo gradiente com função custo integral garante que

- (i) -  $\epsilon, \epsilon m_s, \dot{\theta} \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$  e  $\theta \in \mathcal{L}_\infty$ .
- (ii) -  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\dot{\theta}(t)| = 0$
- (iii) - Se  $\frac{\phi}{m_s}$  é PE, então  $\theta(t) \rightarrow \theta^*$  exponencialmente rápido. Além disso, para  $\Gamma = \gamma I$ , o raio de convergência aumenta com  $\gamma$
- (iv) - Se  $u$  é suficientemente rico de ordem  $n + m + 1$  e a planta é estável e não admite cancelamentos de pólos nulos, então  $\phi$  e  $\frac{\phi}{m_s}$  são PE e  $\theta(t) \rightarrow \theta^*$  exponencialmente rápido.

□

### Algoritmo Mínimo Quadrado (MQ)

O método de MQ tem sido amplamente utilizado para estimação de parâmetros na forma recursiva, principalmente para sistemas de tempo discreto.

Considere o modelo linear

$$z = \theta^* \phi. \quad (38)$$

A estimativa  $\hat{z}$  de  $z$  e o erro de estimação são gerados como

$$\hat{z} = \phi^T \theta \quad \text{e} \quad \epsilon = \frac{z - \hat{z}}{m_s^2} = \frac{z - \theta^T \phi}{m_s^2}, \quad (39)$$

onde  $\theta(t)$  é a estimativa de  $\theta^*$  no instante  $t$ , e  $m_s^2 = 1 + n_s^2$  é projetado para garantir  $\frac{\phi}{m_s} \in \mathcal{L}_\infty$ .

### Algoritmo Mínimo Quadrado Recursivo com Fator de Esquecimento

Considere a função custo

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{(z(\tau) - \theta^T(t)\phi(\tau))^2}{m_s^2(\tau)} d\tau + \frac{1}{2} e^{-\beta t} (\theta - \theta_0)^T Q_0 (\theta - \theta_0), \quad (40)$$

onde  $Q_0 = Q_0^T \succ 0$  e  $\beta \geq 0$  são constantes de projeto e  $\theta_0 = \theta(0)$  é a estimativa inicial do parâmetro.

Como  $J(\theta)$  é uma função convexa em  $\theta$  sobre  $\mathbb{R}^n$  a cada instante  $t$ . Então, qualquer mínimo local é também global e satisfaz

$$\nabla J(\theta) = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (41)$$

O algoritmo MQ para gerar  $\theta(t)$ , a estimativa de  $\theta^*$ , é obtida através da solução de

$$\nabla J(\theta) = e^{-\beta t} Q_0 (\theta(t) - \theta_0) - \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{(z(\tau) - \theta^T(t)\phi(\tau))}{m_s^2(\tau)} \phi(\tau) d\tau = 0 \quad (42)$$

para  $\theta(t)$ , a qual resulta no algoritmo

### Algoritmo Mínimo Quadrado Recursivo com Fator de Esquecimento

$$\theta(t) = P(t) \left[ e^{-\beta t} Q_0 \theta_0 + \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{z(\tau)\phi(\tau)}{m_s^2(\tau)} d\tau \right], \quad (43)$$

onde

$$P(t) = \left[ e^{-\beta t} Q_0 + \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{\phi(\tau)\phi^T(\tau)}{m_s^2(\tau)} d\tau \right]^{-1} \quad (44)$$

é denominada *matriz de covariância*. Note que, como  $Q_0 = Q_0^T \succ 0$  e  $\phi\phi^T$  é semidefinida positiva, então  $P(t)$  existe a cada instante  $t$ .

Usando a identidade  $\frac{d}{dt} P P^{-1} = \dot{P} P^{-1} + P \frac{d}{dt} P^{-1} = 0$ , o fato que  $\epsilon m_s^2 = z - \theta^T \phi$  e derivando  $\theta(t)$  com relação a  $t$ , nós obtemos o *Algoritmo MQ Recursivo com fator de esquecimento*

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= P \epsilon \phi, & \theta(0) &= \theta_0 \\ \dot{P} &= \beta P - P \frac{\phi\phi^T}{m_s^2} P, & P(0) &= P_0 = Q_0^{-1} \end{aligned} \quad (45)$$



### **Algoritmo Mínimo Quadrado Recursivo com Fator de Esquecimento**

O próximo Teorema estabelece a estabilidade e a convergência de  $\theta(t)$  para  $\theta^*$  do algoritmo (45):

**Teorema:** Se  $\frac{\phi}{m_s}$  é PE, então o Algoritmo MQ com fator de esquecimento obtido garante que  $P$ ,  $P^{-1} \in \mathcal{L}_\infty$  e que  $\theta(t) \rightarrow \theta^*$  quando  $t \rightarrow \infty$ . A convergência de  $\theta(t) \rightarrow \theta^*$  é exponencial quando  $\beta > 0$ .



### Algoritmo Mínimo Quadrado Simples

Quando  $\beta = 0$  em (40), o algoritmo (45) torna-se

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= P\epsilon\phi, & \theta(0) &= \theta_0 \\ \dot{P} &= -P\frac{\phi\phi^T}{m_s^2}P, & P(0) &= P_0 = Q_0^{-1},\end{aligned}\quad (46)$$

o qual é denominado como *Algoritmo MQ Simples*.

**Teorema:** O algoritmo (46) garante que

- (i) -  $\epsilon, \epsilon m_s, \dot{\theta} \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$  e  $\theta, P \in \mathcal{L}_\infty$ .
- (ii) -  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \bar{\theta}$ , onde  $\bar{\theta}$  é um vetor constante.
- (iii) - Se  $\frac{\phi}{m_s}$  é PE, então  $\theta(t) \rightarrow \theta^*$  quando  $t \rightarrow \infty$ .
- (iv) - Se a planta  $y = G(s)u$  é estável e não admite cancelamentos de pólos nulos e  $u$  é suficientemente rico de ordem  $n + m + 1$ , então  $\phi$  e  $\frac{\phi}{m_s}$  são PE e  $\theta(t) \rightarrow \theta^*$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

### Algoritmo Mínimo Quadrado Simples

Observações:

- (i)- O Algoritmo MQ Simples garante que o parâmetro converge para uma constante  $\bar{\theta}$  sem qualquer restrição sobre o vetor regressor  $\phi$ . No entanto, se  $\frac{\phi}{m_s}$  é PE, então  $\bar{\theta} = \theta^*$ .
- (ii)- A convergência dos parâmetros estimados para valores constantes é uma propriedade única deste algoritmo.
- (iii)- Uma das inconveniências deste algoritmo é que a matriz de covariância  $P$  pode tornar-se arbitrariamente pequena e desacelerar a adaptação. Isto é, como

$$\frac{d(P^{-1})}{dt} = \frac{\phi\phi^T}{m_s^2} \succeq 0,$$

então  $P^{-1}$  pode crescer indefinidamente, o qual pode implicar que  $P$  tende a zero.

- (iv)- Outro problema deste algoritmo é que a convergência não pode ser garantida exponencial.

### Algoritmo Mínimo Quadrado Modificado

#### *MQ Simples*

Uma forma de evitar o problema do anulamento da matriz de covariância  $P$  é modificar o algoritmo MQ usando a seguinte redefinição

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= P\epsilon\phi, & \theta(0) &= \theta_0, \\ \dot{P} &= -P\frac{\phi\phi^T}{m_s^2}P, & P(t_r^+) &= P_0 = \rho_0 I, \\ m_s^2 &= 1 + n_s^2, & n_s^2 &= \alpha\phi^T\phi, \quad \alpha > 0,\end{aligned}\tag{47}$$

onde  $t_r^+$  é o instante de tempo no qual  $\lambda_{\min}(P(t)) \leq \rho_1$  e  $\rho_0 > \rho_1 > 0$  são alguns escalares de projeto. Devido a esta modificação,  $P(t) \succeq \rho_1 I, \forall t \geq 0$ . Dessa maneira,  $P$  é garantidamente definida positiva para  $\forall t \geq 0$ .

### Algoritmo Mínimo Quadrado Modificado

#### *MQ com Fator de Esquecimento*

Já no Algoritmo de MQ quando  $\beta > 0$ , o problema de  $P(t)$  tornar-se arbitrariamente pequeno não existe. No entanto,  $P(t)$  pode crescer indefinidamente. Para evitar também este fenômeno, o seguinte *Algoritmo MQ Modificado com Fator de Esquecimento* é utilizado:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= P\epsilon\phi \\ \dot{P} &= \begin{cases} \beta P - P \frac{\phi\phi^T}{m_s^2} P & \text{se } \|P(t)\| \leq R_0, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \end{aligned} \quad (48)$$

onde  $P(0) = P_0 = P_0^T \succ 0$ ,  $\|P(t)\| \leq R_0$ , onde  $R_0$  é uma constante que estabelece um limite superior para  $\|P(t)\|$ , e  $m_s^2 = 1 + n_s^2$  é o sinal de normalização que satisfaz  $\frac{\phi}{m_s} \in \mathcal{L}_\infty$ .

### Algoritmo Mínimo Quadrado Modificado

**Teorema:** O Algoritmo MQ Simples com covariância redefinida e o Algoritmo MQ Modificado com Fator de Esquecimento garantem que:

- (i)-  $\epsilon, \epsilon m_s, \dot{\theta} \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$  e  $\theta \in \mathcal{L}_\infty$ .
- (ii)- Se  $\frac{\phi}{m_s}$  é PE, então  $\theta(t)$  converge para  $\theta^*$  exponencialmente rápido quando  $t \rightarrow \infty$ .
- (iii)- Se  $z = \theta^* \phi$  é o modelo SPM para a planta  $y = G(s)u$  com pólos estáveis e com nenhum cancelamento de pólos nulos e  $u$  é suficientemente rico de ordem  $n + m + 1$ , então  $\phi, \frac{\phi}{m_s}$  são PE e  $\theta(t)$  converge para  $\theta^*$  exponencialmente rápido quando  $t \rightarrow \infty$ .

□

### Identificação de Parâmetros - Modelo B-SPM

Considere o modelo bilinear SPM

$$z = \rho^* (\theta^{*T} \phi + z_0), \quad (49)$$

onde  $z$  e  $z_0$  são sinais escalares assumidos conhecidos a cada instante de tempo  $t$  e  $\rho^*$  e  $\theta^*$  são parâmetros escalar e vetorial desconhecidos, respectivamente. O erro de estimação é gerado por

$$\hat{z} = \rho (\theta^T \phi + z_0),$$

$$\epsilon = \frac{z - \hat{z}}{m_s^2},$$

onde  $\rho(t)$  e  $\theta(t)$  são as estimativas de  $\rho^*$  e  $\theta^*$ , respectivamente, no tempo  $t$  e onde  $m_s$  é projetado para limitar  $\phi$  e  $z_0$ . Considere o funcional custo

$$J(\rho, \theta) = \frac{\epsilon^2 m_s^2}{2} = \frac{(z - \rho^* \theta^T \phi - \rho \xi + \rho^* \xi - \rho^* z_0)^2}{2m_s^2}, \quad (50)$$

onde  $\xi = \theta^T \phi + z_0$  é disponível para medição.

