CCM - Matemática I - 2023

Os Números Reais: I

Aulas 1, 2, 3

21, 22, 24/08/23

Os Números

Precisamos entender bem o sistema numérico que usamos: os NÚMEROS REAIS. Mas antes disso, vejamos o que sabemos bem, para entendermos onde faltam detalhes e precisão.

Os naturais $\mathbb{N}$: Leopold Kronecker (matemático alemão, 1823 - 1891) disse:

"Deus criou os naturais; todo o resto é trabalho do homem."

$$\boxed{\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}}$$

É possível somar e multiplicar naturais e o resultado é um natural:

$$5 + 3 = 8 \qquad \text{e} \qquad 3 \times 7 = 21.$$

É interessante notar que com o número 1 e com adição, construímos todos os naturais: $2 = 1+1$, $3 = 2+1$, $4 = 3+1$, ... Ou poderíamos tomar um ponto de vista um pouco diferente e afirmar que o conjunto dos naturais é composto pelos números

$$1, \quad 1+1, \quad 1+1+1, \quad 1+1+1+1, \quad \dots$$

obtidos a partir de 1 e da operação de adição.

De todo modo, não discutiremos mais a chamada "construção axiomática" dos números naturais e assumiremos que todos conhecemos o conjunto $\mathbb{N}$. Assumimos também que conhecemos as operações $+$ e $\times$ em $\mathbb{N}$.

Algo óbvio, mas curioso, é que $\boxed{1 \times a = a, \ \forall a \in \mathbb{N}}$: 1 é "elemento neutro" para a multiplicação.

Adição, por outro lado, não possui elemento neutro em $\mathbb{N}$. O remédio para isso é inventar um: introduzimos um número novo, chamado ZERO e denotado 0, que tem a propriedade $\boxed{0 + a = a, \ \forall a \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$.

Depois, queremos tornar a operação $+$ inversível, isto é, precisamos encontrar números tais que, dado $a \in \mathbb{N}$, sempre existe um (novo) número x tal que $\boxed{x + a = 0}$. Tais números não existem em $\mathbb{N}$ e os chamamos de números negativos. Obtemos assim um novo conjunto de números, o conjunto de NÚMEROS INTEIROS, denotado por $\mathbb{Z}$:

$$\boxed{\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N}) = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}}$$

onde $-a$ é o inverso aditivo de $a \in \mathbb{N}$.

Listemos algumas propriedades — que chamamos AXIOMAS — dos números e das operações com as quais estamos muito bem acostumados:

Axioma 1: Comutatividade da adição: $a+b=b+a$
Comutatividade do produto: $a\cdot b=b\cdot a$ $\quad \forall a,b.$

Axioma 2: Associatividade da adição: $(a+b)+c=a+(b+c)$
Associatividade do produto: $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ $\quad \forall a,b,c.$

Axioma 3: Distributividade: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ $\quad \forall a,b,c.$

Axioma 4: Existência de elementos neutros: existem números $0, 1$, diferentes um do outro, tais que $a+0=a$, $a\cdot 1=a$ $\quad \forall a.$

Axioma 5: Existência de oposto (inverso aditivo): para todo a existe um número x tal que $a+x=0$.

O conjunto $\mathbb{Z}$ de números inteiros satisfaz todos esses axiomas, isto é, tem todas essas propriedades.

Algumas consequências dos Axiomas 1-5

Teorema 1 (propriedade de cancelamento na adição): Se $a+b = a+c$ então $b=c$.

Prova: Pelo Axioma 5, existe um número x tal que $x+a = 0$. Assim

$$
\begin{aligned}
a+b &= a+c && \Rightarrow \text{(propriedade da igualdade)} \\
x+(a+b) &= x+(a+c) && \Rightarrow \text{(Axioma 2)} \\
(x+a)+b &= (x+a)+c && \Rightarrow \text{(escolha de } x\text{)} \\
0+b &= 0+c && \Rightarrow \text{(Axioma 4)} \\
b &= c.
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Corolário: O elemento neutro da adição é único.

