

Métodos de estimação na TRI

- Independência entre as respostas dos estudantes.
- Independência entre as respostas dadas aos itens, para uma dada proficiência (local ou condicional).

Baker, F.B., Kim, S-H.(2004). **Item Response Theory: parameter estimation techniques**. New York: Marcel Dekker, Inc. 2nd Edition.

Métodos de Estimação

- A probabilidade de resposta correta num determinado item depende da habilidade do indivíduo e dos parâmetros que caracterizam o item.



Problemas de estimação envolvem 2 tipos de parâmetros

- Em geral, ambos são desconhecidos.
- Conhecido = respostas dos indivíduos aos itens do teste.

Métodos de Estimação

Podemos dividir o problema em 3 situações :

- estimação da habilidade, supondo os parâmetros de item já conhecidos ;
 - estimação dos parâmetros de item , supondo as habilidades já conhecidas ;
 - estimação conjunta dos parâmetros de item e das habilidades .
- O processo de estimação dos parâmetros dos itens é chamado de calibração .

CASO 1. Estimação da Habilidade

(Supondo os parâmetros dos itens conhecidos.)

- O processo é feito independentemente para cada indivíduo.

Métodos :

- Estimador de MV
- Estimador EAP
- Estimador MAP

1.1 Estimação por Máxima Verossimilhança

- São necessários métodos iterativos para a resolução da equação. Por exemplo, Newton-Raphson .

Estimador de MV

- maximizar a função de verossimilhança .
estimadores não viciados no caso de testes com um número razoavelmente grande de itens (maior do que 30 itens)



não está definido para alguns padrões de resposta . Para o caso que acerta todos os itens o não responde corretamente nenhum



1.2 Estimador EAP (Esperança a Posteriori)

- Escolhemos uma priori para θ e combinando com a verossimilhança obtemos a esperança da distribuição a posteriori de θ



definido para qualquer padrão de resposta (incluindo os valores extremos: responde corretamente tudo o responde errado tudo);

possui o menor erro médio ;



viciado ;

necessidade de uma distribuição a priori para θ ;
cálculos mais complexos do que o método de MV .

1.3 Estimador MAP (Máximo a Posteriori)

- Considera a mesma aproximação que EAP mas usa o máximo da distribuição a posteriori de θ



definido para qualquer padrão de resposta ;



viciado ;

necessidade de uma distribuição a priori para θ ;
cálculos mais complexos do que o método de MV .

CASO 2. Estimação dos parâmetros de item

(Supondo as habilidades conhecidas).

- Na prática, essa situação não ocorre.
- Os parâmetros são estimados item a item .
- O processo é repetido independentemente k (número de ítems) vezes .
- Se usa o método de máxima verossimilhança

CASO 3. Estimação conjunta dos parâmetros dos itens e das habilidades

- Situação mais comum.
- Em teste com k itens e n indivíduos
Para o modelo de 2 parâmetros temos : $2k + n$ parâmetros.

Métodos

- MV Conjunta
- MV Marginal
- Procedimentos Bayesianos

Estimação conjunta dos parâmetros dos itens e das habilidades

- Os processos de estimação envolvem a habilidade de cada um dos respondentes, mas em geral, estamos interessados na obtenção dos parâmetros populacionais



método EAP

ou

média e d.p. das estimativas individuais

- média amostral é um estimador não viciado
- d.p. amostral < d.p. populacional

3.1 Estimação por Máxima Verossimilhança Conjunta

Estimador de MVC

- maximizar a função de verossimilhança .

↑ serve como base para outros procedimentos ;

não está definido para alguns padrões de resposta ;
viciado ;

↓ apresenta problemas de indeterminação ;

não possui propriedades assintóticas, pois o aumento do número de respondentes aumenta o número de parâmetros a serem estimados ; isto é, não pode ser estimado o erro padrão e porem não é possível fazer inferência.