### Identificação de Parâmetros - Modelo B-SPM

Aplicando o método do gradiente, obtemos:

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= -\Gamma_1 \nabla J_\theta = \Gamma_1 \epsilon \rho^* \phi, \\ \dot{\rho} &= -\gamma \nabla J_\rho = \gamma \epsilon \xi,\end{aligned}\tag{51}$$

onde  $\Gamma_1 = \Gamma_1^T \succ 0$  e  $\gamma > 0$  são os ganhos adaptativos. Desde que  $\rho^*$  é desconhecido, a lei adaptativa acima não pode ser implementada. Dribamos este problema assumindo conhecido o sinal de  $\rho^*$  ao empregarmos a igualdade

$$\Gamma_1 \rho^* = \Gamma_1 |\rho^*| \text{sig}(\rho^*) = \Gamma \text{sig}(\rho^*),$$

onde  $\Gamma = \Gamma_1 |\rho^*|$ . Desde que  $\Gamma_1$  é arbitrário, então qualquer  $\Gamma = \Gamma^T \succ 0$  pode ser selecionado sem o conhecimento de  $|\rho^*|$ . Dessa maneira, as leis adaptativas para  $\theta$  e  $\rho$  podem ser escritas como

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \Gamma \epsilon \phi \text{sig}(\rho^*) \\ \dot{\rho} &= \gamma \epsilon \xi \\ \epsilon &= \frac{z - \rho \xi}{m_s^2}, \quad \xi = \theta^T \phi + z_0.\end{aligned}\tag{52}$$



### Identificação de Parâmetros - Modelo B-SPM

OBS: A hipótese de que  $\text{sig}(\rho^*)$  é conhecido pode ser relaxada, resultando em uma lei adaptativa para  $\theta$  e  $\rho$  com termos adicionais não-lineares.

**Teorema:** A lei adaptativa garante que

- (i)-  $\epsilon, \epsilon m_s, \dot{\theta}, \dot{\rho} \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$  e  $\theta, \rho \in \mathcal{L}_\infty$ .
- (ii)- Se  $\frac{\xi}{m_s} \in \mathcal{L}_2$ , então  $\rho(t) \rightarrow \bar{\rho}$  quando  $t \rightarrow \infty$ , onde  $\bar{\rho}$  é uma constante.
- (iii)- Se  $\frac{\xi}{m_s} \in \mathcal{L}_2$  e  $\frac{\phi}{m_s}$  é PE, então  $\theta(t)$  converge para  $\theta^*$  quando  $t \rightarrow \infty$ .
- (iv)- Se a planta  $y = G(s)u$  tem pólos estáveis com nenhum cancelamento de pólos nulos e  $u$  é suficientemente rico de ordem  $n + m + 1$ , então  $\phi, \frac{\phi}{m_s}$  são PE e  $\theta(t)$  converge para  $\theta^*$  quando  $t \rightarrow \infty$ .



### Projeção de Parâmetros

Em algumas aplicações, tem-se a priori o conhecimento de onde  $\theta^*$  está localizado no  $\mathbb{R}^n$ . Tal conhecimento geralmente é dado em termos de limites superior e inferior para os elementos de  $\theta^*$ , ou também, em termos da localização em um subconjunto convexo do  $\mathbb{R}^n$ .

Se tal informação está disponível, então podemos restringir a estimação online ao conjunto onde os parâmetros desconhecidos estão localizados. Para tal propósito, os algoritmos gradientes baseados em problemas de minimização irrestrita de certas funções custos são modificados usando o método da projeção gradiente.

Considere o seguinte problema de minimização com restrição

$$\begin{aligned} & \min\{J(\theta)\} \\ & \text{sujeito a } \theta \in S, \end{aligned} \tag{53}$$

onde  $S$  é um subconjunto convexo do  $\mathbb{R}^n$ . Assuma que  $S$  é dado por  $S := \{\theta \in \mathbb{R}^n \mid g(\theta) \leq 0\}$ , sendo  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave.

### Projeção de Parâmetros

As leis adaptativas baseadas no método gradiente que foram obtidas até o momento podem ser modificadas, para garantir que  $\theta \in S$  seja solução do problema restrito acima, através de

$$\dot{\theta} = Pr(-\Gamma \nabla J) = \begin{cases} -\Gamma \nabla J & \text{se } \theta \in S^0, \\ -\Gamma \nabla J + \Gamma \frac{\nabla g \nabla g^T}{\nabla g^T \Gamma \nabla g} \Gamma \nabla J & \text{ou } \theta \in \delta(S) \text{ e } -(\Gamma \nabla J)^T \nabla g \leq 0, \\ & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde  $\delta(S) := \{\theta \in \mathbb{R}^n \mid g(\theta) = 0\}$  e  $S^0 := \{\theta \in \mathbb{R}^n \mid g(\theta) < 0\}$  denotam a fronteira e o interior, respectivamente, de  $S$  e  $Pr(\cdot)$  é o operador projeção.

### Projeção de Parâmetros

#### *Algoritmo MQ Simples*

A lei adaptativa é dada por:

$$\dot{\theta} = Pr(P\epsilon\phi) = \begin{cases} P\epsilon\phi & \text{se } \theta \in S^0, \\ P\epsilon\phi - P \frac{\nabla g \nabla g^T}{\nabla g^T P \nabla g} P\epsilon\phi & \text{ou } \theta \in \delta(S) \text{ e } (P\epsilon\phi)^T \nabla g \leq 0, \\ & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde  $\theta(0) \in S$ ,

$$\dot{P} = \begin{cases} \beta P - P \frac{\phi\phi^T}{m_s^2} P & \text{se } \theta \in S^0, \\ 0 & \text{ou } \theta \in \delta(S) \text{ e } (P\epsilon\phi)^T \nabla g \leq 0, \\ & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e  $P(0) = P_0 = P_0^T \succ 0$ .

### Projeção de Parâmetros

*Algoritmo Gradiente - Função Custo Instantânea*

A lei adaptativa é dada por:

$$\dot{\theta} = Pr(\Gamma\epsilon\phi) = \begin{cases} \Gamma\epsilon\phi & \text{se } \theta \in S^0, \\ \Gamma\epsilon\phi - \Gamma \frac{\nabla g \nabla g^T}{\nabla g^T \Gamma \nabla g} \Gamma\epsilon\phi & \text{ou } \theta \in \delta(S) \text{ e } (\Gamma\epsilon\phi)^T \nabla g \leq 0, \\ & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde  $\theta(0) \in S$ .

**Teorema:** As leis adaptativas obtidas acima para o Algoritmo MQ Simples e o Algoritmo Gradiente com Função Custo Instantânea, através das modificações da projeção, conservam todas as propriedades que foram estabelecidas na ausência da projeção e, além disso, garantem que  $\theta(t) \in S \forall t \geq 0$ , desde que  $\theta(0) \in S$  e  $\theta^* \in S$ .

□

### Projeção de Parâmetros

**Exemplo:** Considere a lei adaptativa gradiente

$$\dot{\theta} = \Gamma \epsilon \phi$$

com o conhecimento a priori que  $|\theta^*| \leq M_0$  para alguma constante positiva  $M_0$  assumida conhecida.

Defina

$$S := \left\{ \theta \in \mathbb{R}^n \mid g(\theta) = \frac{\theta^T \theta}{2} - \frac{M_0^2}{2} \right\}.$$

Utilizando a lei adaptativa baseada no método da projeção com  $\nabla J = -\epsilon \phi$  e com  $\nabla g = \theta$  obtemos

$$\dot{\theta} = \begin{cases} \Gamma \epsilon \phi & \text{se } |\theta| < M_0, \\ \Gamma \epsilon \phi - \Gamma \frac{\theta \theta^T}{\theta^T \Gamma \theta} \Gamma \epsilon \phi, & \text{ou } |\theta| = M_0 \text{ e } \phi^T \Gamma \theta \epsilon \leq 0, \\ \Gamma \epsilon \phi - \Gamma \frac{\theta \theta^T}{\theta^T \Gamma \theta} \Gamma \epsilon \phi, & |\theta| = M_0 \text{ e } \phi^T \Gamma \theta \epsilon > 0, \end{cases}$$

com  $|\theta(0)| \leq M_0$ .

**Objetivo:** Projetar e analisar algoritmos para identificação de parâmetros online (*leis adaptativas*) para plantas de tempo discreto.

### Introdução:

- A maioria dos sistemas físicos a serem controlados ou identificados são de tempo contínuo e, quase sempre, modelados matematicamente como tal.
- A implementação, no entanto, é feita através de computadores digitais, tornando necessária uma representação em tempo discreto. Por exemplo:

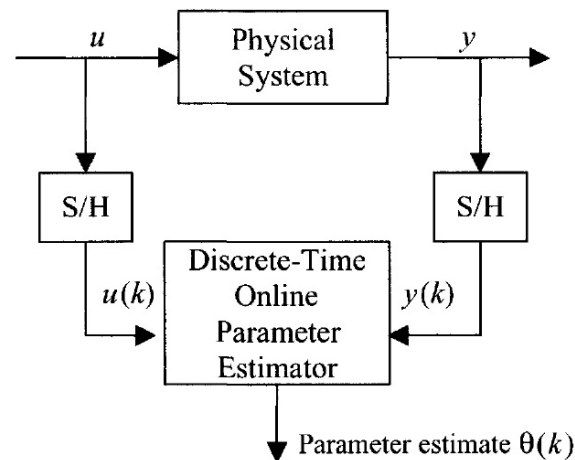


Figura : Implementação de um estimador de parâmetros online

onde  $k$  é um índice de tempo que assume valores  $k = 0, 1, 2, \dots$ , isto é,  $t = kT$ , sendo  $T$  o período de amostragem.



### Projeto de estimadores online de tempo discreto:

**Abordagem 1:** Projetamos um estimador de parâmetros online de tempo contínuo baseado no modelo de referência contínuo do sistema e, posteriormente, obtemos um estimador de parâmetros de tempo discreto através de uma aproximação do estimador para o sistema contínuo.

**Abordagem 2:** Obtemos uma aproximação em tempo discreto do modelo de tempo contínuo do sistema físico, a qual nós utilizaremos para projetar o estimador online de tempo discreto utilizando técnicas de tempo discreto.