Prova: Suponha que $0'$ também tem a propriedade $a+0' = a$ $\forall a$. Assim $0+0' = 0$. Por outro lado, pelos axiomas 1 e 4,

$$0+0' = 0'+0 = 0'$$

Mostramos então que $0+0' = 0$ e $0+0' = 0'$ $\Rightarrow$ $0 = 0'$ $\blacksquare$

Obs: Note que, após introduzirmos 0 e os inversos aditivos, não é totalmente óbvio que em $\mathbb{Z}$ haja somente um zero, isto é, o corolário acima não é uma banalidade.

Teorema 2 (possibilidade de subtração): Dados a, b existe um número x tal que $a + x = b$.

Prova: Pelo Axioma 5, existe y tal que $a + y = 0$. Definimos $x = y + b$. Assim

$$a + x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{definição} \\ \text{de } x}}{=} a + (y+b) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Axioma 2}}}{=} (a+y) + b \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Escolha de} \\ y}}{=} 0 + b \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Axioma 4}}}{=} b.$$

$\blacksquare$

O número x do Teorema 2 é denotado por $b - a$:

$$\boxed{a + (b-a) = b}$$

Também denotamos $0 - a$, isto é, o número x tal que $a + x = 0$, simplesmente por $\boxed{-a : \quad -a := 0 - a}$.

Exemplos:

(i) $3 + 5 = 8$, isto é, $8 - 3 = 5$, isto é, o número que precisamos somar a 3 para obter 8 é 5. Isso acontece dentro de $\mathbb{N}$.

(ii) $8 + x = 5$ também tem solução em $\mathbb{Z}$: é isso que o teorema afirma.

Adendo ao Teorema 2: O número x do teorema 2 (isto é, x é o número tal que $a+x=b$) é único.

Prova: Se x e x' são tais que $a+x=b$ e $a+x'=b$, então $a+x = a+x'$ e, pelo teorema 1, $x=x'$. ■

Corolário: Inversos aditivos são únicos, isto é, para cada número a existe um (pelo Axioma 5) e apena um número x tal que $a+x=0$.

Prova: Imediata do Teorema 2 e seu Adendo. ■

Teorema 3: $b-a = b+(-a)$ (Em palavras: o número que deve ser somado a $\underline{a}$ para se obter $\underline{b}$ é a soma de $\underline{b}$ com o negativo de $\underline{a}$, isto é, a soma de $\underline{b}$ com o número que, somado a $\underline{a}$, produz 0.)

Prova:
$$a+(b+(-a)) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Comutatividade}}}{=} a+((-a)+b) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Associatividade}}}{=} (a+(-a))+b \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Existência}\\ \text{de opostos}}}{=} 0+b \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Elemento}\\ \text{neutro}}}{=} b.$$

Isso mostra que $b+(-a)$ satisfaz o Teorema 2 e, segue do Adendo, que $b+(-a) = b-a$. ■

Outros teoremas

- $-(-a) = a$
- $a \cdot (b-c) = a \cdot b - a \cdot c$
- $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$

Exercício: Prove essas três afirmações com cuidado.

É interessante — e importante — observar que todas as propriedades que deduzimos (Teoremas 1, 2, 3, corolários, adendos, etc.) foram deduzidos usando apenas os 5 axiomas que listamos. Vamos agora listar um novo axioma e ver o que podemos deduzir:

Axioma 6: Existência de recíproco (inverso multiplicativo): Dado um número $a \neq 0$, existe um número x tal que $a \cdot x = 1$.

Esse não é um axioma satisfeito pelos números inteiros. Por exemplo, não existe nenhum inteiro x tal que $2 \cdot x = 1$. Mas o que faremos agora é deduzir propriedades de um "sistema numérico" que satisfaça Ax's 1-6.

Teorema 4 (Cancelamento no produto): Se $a \cdot c = a \cdot b$ e $a \neq 0$, então $b = c$.