Máxima verossimilhança conjunta:

$$L(\theta, \xi) = \text{Prob}(Y | \theta, \xi) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^k P_{ij}^{y_{ij}} (1 - P_{ij})^{1 - y_{ij}}$$

$$\log L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k y_{ij} \log P_{ij} + (1 - y_{ij}) \log(1 - P_{ij})$$

onde $Y(y_{ij})$ é a matriz das respostas ($n \times k$) e ξ é o vector ($q \times 1$) dos parâmetros dos itens. Para o modelo logístico de 3 parâmetros, $q=3$.

13

- Máxima verossimilhança conjunta

Precisamos encontrar os valores de θ and ξ que maximizam $\log L$.

Técnica Iterativa Newton-Raphson.

Precisamos das derivadas parciais de 1a. e 2a. de $\log L$ com respeito a θ e ξ .

Indeterminação: existem diferentes valores de θ e ξ . que fornecem o mesmo valor de P_{ij} .

Uma solução: θ 's com média 0 e desvio padrão 1, escala (0,1)

14

3.2 Estimação por Máxima Verossimilhança Marginal

Estimador de MVM Bock e Aitkin (1981)

- maximizar a função de verossimilhança marginal
- Algoritmo tipo EM



possui propriedades assintóticas ;

Permite estimar num primeiro estagio as estimativas dos parâmetros do item e logo em um segundo estagio permite a estimação da habilidade por qualquer método ;



não está definido para certos padrões de resposta ;
mais trabalhoso que o método MVC ;
necessidade de uma priori para θ ;
problemas na estimação do parâmetro c ;

- Máxima verossimilhança marginal

A idéia básica é “libertar” o processo de estimação dos parâmetros dos itens de sua dependência de θ . A estrategia é chamada de “divide e conquistarás”

Passo 1: estimação dos parâmetros dos itens.

Passo 2: assumindo que as estimativas dos parâmetros dos itens são seus verdadeiros valores, estimamos os θ 's.

Podemos usar qualquer método visto no caso 1.

E o método mais usado é implementado nos pacotes de TRI

Estimação na TRI

- Máxima verossimilhança marginal

$$\text{Prob}(Y_j | \theta, \xi) = \prod_{j=1}^k P_{ij}^{y_{ij}} (1 - P_{ij})^{1 - y_{ij}}$$

$$\text{Prob}(Y_j | \xi, \eta) = \int_{\mathfrak{R}} \text{Prob}(Y_j | \theta, \xi) g(\theta, \eta) d\theta$$

$$L(\xi, \eta) = \text{Prob}(Y | \xi, \eta) = \prod_{i=1}^n \text{Prob}(Y_i | \xi, \eta)$$

$g(\theta | \eta)$ é a distribuição de θ , com parâmetros $\eta = (\mu, \sigma^2)$. Em geral, consideramos a normal padrão ($\mu = 0$ e $\sigma = 1$).

17

- Máxima verossimilhança marginal

As estimativas dos parâmetros dos itens são os valores de ξ que maximizam $L(\xi, \eta)$.

Algoritmo EM: U e θ são os dados completos, e Y é dado observado.

No segundo estágio, Assumindo ξ “conhecido”, voltamos para $L(\xi, \theta) = L(\theta)$ e maximizamos para θ .

18

3.3 Estimação através de procedimentos bayesianos (não usando MCMC)

Estimador bayesiano

- maximizar a distribuição marginal a posteriori .

 definido para qualquer padrão de resposta ;
permite a estimação da habilidade por qualquer método ;

 trabalhoso computacionalmente ;
necessidade de distribuições a priori para as habilidades e para os parâmetros dos itens ;

3.3 Estimação através de procedimentos bayesianos com MCMC

Estimador totalmente bayesiano

- Obter a distribuição a posteriori usando cadenas de markov monte carlo .

 Estima simultaneamente habilidades e parâmetros de itens

 trabalhoso computacionalmente ;
necessidade de distribuições a priori para as habilidades e para os parâmetros dos itens ;

- Estimação Bayesiana

Distribuição a priori para a: Lognormal

Distribuição a priori para b: Normal

Distribuição a priori para c: Beta

Fornecer estimativas para todos os itens com $y=1$ ou $y=0$ para todos os respondentes. A estimação por máxima verossimilhança não fornece.

O mesmo para todos os respondentes que responderam $y=1$ ou $y=0$ para todos os itens.