### Leis Adaptativas (Tempo Discreto):

$$\epsilon_k = \frac{z_k - \theta_{k-1}^T \phi_k}{m_k^2}, \quad \theta_k = \theta_{k-1} + \Gamma \epsilon_k \phi_k$$

onde  $\theta_k$  é uma estimativa de  $\theta^*$  em  $t = kT$ ,  $\phi_k$  é o regressor,  $z_k$  é a saída do modelo SPM

$$z = \theta^* \phi,$$

com  $m_k \geq c > 0$  sendo uma constante de normalização e  $\Gamma = \Gamma^T \succ 0$  o ganho adaptativo.

**Lema Fundamental:** Se  $\frac{\|\Gamma\| \|\phi_k\|^2}{m_k^2} < 2$ , então a lei adaptativa anterior admite as seguintes propriedades:

- (i)-  $\theta_k \in l_\infty$ .
- (ii)-  $\epsilon_k, \epsilon_k m_k, \epsilon_k \phi_k, |\theta_k - \theta_{k-N}| \in l_2 \cap l_\infty$
- (iii)-  $\epsilon_k, \epsilon_k m_k, |\epsilon_k \phi_k|, |\theta_k - \theta_{k-N}| \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ , onde  $N \geq 1$  é qualquer número inteiro finito.
- (iv)- Se, além disso,  $\frac{\phi_k}{m_k}$  é PE, isto é, satisfaz  $\sum_{i=0}^{l-1} \frac{\phi_{k+i} \phi_{k+i}^T}{m_{k+1}^2} \geq \alpha_0 l I$ , para todo  $k$  e algum inteiro fixado  $l > 1$  e uma constante  $\alpha_0 > 0$ , então  $\theta_k \rightarrow \theta^*$  exponencialmente rápido.

□

**OBS:** O resultado acima é fundamental, uma vez que descreve as propriedades de estabilidade de uma ampla classe de leis adaptativas obtidas através da discretização das respectivas leis adaptativas de tempo contínuo. Ou também, pelo projeto de leis adaptativas de tempo discreto a partir de modelos paramétricos de tempo discreto.

### Discretização de Leis Adaptativas de Tempo Contínuo:

Considere a lei adaptativa de tempo contínuo

$$\begin{cases} \dot{\theta} &= \Gamma \epsilon \phi \\ \epsilon &= \frac{z - \theta^T \phi}{m_s^2} \end{cases},$$

baseada no modelo  $z = \theta^{*T} \phi$ , onde  $\theta(t)$ , a estimativa de  $\theta^*$ , é atualizada continuamente com o tempo.

Assuma que  $z(t)$ ,  $\phi(t)$  sejam medidas feitas nos instantes  $t = kT$ , onde  $k = 0, 1, 2, \dots$  e  $T$  é o período de amostragem, isto é,

$$z_k = \theta^{*T} \phi_k,$$

sendo  $z_k := z(kT)$ ,  $\phi_k := \phi(kT)$ .

Utilizando o método de aproximação de Euler, obtemos:

$$\dot{\theta} \cong \frac{\theta_k - \theta_{k-1}}{T} = \Gamma \epsilon_k \phi_k.$$

### Discretização de Leis Adaptativas de Tempo Contínuo:

Então,

$$\begin{cases} \epsilon_k &= \frac{z_k - \theta_k^T \phi_k}{m_k^2} \\ \theta_k &= \theta_{k-1} + \Gamma_1 \epsilon_k \phi_k \end{cases},$$

onde  $\Gamma_1 = T\Gamma$ .

Observe que a lei adaptativa obtida não pode ser implementada. Já que, no instante  $t = kT$ , o cálculo de  $\theta_k$  exige o conhecimento de  $\epsilon_k$ , que por sua vez, depende do valor de  $\theta_k$ .

Substituindo a segunda expressão na primeira, obtemos:

$$\epsilon_k = \frac{z_k - \theta_k^T \phi_k}{m_{s_k}^2} = \frac{z_k - (\theta_{k-1} + \Gamma_1 \epsilon_k \phi_k)^T \phi_k}{m_{s_k}^2} = \frac{z_k - \theta_{k-1}^T \phi_k - \phi_k^T \Gamma_1 \phi_k \epsilon_k}{m_{s_k}^2}.$$

### Discretização de Leis Adaptativas de Tempo Contínuo:

Então,

$$\epsilon_k = \frac{z_k - \theta_{k-1}^T \phi_k}{m_k^2},$$

onde  $m_k^2 = m_{s_k}^2 + \phi_k^T \Gamma_1 \phi_k$ .

Na última expressão,  $\epsilon_k$  depende de  $\theta_{k-1}$ ,  $z_k$ ,  $\phi_k$  e  $m_{s_k}$ , as quais são disponíveis para medição no instante  $k$ . E, portanto,  $\epsilon_k$  pode ser calculado no instante  $k$ .

### Lei Adaptativa (Sistema Discreto):

$$\begin{cases} \epsilon_k &= \frac{z_k - \theta_{k-1}^T \phi_k}{m_k^2} \\ \theta_k &= \theta_{k-1} + \Gamma_1 \epsilon_k \phi_k \end{cases} .$$

**Teorema:** Considere a lei adaptativa

$$\begin{cases} \epsilon_k &= \frac{z_k - \theta_{k-1}^T \phi_k}{m_k^2} \\ \theta_k &= \theta_{k-1} + \Gamma_1 \epsilon_k \phi_k \end{cases},$$

com  $m_{s_k} > c > 0$  para alguma constante positiva  $c$ . Se  $\Gamma_1 = \Gamma_1^T \succ 0$  é projetado de tal forma  $\lambda_{\max}(\Gamma_1) < 2\lambda_{\min}(\Gamma_1)$ , então as propriedades do lema anterior são aplicáveis.

□

### Entradas Suficientemente Ricas:

Dizemos que  $\frac{\phi_k}{m_k}$  é PE, se satisfaz

$$\sum_{i=0}^{l-1} \frac{\phi_{k+i} \phi_{k+i}^T}{m_{k+1}^2} \geq \alpha_0 l I,$$

para todo  $k$  e algum inteiro fixado  $l > 1$  e uma constante  $\alpha_0 > 0$ .

Estabelecemos ainda, no Lema Fundamental, que se  $\frac{\phi_k}{m_k}$  é PE, então a convergência exponencial de  $\theta_k$  para o parâmetro desconhecido  $\theta^*$  no modelo SPM  $z = \theta^{*T} \phi$  é garantida pela lei adaptativa

$$\begin{cases} \epsilon_k &= \frac{z_k - \theta_{k-1}^T \phi_k}{m_k^2} \\ \theta_k &= \theta_{k-1} + \Gamma_1 \epsilon_k \phi_k \end{cases} .$$

### Entradas Suficientemente Ricas:

A condição PE acima é equivalente a

$$\sum_{j=k}^{k+l-1} \frac{\phi_j \phi_j^T}{m_j^2} \geq \alpha_0 l I,$$

para algum  $k$  e algum inteiro fixado  $l > 1$  e uma constante  $\alpha_0 > 0$ . Além disso, é denominada como *persistência de excitação forte*.

A versão mais fraca é definida por

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_{\min} \sum_{j=1}^k \frac{\phi_j \phi_j^T}{m_j^2} \geq \alpha_0 l I = \infty,$$

e frequentemente denominada como *persistência de excitação fraca*.

**OBS:**  $\frac{\phi_k}{m_k}$  fortemente PE  $\Rightarrow$   $\frac{\phi_k}{m_k}$  fracamente PE. A recíproca nem sempre é verdadeira.



### Algoritmos Gradientes:

Considere o modelo paramétrico de tempo discreto

$$z_k = \theta^{*T} \phi_k,$$

onde  $\theta^* \in \mathbb{R}^n$  é um vetor constante assumido desconhecido,  $z \in \mathbb{R}$  e  $\phi_k \in \mathbb{R}^n$  são sequencias conhecidas a cada instante  $k = 0, 1, 2, \dots$

O erro de estimação  $\epsilon_k$  é gerado através de

$$\begin{cases} \hat{z}_k &= \theta_{k-1}^T \phi_k \\ \epsilon_k &= \frac{z_k - \hat{z}_k}{m_k^2} = \frac{z_k - \theta_{k-1}^T \phi_k}{m_k^2} \end{cases},$$

onde  $m_k^2 \geq c > 0$  é o sinal de normalização projetado para garantir que  $\frac{\phi}{m} \in l_\infty$ .

### **Algoritmos Gradientes:**

A lei adaptativa é da forma

$$\theta_k = \theta_{k-1} + \Gamma \epsilon_k \phi_k, \quad \theta(0) = \theta_0$$

com  $\epsilon_k$  dado acima.

**OBS:** Diferentes escolhas para  $\Gamma = \Gamma^T \succ 0$  e  $m_k^2$  resultam em diferentes leis adaptativas.

Casos a serem considerados:

- Algoritmo de projeção;
- Algoritmo gradiente baseado em custo instantâneo.

### Algoritmos Gradientes:

- **Algoritmo de Projeção:**

Considere o problema de minimização

$$\begin{aligned} \min_{\theta_k} \left\{ \frac{1}{2} [\theta_k - \theta_{k-1}]^2 \right\} \\ \text{s.a. } z_k = \theta_k^T \phi_k \end{aligned} .$$

Utilizando multiplicador de Lagrange para incorporar a restrição, o problema acima torna-se:

$$\min_{\theta_k; \lambda} \left\{ \underbrace{\frac{1}{2} [\theta_k - \theta_{k-1}]^2 + \lambda [z_k - \theta_k^T \phi_k]}_{J_{\theta_k, \lambda}} \right\} .$$

### Algoritmos Gradientes:

- **Algoritmo de Projeção:**

As condições necessárias para um ponto de mínimo são:

$$\begin{cases} \frac{J_{\theta_k, \lambda}}{\partial \theta_k} = \theta_k - \theta_{k-1} - \lambda \phi_k = 0 \\ \frac{J_{\theta_k, \lambda}}{\partial \lambda} = z_k - \theta_k^T \phi_k = 0 \end{cases} .$$

Substituindo a primeira na segunda e resolvendo em  $\lambda$ , encontramos  $\lambda = \frac{z_k - \theta_{k-1}^T \phi_k}{\phi_k^T \phi_k}$ .

Substituindo  $\lambda$  na primeira equação acima, obtemos:

$$\begin{cases} \epsilon_k = \frac{z_k - \theta_{k-1}^T \phi_k}{\phi_k^T \phi_k} \\ \theta_k = \theta_{k-1} + \epsilon_k \phi_k \end{cases} .$$

### Algoritmos Gradientes:

- **Algoritmo de Projeção:**

Um dos problemas do algoritmo de projeção obtido acima é a possível divisão por zero quando  $\phi_k^T \phi_k = 0$ . Esta possibilidade é eliminada quando consideramos a seguinte modificação

$$\begin{cases} \epsilon_k &= \frac{z_k - \theta_{k-1}^T \phi_k}{c + \phi_k^T \phi_k} \\ \theta_k &= \theta_{k-1} + \alpha \epsilon_k \phi_k \end{cases},$$

onde  $c > 0$  e  $0 < \alpha < 2$  são constantes de projeto

**Teorema:** Se  $c > 0$  e  $0 < \alpha < 2$ , então os resultados do lema fundamental são aplicáveis para o algoritmo de projeção modificado.