__Prova__: Como estamos supondo que $a \neq 0$, o Axioma 6 garante que existe x tal que $a \cdot x = x \cdot a = 1$. Assim,

$$a \cdot b = a \cdot c$$
$$x \cdot (a \cdot b) = x \cdot (a \cdot c)$$
$$(x \cdot a) \cdot b = (x \cdot a) \cdot c$$
$$1 \cdot b = 1 \cdot c$$
$$b = c \qquad \blacksquare$$

Teorema 5 (possibilidade de divisão): Dados a, b, com $a \neq 0$, existe x tal que $a \cdot x = b$. Além disso, x é único com essa propriedade.

__Prova__: Como $a \neq 0$, existe y tal que $a \cdot y = y \cdot a = 1$ pelo Axioma 6.

Definimos $x = y \cdot b = b \cdot y$. Assim,

$$a \cdot x = a \cdot (y \cdot b) = (a \cdot y) \cdot b = 1 \cdot b = b.$$

Suponha que $a \cdot x = b$ e $a \cdot x' = b$. Então $a \cdot x = a \cdot x'$ e, pelo Teorema 4, $x = x'$.

$\blacksquare$

Denotamos $x = b/a$ e $1/a = a^{-1}$ é chamado o __RECÍPROCO__ de a.

Exercício: Prove os teoremas 9 a 15

THEOREM I.3.

THEOREM I.4. $-(-a) = a$.

THEOREM I.5. $a(b - c) = ab - ac$.

THEOREM I.6. $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$.

THEOREM I.7. CANCELLATION LAW FOR MULTIPLICATION. *If $ab = ac$ and $a \neq 0$, $b = c$. (In particular, this shows that the number 1 of Axiom 4 is unique.)*

THEOREM I.8. POSSIBILITY OF DIVISION. *Given a and b with $a \neq 0$, there is exactly o such that $ax = b$. This x is denoted by b/a or $\frac{b}{a}$ and is called the quotient of b and a. particular, $1/a$ is also written a^{-1} and is called the reciprocal of a.*

THEOREM I.9. *If $a \neq 0$, then $b/a = b \cdot a^{-1}$.*

THEOREM I.10. *If $a \neq 0$, then $(a^{-1})^{-1} = a$.*

THEOREM I.11. *If $ab = 0$, then $a = 0$ or $b = 0$.*

THEOREM I.12. $(-a)b = -(ab)$ *and* $(-a)(-b) = ab$.

THEOREM I.13. $(a/b) + (c/d) = (ad + bc)/(bd)$ *if* $b \neq 0$ *and* $d \neq 0$.

THEOREM I.14. $(a/b)(c/d) = (ac)/(bd)$ *if* $b \neq 0$ *and* $d \neq 0$.

THEOREM I.15. $(a/b)/(c/d) = (ad)/(bc)$ *if* $b \neq 0$, $c \neq 0$, *and* $d \neq 0$.

Os Axiomas 1 a 6 são chamados AXIOMAS DE CORPO. O corpo que todos conhecemos bem é o corpo dos números racionais:

$$\boxed{\mathbb{Q} = \{ m/n : m, n \in \mathbb{Z} \}}.$$

Há outros corpos, no entanto. Tomemos o conjunto $\{0,1\}$ e definamos adição e multiplicação pelas tabelas a seguir:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

O conjunto $\{0,1\}$ com as operações ao lado é denotado por $\mathbb{F}_2$.

Teorema 6: $\mathbb{F}_2$ é um corpo, isto é, satisfaz os Axiomas 1 a 6.

Prova: Exercício.

Note que isso quer dizer que todos os teoremas que provamos até agora, incluindo os teoremas 9–15 do exercício anterior, valem para $\mathbb{F}_2$. Quer dizer também que os axiomas 1 a 6 não são capazes de especificar se estamos lidando com $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{F}_2$ ou outros possíveis exemplos de corpos, isto é, existem pelo menos dois corpos diferentes (na verdade, existem muitos outros corpos).

Vamos agora introduzir mais três axiomas, chamados AXIOMAS DE ORDEM.
Existe um subconjunto de números, chamados NÚMEROS POSITIVOS, satisfazendo

Axiom 7: Se a, b são positivos então $a+b$ e $a \cdot b$ também o são.