□

### Algoritmos Gradientes:

- **Algoritmos Gradientes baseado em Função Custo:**

Considere o problema de minimização do custo

$$J(\theta) = \frac{(z_k - \theta^{k-1} \phi_k)^2}{2m_k^2}$$

com relação a  $\theta_{k-1}$ . Utilizando o método do passo descendente, obtemos

$$\theta_k = \theta_{k-1} - \Gamma \nabla J,$$

onde  $\Gamma = \Gamma^T \succ 0$  e  $\nabla J = -\frac{z_k - \theta_{k-1}^T \phi_k}{m_k^2} \phi_k = -\epsilon_k \phi_k$ , resultando no algoritmo gradiente

$$\begin{cases} \epsilon_k & = & \frac{z_k - \theta_{k-1}^T \phi_k}{m_k^2} \\ \theta_k & = & \theta_{k-1} + \Gamma \epsilon_k \phi_k \end{cases} .$$

### Algoritmos Mínimos Quadrados:

- **Mínimos Quadrados Simples:**

Considere a função custo

$$J_N(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(z_k - \theta^T \phi_k)^2}{m_k^2} + \frac{1}{2} (\theta - \theta_0)^T P_0^{-1} (\theta - \theta_0),$$

onde  $\theta_0 = \theta(0)$ .

Considerando

$$Z_k := \left[ \frac{z_1}{m_1} \quad \dots \quad \frac{z_k}{m_k} \right]^T, \quad \Phi_k := \left[ \frac{\phi_1}{m_1} \quad \dots \quad \frac{\phi_k}{m_k} \right]^T,$$

a função custo acima pode ser reescrita como

$$J_k(\theta) = \frac{1}{2} (Z_k - \Phi_k \theta)^T (Z_k - \Phi_k \theta) + \frac{1}{2} (\theta - \theta_0)^T P_0^{-1} (\theta - \theta_0).$$

### Algoritmos Mínimos Quadrados:

- **Mínimos Quadrados Simples:**

Calculando o gradiente da função custo anterior e igualando a zero obtemos

$$\nabla J_k = -\Phi_k^T (Z_k - \Phi_k \theta) + P_0^{-1} (\theta - \theta_0) = 0,$$

o que resulta em

$$(\Phi_k^T \Phi_k + P_0^{-1}) \theta = P_0^{-1} \theta_0 + \Phi_k^T Z_k.$$

Então, a estimativa de  $\theta^*$  no instante  $k$  que minimiza o funcional acima é dada por:

$$\theta_k = (\Phi_k^T \Phi_k + P_0^{-1})^{-1} (P_0^{-1} \theta_0 + \Phi_k^T Z_k). \quad (54)$$



### Algoritmos Mínimos Quadrados:

- **Mínimos Quadrados Simples:**

Defina

$$P_k^{-1} := \Phi_k^T \Phi_k + P_0^{-1}. \quad (55)$$

Então,

$$P_k^{-1} - P_{k-1}^{-1} = \Phi_k^T \Phi_k - \Phi_{k-1}^T \Phi_{k-1} = \frac{\phi_k \phi_k^T}{m_k^2}.$$

Utilizando a identidade  $(A + BC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(I + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$  e fazendo  $A = P_{k-1}^{-1}$ ,  $B = \frac{\phi_k}{m_k}$ ,  $C = \frac{\phi_k^T}{m_k}$ , segue que

$$P_k = P_{k-1} - \frac{P_{k-1} \phi_k \phi_k^T P_{k-1}}{m_k^2 + \phi_k^T P_{k-1} \phi_k}.$$

### Algoritmos Mínimos Quadrados:

- **Mínimos Quadrados Simples:**

De (54) e (55) obtemos

$$\theta_k = P_k \left( P_0^{-1} \theta_0 + \Phi_{k-1}^{-1} Z_{k-1} + \frac{\phi_k z_k}{m_k^2} \right).$$

Utilizando

$$(\Phi_{k-1}^T \Phi_{k-1} + P_0^{-1}) \theta = P_0^{-1} \theta_0 + \Phi_{k-1}^T Z_{k-1},$$

$$P_{k-1}^{-1} := \Phi_{k-1}^T \Phi_{k-1} + P_0^{-1},$$

na expressão acima, obtemos:

$$\theta_k = P_k \left( P_{k-1}^{-1} \theta_{k-1} + \frac{\phi_k z_k}{m_k^2} \right) = \theta_{k-1} + P_k \phi_k \epsilon_k.$$

### Algoritmos Mínimos Quadrados:

- **Mínimos Quadrados Simples:**

Portanto, o Algoritmo Mínimo Quadrado Simples é dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} P_k = P_{k-1} - \frac{P_{k-1} \phi_k \phi_k^T P_{k-1}}{m_k^2 + \phi_k^T P_{k-1} \phi_k}, \quad P(0) = P_0 = P_0^T \succ 0 \\ \epsilon_k = \frac{z_k - \theta_{k-1}^T \phi_k}{m_k^2} \\ \theta_k = \theta_{k-1} + P_k \phi_k \epsilon_k, \quad \theta(0) = \theta_0 \end{array} \right. ,$$

onde  $m_k^2 > c > 0$  é o sinal de normalização projetado para limitar  $\phi_k$ .

### Algoritmos Mínimos Quadrados:

**Teorema:** O algoritmo MQ obtido acima admite as seguintes propriedades:

- (i)  $\epsilon_k, \epsilon_k m_k, \epsilon_k \phi_k, \theta_k, P_k \in l_\infty$ .
- (ii)  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \theta_k = \bar{\theta}$ , onde  $|\bar{\theta} - \theta^*| \leq c_1 |\theta_0 - \theta^*|$  e  $c_1 = \frac{\lambda_{\max}(P_0^{-1})}{\lambda_{\min}(P_0^{-1})}$
- (iii)  $\epsilon_k, \epsilon_k m_k, \epsilon_k \phi_k, |\theta_k - \theta_{k-N}| \in l_2$
- (iv)  $\epsilon_k, \epsilon_k m_k, |\epsilon_k \phi_k|, |\theta_k - \theta_{k-N}| \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow +\infty$ , onde  $N$  é qualquer número inteiro positivo finito.
- (v) Se  $\frac{\phi_k}{m_k}$  é fracamente (ou fortemente) PE, então  $\theta_k \rightarrow \theta^*$  quando  $k \rightarrow +\infty$ .
- (vi) Considere o modelo SPM. Se a planta possui pólos estáveis e nenhum cancelamento de pólos nulos e a entrada  $u$  é suficientemente rica de ordem  $n + m + 1$ , então  $\theta_k \rightarrow \theta^*$  quando  $k \rightarrow +\infty$ .

□

### Algoritmos Mínimos Quadrados:

- **Mínimos Quadrados Modificado:**

Considere a seguinte função custo envolvendo o parâmetro de ponderação  $a_k$

$$J_N(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_k \frac{(z_k - \theta^T \phi_k)^2}{m_k^2} + \frac{1}{2} (\theta - \theta_0)^T P_0^{-1} (\theta - \theta_0),$$

onde  $P_0$  é uma matriz positiva definida e  $a_k$  é uma sequência não-negativa de coeficientes de ponderação.

O Algoritmo MQ assume a forma

$$\left\{ \begin{array}{l} P_k = P_{k-1} - \frac{a_k P_{k-1} \phi_k \phi_k^T P_{k-1}}{m_k^2 + a_k \phi_k^T P_{k-1} \phi_k}, \quad P(0) = P_0 = P_0^T \succ 0 \\ \epsilon_k = \frac{z_k - \theta_{k-1}^T \phi_k}{m_k^2} \\ \theta_k = \theta_{k-1} + \sqrt{a_k} P_k \phi_k \epsilon_k, \quad \theta(0) = \theta_0 \end{array} \right. .$$

### Algoritmos Mínimos Quadrados:

- **Mínimos Quadrados Modificado:**

#### Observações:

- O algoritmo obtido acima é denominado *Algoritmo MQ Ponderado*.
- O algoritmo MQ padrão trata-se de um caso especial do caso do algoritmo MQ ponderado quando consideramos  $a_k = 1$  para todo  $k$ .
- Diferentes escolhas para  $a_k$  resultam em diferentes algoritmos com propriedades possivelmente diferentes.

MQ Padrão	$a_k = 1$
Ponderação constante	$a_k = cte > 0$
Ponderação Robusta	$a_k = \begin{cases} a_1 & \text{if } \phi_k^T P_{k-1} \phi_k \geq \delta, \\ a_2 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad a_1 \gg a_2 > 0$
Ponderação Modificada	$a_k = \begin{cases} \frac{\phi_k^T P_{k-1} \phi_k}{\phi_k^T \phi_k} & \text{if } \phi_k^T \phi_k \gg \delta > 0, \\ l & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad \text{onde } l, \delta > 0 \text{ const. arbit.}$

### Algoritmos Mínimos Quadrados:

- **Classe mais geral:**

Uma classe mais geral de algoritmos MQ pode ser obtida através da seguinte função custo:

$$S_N(\theta) = \beta_{N-1} S_{N-1}(\theta) + \frac{(z_N - \theta^T \phi_N)^2}{m_N^2},$$

onde

$$S_{j-1}(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{j-1} a_k \frac{(z_k - \theta^T \phi_k)^2}{m_k^2} + \frac{1}{2} (\theta - \theta_0)^T P_0^{-1} (\theta - \theta_0),$$

é o custo MQ ponderado e  $\{\beta_k\}_{k=1}^N$  é uma sequência de projeto com  $\beta_k \in (0, 1)$  para todo  $k = 1, \dots, N$ .

### Algoritmos Mínimos Quadrados:

- **Classe mais geral:**

Neste caso, o Algoritmo MQ torna-se

$$\begin{cases} P_k &= \frac{1}{\beta_k} \left[ P_{k-1} - \frac{a_k P_{k-1} \phi_k \phi_k^T P_{k-1}}{m_k^2 \beta_k + a_k \phi_k^T P_{k-1} \phi_k} \right], \quad P(0) = P_0 = P_0^T \succ 0 \\ \epsilon_k &= \frac{z_k - \theta_{k-1}^T \phi_k}{m_k^2} \\ \theta_k &= \theta_{k-1} + \sqrt{a_k} P_k \phi_k \epsilon_k, \quad \theta(0) = \theta_0 \end{cases}$$

O Algoritmo MQ acima é denominado MQ com ponderação de informação dinâmica. Duas escolhas para  $\beta_k$  são exibidas na tabela abaixo:

Constant Forgetting	$\beta_k = \beta, \quad 0 < \beta < 1$
Startup Forgetting	$\beta_k = \beta_1 \beta_{k-1} + 1 - \beta_1, \quad 0 < \beta_0, \beta_1 < 1.$



# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

---

**Objetivo:** Projetar e analisar alguns esquemas de controle adaptativo baseados em modelos de referência (*model reference adaptive control* - MRAC).

# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

## Introdução:

- Em MRC (*model reference control*), o comportamento desejado da planta é descrito por um modelo de referência que trata-se, simplesmente, de um sistema LTI com função de transferência  $W_m(s)$  que é impulsionado por uma referência de entrada.
- A lei de controle é então projetada para que o sistema em malha fechada admita uma função de transferência igual a  $W_s(m)$ .
- A coincidência das funções de transferência garante que a planta se comportará como o modelo de referência para qualquer sinal de referência na entrada.

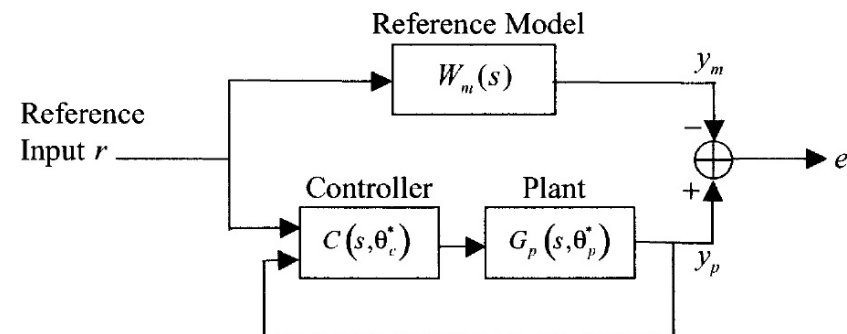


Figura : Controle por Modelo de Referência

# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

## Classes de MRAC

**MRAC Indireto:** Trata-se de uma classe onde os parâmetros do controlador não são atualizados diretamente, porém são calculados a cada instante  $t$  utilizando as estimativas dos parâmetros do sistema.

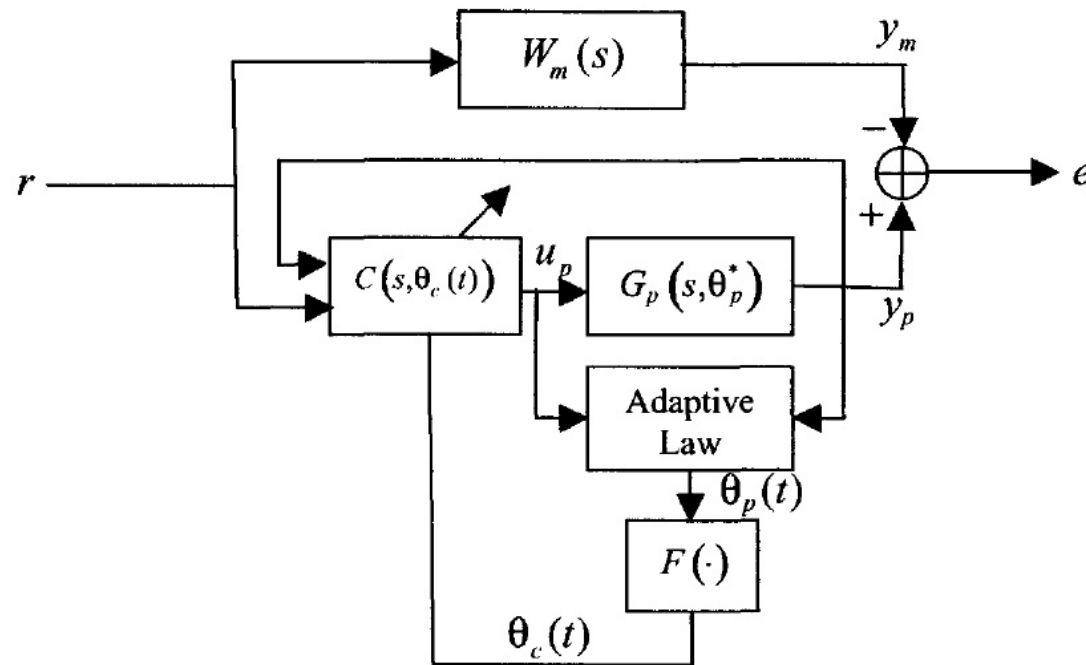


Figura : MRAC Indireto

# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

## Classes de MRAC

**MRAC Direto:** Trata-se da classe onde os parâmetros do controlador são atualizados diretamente sem qualquer cálculo intermediário.

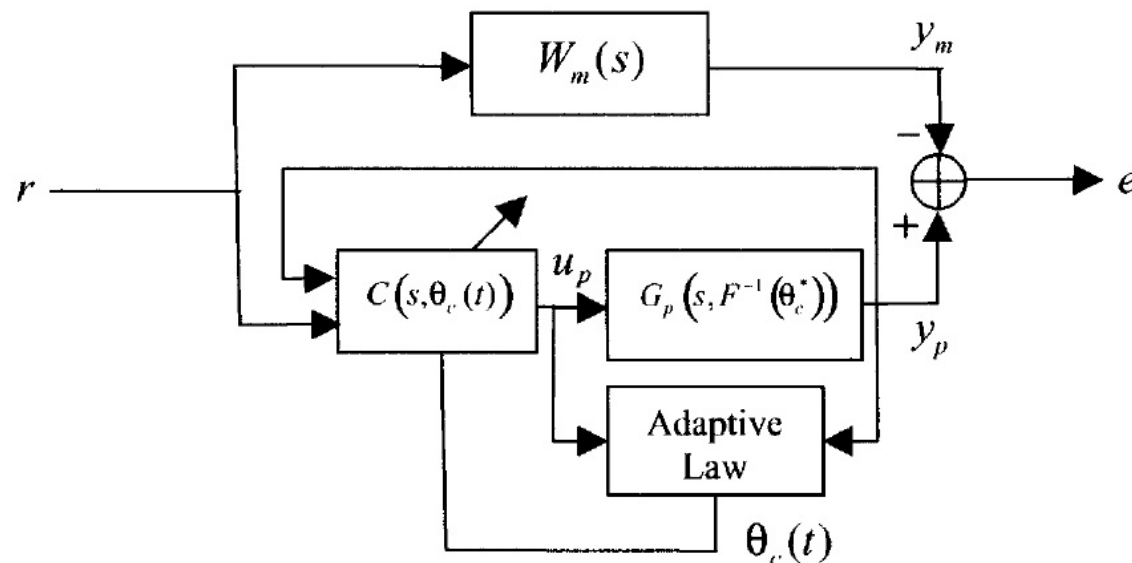


Figura : MRAC Direto

# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

## Regulação Adaptativa: Caso Escalar

Considere a planta escalar

$$\dot{x} = ax + u, \quad x(0) = 0,$$

onde  $a$  é uma constante desconhecida.

**Objetivo:** determinar uma função limitada  $u = f(t, x)$  tal que o estado  $x(t)$  é limitado e converge para zero quando  $t \rightarrow +\infty$  para qualquer condição inicial dada.

Seja  $-a_m$  o pólo desejado em malha fechada, onde  $a_m > 0$  é escolhido pelo projetista. Se o parâmetro  $a$  é conhecido, a lei de controle

$$u = -k^*x, \quad k^* = a + a_m,$$

poderia ser utilizada para alcançar o objetivo de controle. Isto é, com  $u = -k^*x$ , a planta em malha fechada é dada por

$$\dot{x} = -a_mx,$$

cujos pontos de equilíbrio  $x_e = 0$  é exponencialmente estável.

# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

## Regulação Adaptativa: Caso Escalar

Note que, como  $a$  é desconhecido,  $k^*$  não pode ser calculado e, dessa maneira, a lei de controle  $u = -k^*x$  não pode ser implementada. Uma estratégia será utilizar a mesma lei de controle

$$u = -k^*x,$$

mas com  $k^*$  substituído pela sua estimativa  $k(t)$  no instante  $t$ , isto é, utilizamos  $u = k(t)x$  e procuramos por uma lei adaptativa para atualizar  $k(t)$  continuamente com o tempo. Isto nada mais é que um problema de identificação online do parâmetro  $k^*$ .

Adicionando e subtraindo a entrada de controle desejada  $-k^*x$  na equação da planta, obtemos:

$$\dot{x} = ax - k^*x + k^*x + u.$$

Como  $a - k^* = -a_m$ , então temos o seguinte modelo SSPM

$$\dot{x} = -a_mx + k^*x + u,$$

sendo  $x$  e  $u$  disponíveis para medição e  $a_m > 0$  conhecido.

# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

## Regulação Adaptativa: Caso Escalar

Considere o modelo SSPM anterior. O modelo de estimação é dado por:

$$\dot{\hat{x}} = a_m \hat{x} - k^* x + k^* x + u, \quad \hat{x}(0) = 0.$$

Substituindo  $u = -k(t)x$  no modelo acima, obtemos

$$\dot{\hat{x}} = -a_m \hat{x}, \quad \hat{x}(0) = 0.$$

Assim,  $\hat{x}(t) = 0$  para todo  $t \geq 0$ . Logo, o erro de estimação é dado por

$$\epsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t) = x(t) - 0 = x(t), \quad \forall t \geq 0.$$

O erro de estimação é obtido simplesmente pela substituição de  $u = -k(t)x$  no modelo SSPM para obtermos:

$$\dot{x} = -a_m x - \tilde{k}x, \quad \tilde{k} = k - k^*.$$

# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

## Regulação Adaptativa: Caso Escalar

Perceba que a equação  $\dot{x} = -a_m x - \tilde{k}x$ ,  $\tilde{k} = k - k^*$  relaciona o erro de parâmetro  $\tilde{k}$  ao erro de regulação  $x$  (ou também, erro de estimação  $\epsilon = x$ ).