Axioma 8: Se $a \neq 0$, então ou a é positivo ou $-a$ é positivo, mas não ambos.

Axioma 9: 0 não é positivo.

Usando os novos axiomas, definimos uma "relação de ordem" $<$ como segue:

$$\boxed{a < b \iff b-a \text{ é positivo}}$$

isto é, $a<b$ se e só se o número que devemos somar a $\underline{a}$ para obter $\underline{b}$ é um número positivo.

$a<b$ é lido "a é menor que b".

Definimos ainda:

- $a > b \iff b < a$
- $a \leq b \iff a < b$ ou $a = b$
- $a \geq b \iff b \leq a$

Teorema 7: $a > 0 \iff a$ é positivo.

<u>Prova</u>: $a > 0 \iff 0 < a \overset{\text{Def.}}{\iff} a-0$ é positivo. Mas $a-0$ é o (único) número que devemos somar a 0 para obter $\underline{a}$. Como $0+a=a$, segue que $a-0=a$, e, portanto, a é positivo. Por outro lado, se a é positivo, então $a-0=a$ também o é, o que quer dizer que $0<a$. ∎

Se $a < 0$, dizemos que a é NEGATIVO, isto é, a é negativo se (e só se) $0 - a = -a$ é positivo.

Teorema 8: Se $a \neq 0$, então a é positivo ou a é negativo, mas não ambos.

Prova: O Axioma 8 afirma que se $a \neq 0$, a é positivo ou $-a$ é positivo, mas não ambos. Como acabamos de ver, a é negativo se e só se $-a$ é positivo. Isto é, o enunciado do teorema é apenas uma reinterpretação do Axioma 8. ∎

Teorema 9: $-(b-a) = a-b$.

Prova: $-(b-a)$ é o único número tal que $(b-a) + (-(b-a)) = 0$. Sabemos também (Teorema 3) que $a - b = a + (-b)$ e $b - a = b + (-a)$. Então

$$
\begin{aligned}
(b-a) + (a-b) &= (b + (-a)) + (a + (-b)) \\
&= b + ((-a) + a) + (-b) \\
&= b + 0 + (-b) \\
&= b + (-b) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Segue assim que $a - b = -(b-a)$. ∎

Teorema 10 (Lei da Tricotomia): Dados dois números a, b exatamente uma de três possibilidades ocorre: $a < b$, $a > b$ ou $a = b$.

Prova: Suponha primeiro que $a = b$. Então $b - a = b + (-a) = a + (-a) = 0$ e, analogamente, $a - b = 0$. O Axioma 9 afirma que 0 não é positivo e, portanto, $a = b$ implica que nem $a - b$ nem $b - a$ são positivos, isto é, nem $b < a$, nem $a < b$.

Suponha agora que $a \neq b$ e seja $x = b - a$. Então $x \neq 0$ (já que se $b - a = 0$, então $b = a + (b - a) = a + 0 = a$). Segue do Teorema 8 que x é positivo ou negativo, isto é, $-x$ é positivo, mas não ambos. Se x é positivo, $b - a$ é positivo e portanto $a < b$. Se $-x$ é positivo, o Teorema 9 implica que $a - b$ é positivo, isto é, $b < a$. ■

Teorema 11 (transitividade) $a < b$ e $b < c \Rightarrow a < c$.

Prova: $a < b \Leftrightarrow b - a$ é positivo e $b < c \Leftrightarrow c - b$ é positivo. Assim, pelo Axioma 7, $(b-a) + (c-b)$ também é positivo. Mas

$$(b-a) + (c-b) = (b + (-a)) + (c + (-b)) = c + (-a) = c - a,$$

isto é, $a < c$. ■

Exercício: Prove os teoremas

$x \le y$ means that ...

$y \ge x$ means that $x \le y$.