Agora precisamos encontrar a lei adaptativa para  $k$ . Para isso, considere a seguinte função de Lyapunov:

$$V(x, \tilde{k}) = \frac{x^2}{2} + \frac{\tilde{k}^2}{2\gamma}.$$

Derivando com relação ao tempo, obtemos

$$\dot{V} = 2x\dot{x} + 2\frac{\tilde{k}\dot{\tilde{k}}}{\gamma} = -a_m x^2 - \tilde{k}x^2 + \frac{\tilde{k}\dot{\tilde{k}}}{\gamma},$$

onde escolheremos  $\dot{\tilde{k}}$  de forma adequada tornar  $\dot{V}$  negativa. A escolha natural é que

$$\dot{\tilde{k}} = \dot{k} = \gamma x^2, \quad k(0) = k_0 > 0.$$



### Regulação Adaptativa: Caso Escalar

Na expressão anterior utilizamos o fato que  $\dot{\tilde{k}} = \dot{k} - \dot{k}^* = \dot{k}$ , já que  $k^*$  é uma constante. Para a escolha de  $\dot{\tilde{k}}$ , encontramos que

$$\dot{V} = -a_m x^2 \leq 0.$$

Como  $V$  é uma função definida positiva e  $\dot{V} \leq 0$ , então  $V \in \mathcal{L}_\infty$ . Logo, por  $V(x, \tilde{k}) = \frac{x^2}{2} + \frac{\tilde{k}^2}{2\gamma}$ , concluímos que  $x, \tilde{k} \in \mathcal{L}_\infty$ . Assim, todos os sinais na planta em malha fechada são limitados. E mais, como  $\dot{x} = -a_m x - \tilde{k}x$ , então  $\dot{x} \in \mathcal{L}_\infty$ .

Além disso,  $V > 0$  e  $\dot{V} \leq 0$  implicam que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = V_\infty < V(0)$ . Logo,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t a_m x^2(\tau) d\tau = V(0) - V(\infty) \Rightarrow x \in \mathcal{L}_2.$$

Como  $x \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$  e  $\dot{x} \in \mathcal{L}_\infty$ , então de acordo com o Lema A.4.7 (Veja Apêndice) temos que  $x(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . E ainda, de  $x(t) \rightarrow 0$  e da limitação de  $k(t)$ , estabelecemos também que  $\dot{k}(t) \rightarrow 0$  e  $u(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ .

# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

## Regulação Adaptativa: Caso Escalar

Acabamos de verificar que a lei de controle  $u = k(t)x$  combinada com a lei adaptativa  $\dot{\hat{k}} = \dot{k} = \gamma x^2$  satisfaz o objetivo de controle no seguinte sentido:

- garante a limitação para todos os sinais,
- e força o estado da planta convergir para zero.

No entanto, não podemos estabelecer que  $k(t)$  converge para  $k^*$ , isto é, que o pólo do sistema em malha fechada converge para o pólo desejado dado por  $-a_m$ . A ausência da convergência do parâmetro não é tão crucial no problema de controle adaptativo quanto no problema de identificação de parâmetros, já que o objetivo de controle pode ser alcançado sem a exigência da convergência dos parâmetros para seus valores reais.

# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

## Regulação Adaptativa: Caso Escalar (Solução Explícita)

A simplicidade deste exemplo escalar permite-nos resolver para  $x(t)$  explicitamente e estudar as propriedades de  $k(t)$  e  $x(t)$  quando elas evoluem com o tempo. Nós podemos verificar que

$$x(t) = \frac{2ce^{-ct}}{c + k_0 - a + (c - k_0 + a)e^{-2ct}} x(0),$$

$$k(t) = a + \frac{c[(c + k_0 - a)e^{2ct} - (c - k_0 + a)]}{(c + k_0 - a)e^{2ct} + (c - k_0 + a)},$$

onde  $c^2 = \gamma x_0^2 + (k_0 - a)^2$  e  $x_0 = x_0$ , satisfazem as equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x} &= -a_m x - \tilde{k}x, \quad \tilde{k} = k - k^*, \\ \dot{k} &= \gamma x^2, \quad k(0) = k_0 > 0 \end{cases}.$$

# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

## Regulação Adaptativa: Caso Escalar (Solução Explícita)

Considere

$$k(t) = a + \frac{c[(c + k_0 - a)e^{2ct} - (c - k_0 + a)]}{(c + k_0 - a)e^{2ct} + (c - k_0 + a)},$$

e observe que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} k(t) = a + c, \text{ se } c > 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} k(t) = a - c, \text{ se } c < 0.$$

Logo,

$$k_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} k(t) = a + \sqrt{\gamma x_0^2 + (k_0 - a)^2}.$$

Dessa maneira, para  $x_0 \neq 0$ ,  $k(t)$  converge para um ganho estabilizante cujo valor depende de  $\gamma$  e das condições iniciais  $x_0$  e  $k_0$ . Note ainda que, o valor de  $k_\infty$  independe de quando  $k_0$  é um ganho desestabilizante ( $0 < k_0 < a$ ) ou estabilizante ( $k_0 > a$ ), devido ao termo  $(k_0 - a)^2$ . O uso de diferentes condições iniciais afetam somente o efeito transitório de  $k(t)$ .

# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

## Regulação Adaptativa: Caso Escalar (Solução Explícita)

No limite de  $t \rightarrow +\infty$ , o pólo em malha fechada converge para

$$-(k_\infty - a) = -\sqrt{\gamma x_0^2 + (k_0 - a)^2},$$

o qual depende somente das condições iniciais e pode ser diferente de  $-a_m$ . Como o objetivo do controle é alcançar a limitação dos sinais e a regulação do estado  $x(t)$  para zero, a convergência de  $k(t)$  para  $k^*$  não é crucial.

# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

## Regulação Adaptativa: Caso Escalar

### Lei Adaptativa:

O controle adaptativo desenvolvido e analisado acima é dado pelas seguintes equações:

$$u = k(t)x, \quad \dot{k} = \gamma x^2, \quad k(0) = k_0,$$

onde  $x$  é o estado medido da planta e, para este exemplo, é idêntico ao erro de estimação.

**Parâmetros de Projeto:** são o ganho inicial  $k_0$  e o ganho adaptativo  $\gamma > 0$ . Para a limitação dos sinais e a regulação assintótica de  $x$  para zero, nossas análises permitem que  $k_0$  e  $\gamma$  sejam arbitrários. No entanto, para um dado  $k_0$  e  $x_0 \neq 0$ :

- altos valores de  $\gamma$  resultam em altos valores de  $c$ , e portanto, uma convergência mais rápida de  $x(t)$  para zero,
- ao passo que, altos valores de  $\gamma$ , podem acarretar problemas computacionais para algoritmos de solução de equações diferenciais.

# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

## Caso Escalar: MRAC Direto sem normalização

Considere a planta de primeira ordem

$$\dot{x} = ax + bu,$$

onde  $a, b$  são parâmetros desconhecidos mas o sinal de  $b$  é conhecido.

**Objetivo:** Encontrar uma lei de controle apropriada  $u$  tal que todos os sinais na planta em malha fechada são limitados e  $x$  acompanhe o estado  $x_m$  do modelo de referência dado por

$$\dot{x}_m = -a_m x_m + b_m r,$$

ou

$$x_m = \frac{b_m}{s + a_m} r$$

para qualquer sinal contínuo por partes limitado  $r(t)$ , onde  $a_m > 0$ ,  $b_m$  são conhecidos e  $x_m(t)$  e  $r(t)$  são medidos a cada instante de tempo  $t$ .

# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

## Caso Escalar: MRAC Direto sem normalização

Para que  $x$  acompanhe  $x_m$  para qualquer sinal de entrada de referência  $r(t)$ , a lei de controle deve ser escolhida de tal maneira que a função de transferência da planta em malha fechada seja igual a do modelo de referência.

Considere a seguinte lei de controle

$$u = -k^* x + l^* r,$$

onde  $k^*$ ,  $l^*$  são calculados de tal forma que a função de transferência do sistema em malha fechada, a partir de  $r$  para  $x$ , seja igual a do modelo de referência, isto é,

$$\frac{x(s)}{r(s)} = \frac{bl^*}{s - a + bk^*} = \frac{b_m}{s + a_m} = \frac{x_m(s)}{r(s)}.$$

A equação é satisfeita para  $l^* = \frac{b_m}{b}$  e  $k^* = \frac{a_m + a}{b}$ , obviamente com  $b \neq 0$ . Isto é, a planta é controlável.



# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

## Caso Escalar: MRAC Direto sem normalização

Note que a lei de controle

$$u = -k^*x + l^*r = -\frac{a_m + a}{b}x + \frac{b_m}{b}r$$

quando aplicada à planta  $\dot{x} = ax + bu$ , resulta em

$$\dot{x} = ax + bu = ax - b\frac{a_m + a}{b}x + b\frac{b_m}{b}r = -a_mx + b_mr.$$

Como  $\dot{x}_m = -a_mx_m + b_mr$ , então temos que

$$\dot{x} - \dot{x}_m = (-a_mx + b_mr) - (-a_mx_m + b_mr) = -a_m(x - x_m).$$

Logo,  $x(t) = x_m(t)$  para todo  $t \geq 0$  quando  $x(0) = x_m(0)$ . Caso  $x(0) \neq x_m(0)$  então  $|x(t) - x_m(t)| \rightarrow 0$  exponencialmente rápido para qualquer sinal de referência  $r(t)$ .

# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

## Caso Escalar: MRAC Direto sem normalização

Observe que quando  $a, b$  são desconhecidos, a lei de controle  $u = -k^*x + l^*r$  não pode ser implementada. Ao invés desta, propomos então

$$u = -k(t)x + l(t)r,$$

onde  $k(t)$  e  $l(t)$  são as estimativas de  $k^*$  e  $l^*$ , respectivamente, a cada instante de tempo  $t$ .

Precisamos encontrar uma lei adaptativa para gerar  $k(t), l(t)$  online. Este problema pode ser visto como um típico problema de identificação de parâmetros para as constantes desconhecidas  $k^*$  e  $l^*$ .

Considere a planta  $\dot{x} = ax + bu$ . Adicionando e subtraindo o termo  $-bk^*x + bl^*r = -(a_mx + a)x + b_mr$  para obter

$$\dot{x} = -a_mx + b_mr + b(k^*x - l^*r + u),$$

isto é,

$$x = \frac{b_m}{s + a_m}r + \frac{b}{s + a_m}(k^*x - l^*r + u).$$

# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

## Caso Escalar: MRAC Direto sem normalização

Como  $x_m = \frac{b_m}{s + a_m} r$  é um sinal limitado conhecido, então podemos expressar o erro de acompanhamento através do modelo B-DPM

$$e := x - x_m = \frac{b_m}{s + a_m} r + \frac{b}{s + a_m} (k^* x - l^* r + u) - \frac{b_m}{s + a_m} r = \frac{b}{s + a_m} (k^* x - l^* r + u).$$

Ou também, através do modelo B-SSPM

$$\dot{e} = -a_m e + b(k^* x - l^* r + u).$$

O modelo de estimação baseado no B-SSPM acima é dado por

$$\dot{\hat{e}} = -a_m \hat{e} + \hat{b}(kx - lr + u), \quad \hat{e}(0) = 0,$$

onde  $\hat{b}$  é a estimativa de  $b$ .

# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

## Caso Escalar: MRAC Direto sem normalização

Substituindo a lei de controle  $u = -k(t)x + l(t)r$ , obtemos

$$\dot{\hat{e}} = -a_m \hat{e} + \hat{b}(kx - lr + u) = -a_m \hat{e}, \quad \hat{e}(0) = 0.$$

Logo, o PVI acima admite a solução  $\hat{e}(t) = 0$  para todo  $t \geq 0$ . Isto significa que o modelo de estimação é dispensável, e neste caso, o erro de estimação é simplesmente o erro de acompanhamento  $e$ .

Substituindo a lei de controle  $u = -k(t)x + l(t)r$  em

$$\dot{e} = -a_m e + b(k^*x - l^*r + u),$$

obtemos

$$\dot{e} = -a_m e + b(-\tilde{k}x + \tilde{l}r),$$

onde  $\tilde{k} = k - k^*$  e  $\tilde{l} = l - l^*$  são os erros de parâmetros.

# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

## Caso Escalar: MRAC Direto sem normalização

Note que a equação

$$\dot{e} = -a_m e + b(-\tilde{k}x + \tilde{l}r)$$

estabelece uma relação entre o erro de acompanhamento da trajetória  $e$  e os erros de parâmetros  $\tilde{k}$  e  $\tilde{l}$ .

Com a finalidade de projetar as leis adaptativas para gerar as estimativas dos parâmetros  $k$  e  $l$ , considere a seguinte função de Lyapunov

$$V(e, \tilde{k}, \tilde{l}) = \frac{e^2}{2} + \frac{\tilde{k}^2}{2\gamma_1} |b| + \frac{\tilde{l}^2}{2\gamma_2} |b|,$$

onde  $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ . A derivada no tempo de  $V$  é dada por

$$\dot{V} = -a_m e^2 - b\tilde{k}ex + b\tilde{l}er + \frac{|b|\tilde{k}}{\gamma_1} \dot{\tilde{k}} + \frac{|b|\tilde{l}}{\gamma_2} \dot{\tilde{l}}.$$

# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

## Caso Escalar: MRAC Direto sem normalização

Como  $|b| = b \operatorname{sgn}(b)$ , ( $\operatorname{sgn}(b)$  quer dizer o sinal de  $b$ ), os termos indefinidos desaparecem se nós fizermos as escolhas

$$\dot{k} = \gamma_1 e x \operatorname{sgn}(b), \quad \dot{l} = \gamma_2 e r \operatorname{sgn}(b),$$

que resultam em  $\dot{V} = -a_m e^2 \leq 0$ .

Considere  $x_m$  e  $r(t)$  funções limitadas. Como  $V$  é uma função de Lyapunov para as equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{e} &= -a_m e + b(-\tilde{k}x + \tilde{l}r) \\ \dot{k} &= \gamma_1 e x \operatorname{sgn}(b) \\ \dot{l} &= \gamma_2 e r \operatorname{sgn}(b) \end{cases},$$

então o ponto de equilíbrio  $(e_e, k_e, l_e) = (0, 0, 0)$  é uniformemente estável. Além disso,  $V \in \mathcal{L}_\infty$ , o que implica que  $e, \tilde{k}, \tilde{l} \in \mathcal{L}_\infty$ . Consequentemente, como  $e = x - x_m$  e  $x_m \in \mathcal{L}_\infty$ , então  $x \in \mathcal{L}_\infty$  e  $u \in \mathcal{L}_\infty$ . Assim, todos os sinais na malha fechada são limitados. De  $\dot{V} = -a_m e^2$ , obtemos que  $e \in \mathcal{L}_2$  e de  $\dot{e} = -a_m e + b(-\tilde{k}x + \tilde{l}r)$  segue que  $\dot{e} \in \mathcal{L}_\infty$ . Portanto,  $e(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ .

# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

## Caso Escalar: MRAC Direto sem normalização

### Conclusões:

- A lei de controle  $u = -k(t)x + l(t)r$  juntamente com as leis adaptativas

$$\dot{k} = \gamma_1 e x \operatorname{sgn}(b), \quad \dot{l} = \gamma_2 e r \operatorname{sgn}(b),$$

garantem a limitação para todos os sinais no sistema em malha fechada.

- O estado  $x(t)$  da planta acompanha o estado do modelo de referência  $x_m(t)$  assintoticamente com o tempo para qualquer sinal de referência  $r(t)$ .
- Os resultados obtidos não implicam que  $k(t) \rightarrow k^*$  e  $l(t) \rightarrow l^*$  quando  $t \rightarrow +\infty$ .

# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

## Caso Escalar: MRAC Indireto sem normalização

Considere a planta de primeira ordem

$$\dot{x} = ax + bu,$$

e a trajetória de referência dada por

$$\dot{x}_m = -a_m x_m + b_m r.$$

Como visto anteriormente, se  $a, b$  são conhecidos então a lei de controle

$$u = -k^* x + l^* r,$$

com

$$k^* = \frac{a_m + a}{b}, \quad l^* = \frac{b_m}{b},$$

poderia ser utilizada para encontrar o objetivo de controle.



# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

## Caso Escalar: MRAC Indireto sem normalização

No caso de parâmetros desconhecidos, propusemos

$$u = -k(t)x + l(t)r,$$

onde  $k(t), l(t)$  eram as estimativas de  $k^*, l^*$ , no instante  $t$ , respectivamente. Vimos no caso MRAC Direto que  $k(t), l(t)$  são geradas diretamente através de uma lei adaptativa.

No caso MRAC Indireto, seguiremos uma abordagem diferente. Calcularemos  $k(t), l(t)$  utilizando as relações

$$k^* = \frac{a_m + a}{b}, \quad l^* = \frac{b_m}{b},$$

e as estimativas  $\hat{a}, \hat{b}$  dos parâmetros desconhecidos  $a, b$  como

$$k(t) = \frac{a_m + \hat{a}(t)}{\hat{b}(t)}, \quad l(t) = \frac{b_m}{\hat{b}(t)},$$

onde  $\hat{a}, \hat{b}$  são geradas por uma lei adaptativa que projetaremos.

# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

## Caso Escalar: MRAC Indireto sem normalização

Considere a planta reescrita como (SSPM)

$$\dot{x} = -a_m x + (a + a_m)x + bu,$$

e o modelo de estimação associado dado por

$$\dot{\hat{x}} = -a_m \hat{x} + (\hat{a} + a_m)x + \hat{b}u,$$

onde  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$  são as estimativas de  $a$ ,  $b$ , respectivamente, no instante  $t$ .

**Observação:** Consideramos no modelo de estimação os sinais  $x$ ,  $u$ , no termo  $(a + a_m)x + bu$ , como sinais de entrada que estão disponíveis para medição e, dessa maneira, não utilizamos a estimativa de  $x$ . Esta estrutura de estimação é denominada *modelo série-paralelo*, pois ela utiliza  $x$ ,  $\hat{x}$ .

# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

## Caso Escalar: MRAC Indireto sem normalização

Substituindo  $u = -k(t)x + l(t)r$  com  $k(t) = \frac{a_m + \hat{a}(t)}{\hat{b}(t)}$ ,  $l(t) = \frac{b_m}{\hat{b}(t)}$ , no modelo de estimação acima, obtemos

$$\dot{\hat{x}} = -a_m \hat{x} + b_m r.$$

Como estamos projetando o modelo de estimação visto acima e o modelo referência, nós podemos escolher  $\hat{x}(0) = x_m(0)$ , o que implica que  $\hat{x}(t) = x_m(t)$  para todo  $t \geq 0$ . Assim, o erro de estimação

$$\epsilon = x - \hat{x} = x - x_m = e,$$

isto é, trata-se simplesmente do erro de acompanhamento de trajetória.

Que por sua vez, satisfaz

$$\dot{e} = -a_m e - \tilde{a}x - \tilde{b}u,$$

onde  $\tilde{a} = \hat{a} - a$  e  $\tilde{b} = \hat{b} - b$  são os erros de parâmetros, quando fazemos a diferença entre o modelo de estimação e a planta na forma SSPM.

# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

## Caso Escalar: MRAC Indireto sem normalização

A equação anterior relaciona os erros de parâmetros  $\tilde{a}$  e  $\tilde{b}$  ao erro de acompanhamento de trajetória  $e$ . Esta relação motiva a escolha da seguinte função de Lyapunov

$$V(e, \tilde{a}, \tilde{b}) = \frac{1}{2} \left( e^2 + \frac{\tilde{a}^2}{\gamma_1} + \frac{\tilde{b}^2}{\gamma_2} \right),$$

para  $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ . A derivada de  $V$  com relação ao tempo resulta

$$\dot{V} = -a_m e^2 - \tilde{a} x e - \tilde{b} u e + \frac{\tilde{a} \dot{\tilde{a}}}{\gamma_1} + \frac{\tilde{b} \dot{\tilde{b}}}{\gamma_2}.$$

Então, para

$$\dot{\tilde{a}} = \hat{a} = \gamma_1 e x, \quad \dot{\tilde{b}} = \hat{b} = \gamma_2 e u,$$

temos que  $\dot{V} = -a_m e^2 \leq 0$ , o que implica que  $e, \hat{a}, \hat{b} \in \mathcal{L}_\infty$  e que  $e \in \mathcal{L}_2$  pelos mesmos argumentos já vistos. Além disso,  $x_m, e \in \mathcal{L}_\infty$  implicam que  $x \in \mathcal{L}_\infty$ .

# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

## Caso Escalar: MRAC Indireto sem normalização

A limitação de  $u$ , no entanto, não pode ser estabelecida a não ser que nós saibamos que  $k(t)$  e  $l(t)$  sejam limitadas. A limitação de  $\frac{1}{\hat{b}(t)}$ , logo a de  $k(t)$  e  $l(t)$ , não pode ser garantida já que as leis adaptativas acima podem gerar estimativas  $\hat{b}(t)$  que estão arbitrariamente próximas de zero ou até mesmo são iguais a zero.

Uma forma de prevenir que a estimativa de  $\hat{b}(t)$  seja nula é modificá-la de tal forma que a adaptação se posicione em um subconjunto fechado de  $\mathbb{R}$  que não inclui o zero. Esta modificação é baseada na seguinte premissa:

*O  $\text{sgn}(b)$  e um limite inferior  $b_0 > 0$  para  $|b|$  são conhecidos.*

# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

## Caso Escalar: MRAC Indireto sem normalização

Aplicando o método da projeção com a restrição  $\hat{b} \operatorname{sgn}(b) \geq b_0$  para a lei adaptativa deduzida acima temos

$$\dot{a} = \gamma_1 ex, \quad \dot{\hat{b}} = \begin{cases} \gamma_2 eu & \text{se } |\hat{b}| > b_0 \\ & \text{ou se } |\hat{b}| = b_0 \text{ e } e \operatorname{sgn}(b) \geq 0, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde  $\hat{b}(0)$  é escolhido tal que  $\hat{b}(0) \operatorname{sgn}(b) > b_0$ .