Thus, we have $x > 0$ if and only if x is positive. If $x < 0$, we say that x is nega... $x \ge 0$, we say that x is *nonnegative*. A pair of simultaneous inequalities such as ... $y < z$ is usually written more briefly as $x < y < z$; similar interpretations are give... compound inequalities $x \le y < z$, $x < y \le z$, and $x \le y \le z$.

From the order axioms we can derive all the usual rules for calculating with ineq... The most important of these are listed here as theorems.

THEOREM I.16. TRICHOTOMY LAW. *For arbitrary real numbers a and b, exactly ... the three relations $a < b$, $b < a$, $a = b$ holds.*

THEOREM I.17. TRANSITIVE LAW. *If $a < b$ and $b < c$, then $a < c$.*

THEOREM I.18. *If $a < b$, then $a + c < b + c$.*

THEOREM I.19. *If $a < b$ and $c > 0$, then $ac < bc$.*

THEOREM I.20. *If $a \ne 0$, then $a^2 > 0$.*

THEOREM I.21. $1 > 0$.

THEOREM I.22. *If $a < b$ and $c < 0$, then $ac > bc$.*

THEOREM I.23. *If $a < b$, then $-a > -b$. In particular, if $a < 0$, then $-a > 0$.*

THEOREM I.24. *If $ab > 0$, then both a and b are positive or both are negative.*

THEOREM I.25. *If $a < c$ and $b < d$, then $a + b < c + d$.*

Again, we shall prove only a few of these theorems as samples to indicate how the p... may be carried out. Proofs of the others are left as exercises.

Prove também que o corpo F_2 não satisfaz os axiomas de ordem (7, 8 e 9).

Os naturais, inteiros e racionais

Suponha agora que temos um corpo ordenado, isto é, um conjunto C, com duas operações $+$ e $\cdot$ que satisfazem os Axiomas 1-6, de corpo, e Axiomas 7-9, de ordem. Denotamos por C_+ o subconjunto de números positivos de C.

Dizemos que um subconjunto de C é INDUTIVO se satisfaz as duas propriedades

(i) 1 está no conjunto e

(ii) se x está no conjunto, então $x+1$ também está.

Obviamente, C ele próprio é um conjunto indutivo. Segue do Axioma 7 e do Teorema I.21 (exercício da página anterior) que C_+ também é um conjunto indutivo.

O conjunto $\mathbb{N}$ de números naturais é, por definição, o menor subconjunto indutivo de C, isto é, a interseção de todos os subconjuntos indutivos de C. Dito de outro modo, um número é natural se pertence a todos os subconjuntos indutivos.

Essa definição tem dois problemas: 1) não provamos que corpos ordenados existem e 2) se vários corpos ordenados existirem, essa definição produziria "um $\mathbb{N}$" dentro de cada um deles. Voltaremos a essas questões mais tarde...

O conjunto $\mathbb{N}$ é, ele próprio, indutivo:

Teorema: A interseção de conjuntos indutivos é um conjunto indutivo.

Prova: Vamos fazer a prova para dois conjuntos indutivos A, B, mas o mesmo argumento funciona para interseções arbitrárias. Como $\mathbb{N}$ é a interseção de todos os conjuntos indutivos, segue que $\mathbb{N}$ também é indutivo.

Assim, suponha que A e B são subconjuntos indutivos de nosso corpo ordenado C. Pela definição de conjuntos indutivos, $1 \in A$ e $1 \in B$, e portanto $1 \in A \cap B$. Se $x \in A \cap B$, então $x \in A$ e $x \in B$. Como A e B são indutivos, $x+1 \in A$ e $x+1 \in B$, de forma que $x+1 \in A \cap B$. Isso mostra que $A \cap B$ tem as duas propriedades (i) e (ii) que definem conjuntos indutivos. ■

Como C é um corpo, C contém os negativos de todos os naturais, que denotamos por $-\mathbb{N}$. O conjunto dos números inteiros é definido por

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N}),$$

e o conjunto dos números racionais é definido por

$$\mathbb{Q} = \{ a/b : \text{ onde } a, b \in \mathbb{Z} \}.$$