**Exemplo:** Suponha que saibamos a priori que  $b \geq 1$ . Escolhemos então a condição inicial  $\hat{b}(0) > 1$ . Se

- $\hat{b}(t) > 1$ , então procedemos normalmente com a lei adaptativa,
- $\hat{b}(t) = 1$  e  $\dot{\hat{b}}(t) < 0$  em algum instante  $t$ ,  $\hat{b}(t)$  é decrescente e em breve se tornará menor do que 1. Neste caso, fazemos  $\dot{\hat{b}}(t) = 0$
- $\hat{b}(t) = 1$  e  $\dot{\hat{b}}(t) \geq 0$ , então  $\hat{b}(t)$  é não decrescente e, portanto, ela não se tornará menor do que 1, e neste caso procedemos normalmente com a adaptação.

Dessa maneira,  $\hat{b}$  é garantidamente maior que 1 para todo instante de tempo  $t$ .

# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

## Caso Escalar: MRAC Indireto sem normalização

Com base na lei adaptativa reformulada através do algoritmo de projeção é possível verificar que

$$\dot{V} \leq -a_m e^2 \leq 0, \quad \forall t \geq 0,$$

o que implica que  $V, e, \hat{a}, \hat{b} \in \mathcal{L}_\infty$ .

Pelo argumentos usuais,  $e \in \mathcal{L}_2$  e  $\dot{e} \in \mathcal{L}_\infty$ , o que implica que  $e(t) = x(t) - x_m(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . E, assim,  $\hat{a}, \hat{b} \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ .

# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

## Caso Vetorial: Estado Completo

Considere a planta de dimensão  $n$

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

onde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times q}$  são matrizes constantes desconhecidas e o par  $(A, B)$  é controlável.

**Objetivo:** Encontrar o vetor de entrada  $u \in \mathbb{R}^q$  tal que todos os sinais na planta em malha fechada sejam limitados e o estado  $x$  acompanhe o estado  $x_m \in \mathbb{R}^n$  de um modelo de referência dado.

Considere o modelo de referência descrito por

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m r, \quad x_m \in \mathbb{R}^n,$$

onde  $A_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz estável,  $B_m \in \mathbb{R}^{n \times q}$  e  $r \in \mathbb{R}^q$  é um vetor de entrada de referência limitada. O modelo de referência e a entrada  $r$  são escolhidos de tal forma que  $x_m(t)$  represente a trajetória desejada que  $x$  tem que percorrer.



# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

## Caso Vetorial: Estado Completo

Se as matrizes  $A$  e  $B$  forem conhecidas, nós poderemos aplicar a lei de controle

$$u = -K^*x + L^*r$$

e obtermos a planta em malha fechada

$$\dot{x} = (A - BK^*)x + BL^*r.$$

Se  $K^* \in \mathbb{R}^{q \times n}$  e  $L^* \in \mathbb{R}^{q \times q}$  são escolhidas de tal forma que venham satisfazer

$$A - BK^* = A_m \quad BL^* = B_m,$$

então a matriz de transferência da planta em malha fechada é a mesma que a do modelo de referência e  $x(t) \rightarrow x_m(t)$  exponencialmente rápido para qualquer sinal de referência limitado  $r(t)$ .

# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

## Caso Vetorial: Estado Completo

Note, porém, que em geral podem não existir  $K^*$  e  $L^*$  satisfazendo as condições

$$A - BK^* = A_m \quad \text{e} \quad BL^* = B_m,$$

para as matrizes dadas  $A$ ,  $B$ ,  $A_m$  e  $B_m$ .

Isto significa que pode não haver flexibilidade estrutural suficiente para encontrar o objetivo de controle. O que pode ser feito nesta situação, caso a estrutura de  $A$  e  $B$  seja conhecida, é projetar  $A_m$  e  $B_m$  de tal maneira que as condições acima tenham soluções para  $K^*$  e  $L^*$ .

Suponha, por ora, que as condições acima sejam satisfeitas para algum  $K^*$  e algum  $L^*$ . Isto é, seja possível determinar  $K^*$  e  $L^*$ . Considere então a seguinte lei de controle

$$u = -K(t)x + L(t)r,$$

onde  $K(t)$  e  $L(t)$  são as estimativas de  $K^*$  e  $L^*$  geradas a partir de uma lei adaptativa, respectivamente, a cada instante de tempo  $t$ .

# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

## Caso Vetorial: Estado Completo

Somando e subtraindo o termo  $-B(K^*x - L^*r + u)$  na equação da planta

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

e utilizando as condições  $A - BK^* = A_m$  e  $BL^* = B_m$ , obtemos

$$\dot{x} = A_mx + B_mr + B(K^*x - L^*r + u),$$

que trata-se de uma extensão da equação escalar vista anteriormente.

Defina o erro de trajetória  $e := x - x_m$ . Subtraindo  $\dot{x}_m = A_mx_m + B_mr$  da equação acima, encontramos a equação do erro de trajetória dada por

$$\dot{e} = A_me + B(K^*x - L^*r + u).$$

# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

## Caso Vetorial: Estado Completo

O modelo de estimação é dado por

$$\dot{\hat{e}} = A_m \hat{e} + B(K(t)x - L(t)r + u), \quad \hat{e}(0) = 0.$$

Devido a lei de controle  $u = -K(t)x + L(t)r$ , observe que

$$\dot{\hat{e}} = A_m \hat{e}, \quad \hat{e}(0) = 0.$$

Logo,  $\hat{e}(t) = 0$ , para todo  $t \geq 0$ . Isto implica que o erro de estimação  $\epsilon$  é dado por

$$\epsilon = e - \hat{e} = e.$$

Assim, o erro de trajetória é utilizado como erro de estimação.

# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

## Caso Vetorial: Estado Completo

Observe que  $\tilde{K} := K - K^*$  e  $\tilde{L} := L - L^*$  satisfazem a equação

$$\dot{e} = A_m e + B(-\tilde{K}^* x + \tilde{L}^* r),$$

que depende da matriz desconhecida  $B$ .

Para evitar esta dependência da matriz  $B$  procederemos da seguinte forma. Suponha que  $L^*$  seja uma matriz definida positiva ou definida negativa. Considere

$$\Gamma^{-1} = L^* \operatorname{sgn}(l),$$

onde  $l = 1$  se  $L^*$  é definida positiva e  $l = -1$  se  $L^*$  é definida negativa. Então, de  $BL^* = B_m$  temos que

$$B = B_m L^{*-1},$$

e a equação do erro de estimação torna-se

$$\dot{e} = A_m e + B_m L^{*-1}(-\tilde{K}^* x + \tilde{L}^* r).$$

# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

## Caso Vetorial: Estado Completo

Consideremos a seguinte função de Lyapunov

$$V(e, \tilde{L}, \tilde{K}) = e^T P e + \text{tr}(\tilde{K}^T \Gamma \tilde{K} + \tilde{L}^T \Gamma \tilde{L}),$$

onde  $P = P^T \succ 0$  satisfaz a seguinte equação de Lyapunov

$$P A_m + A_m^T P = -Q,$$

para alguma matriz  $Q = Q^T \succ 0$ .

**Fato:**  $\frac{d}{dt} \{ \text{tr}(A(t)) \} = \text{tr} \left( \frac{d}{dt} A(t) \right)$ ,  $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

A derivada de  $V$  com relação ao tempo é dada por

$$\dot{V} = -e^T P e + 2e^T P B_m L^{*-1} (-\tilde{K}x + \tilde{L}r) + 2\text{tr}(\tilde{K}^T \dot{\tilde{K}} + \tilde{L}^T \dot{\tilde{L}}).$$

# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

## Caso Vetorial: Estado Completo

Observe que

$$e^T P B_m L^{*-1} \tilde{K} x = \text{tr}(x^T \tilde{K}^T \Gamma B_m^T P e) \text{sgn}(l) = \text{tr}(\tilde{K}^T \Gamma B_m^T P e x^T) \text{sgn}(l)$$

e

$$e^T P B_m L^{*-1} \tilde{L} r = \text{tr}(r^T \tilde{L}^T \Gamma B_m^T P e) = \text{tr}(\tilde{L}^T \Gamma B_m^T P e r^T) \text{sgn}(l).$$

Assim,  $\dot{V}$  pode ser reescrita como

$$\dot{V} = -e^T P e - 2\text{tr}(\tilde{K}^T \Gamma B_m^T P e x^T) \text{sgn}(l) + 2\text{tr}(\tilde{L}^T \Gamma B_m^T P e r^T) \text{sgn}(l) + 2\text{tr}(\dot{\tilde{K}} \Gamma \tilde{K} + \tilde{L} \Gamma \dot{\tilde{L}}).$$

Então, para

$$\dot{\tilde{K}} = \dot{K} = B_m^T P e x^T \text{sgn}(l) \quad \dot{\tilde{L}} = \dot{L} = -B_m^T P e r^T \text{sgn}(l),$$

temos

$$\dot{V} = -e^T P e \leq 0.$$

# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

## Caso Vetorial: Estado Completo

Da mesma forma como no caso escalar,  $V$  e  $\dot{V}$  estabelecem que  $K(t)$ ,  $L(t)$  e  $e(t)$  são limitadas e que  $e(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ .

**Conclusão:** O controle adaptativo desenvolvido é dado pelas expressões

$$u = -K(t)x + L(t)r$$

$$\dot{\tilde{K}} = \dot{K} = B_m^T P e x^T \operatorname{sgn}(l) \quad \dot{\tilde{L}} = \dot{L} = -B_m^T P e r^T \operatorname{sgn}(l),$$

onde a matriz  $B_m^T P$  age como uma matriz de ganho adaptativo, sendo  $P$  obtida através da solução da equação de Lyapunov

$$P A_m + A_m^T P = -Q,$$

para alguma matriz arbitrária  $Q = Q^T \succ 0$ .

É importante destacar que a dedução da lei adaptativa acima foi sustentada sobre a hipótese de que o vetor de estados  $x$  da planta esteja disponível para medição.



# Controle Adaptativo via Modelo de Referência

*Tempo Contínuo*

## Caso Vetorial: Estado Completo

### Observações:

- Diferentes escolhas para a matriz  $Q$  não afetam a limitação e o comportamento assintótico, no entanto, interferem no efeito transitório.
- A suposição que  $L^*$  na equação  $BL^* = B_m$  é definida positiva ou definida negativa impõe uma restrição adicional sobre a estrutura de  $B$  e  $B_m$ .
- Uma vez que  $B$  é completamente desconhecida, a suposição sobre  $L^*$  pode não ser prática em algumas aplicações.