

**PEF 3401 – Mecânica das Estruturas II**  
**Lista 1 – Teorema dos Esforços Virtuais**

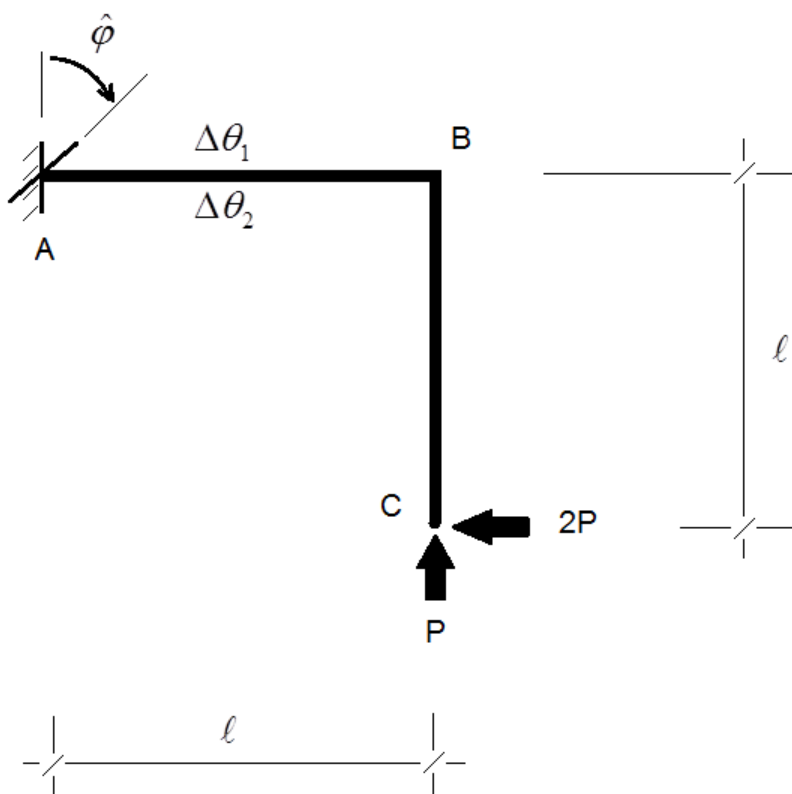
**Exercício 1**

A estrutura reticulada plana da figura 1, com barras prismáticas de comprimento  $\ell = 1,6m$ , seção transversal retangular de altura  $h = 0,2m$ , produto de rigidez à flexão  $EI = 80000kNm^2$  e coeficiente de dilatação térmica  $\alpha = 10^{-5} \text{ } ^\circ C^{-1}$ , está submetida ao carregamento indicado, com:

$P = 20kN$ ; variação de temperatura **somente na barra AB**, com  $\Delta\theta_1 = -15^\circ C$  e  $\Delta\theta_2 = 15^\circ C$ ; e recalque angular no engaste  $\hat{\phi} = 10^{-3} \text{ rad}$ .

Usando o Teorema dos Esforços Virtuais e desprezando o efeito da força normal, determinar:

- O deslocamento vertical no ponto C.
- A rotação no ponto C.

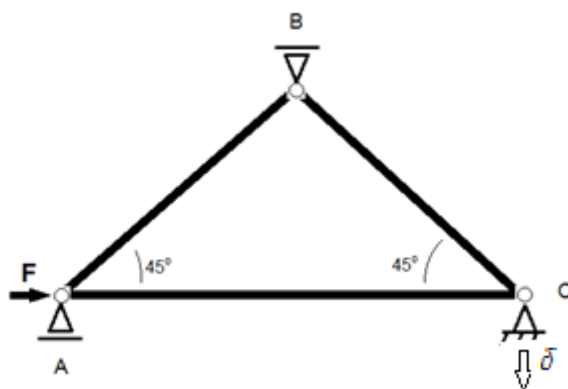


**Figura 1**

**PEF 3401 – Mecânica das Estruturas II**  
**Lista 1 – Teorema dos Esforços Virtuais**

**Exercício 2**

Usando o Teorema dos Esforços Virtuais, determinar as forças normais e o deslocamento horizontal do nó A da treliça da figura 2, quando sobre ela atuam uma força  $F = 600N$  e um recalque vertical  $\delta = 0,01m$  no apoio C.



**Figura 2**

O comprimento das barras AB e BC é  $\ell = 1,5m$ , e o da barra AC é  $\ell\sqrt{2} = 2,12m$ . O produto de rigidez axial de todas as barras é  $EA = 38400N$ .

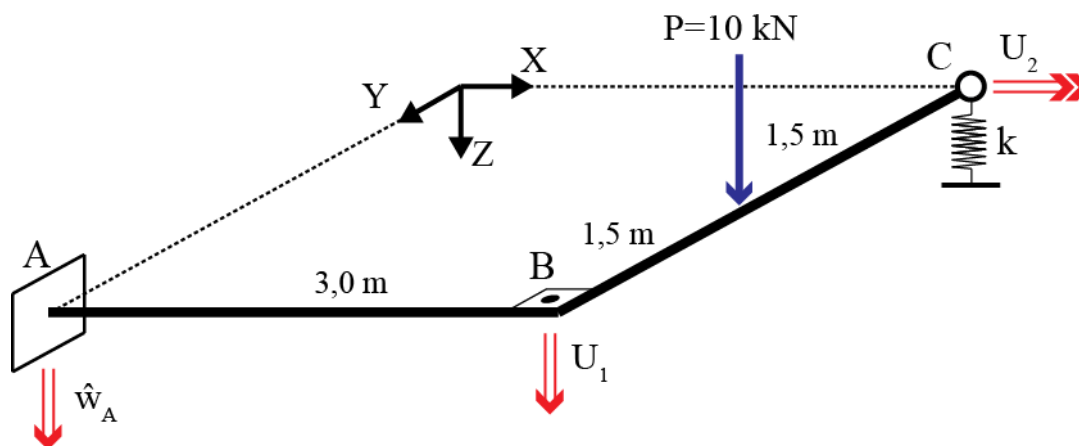
**PEF 3401 – Mecânica das Estruturas II**  
**Lista 1 – Teorema dos Esforços Virtuais**

**Exercício 3**

A estrutura plana da figura 3 é solicitada por força  $P$  e por recalque no engaste dado por  $\hat{w}_A = 0,002 \text{ m}$ . Sabe-se que a força na mola é de compressão e vale  $S = 8,0 \text{ kN}$ . As barras são prismáticas de mesma seção transversal com  $EI = GI_T = 200.000 \text{ kNm}^2$ . A mola tem coeficiente de rigidez  $k = 5.475 \text{ kN/m}$ .

Nessas condições, usando o Teorema dos Esforços Virtuais, calcular:

- O deslocamento linear em B, na direção Z,  $U_1$ .
- A rotação em torno de X no ponto C,  $U_2$ .
- O encurtamento da mola,  $\Delta \ell$ .



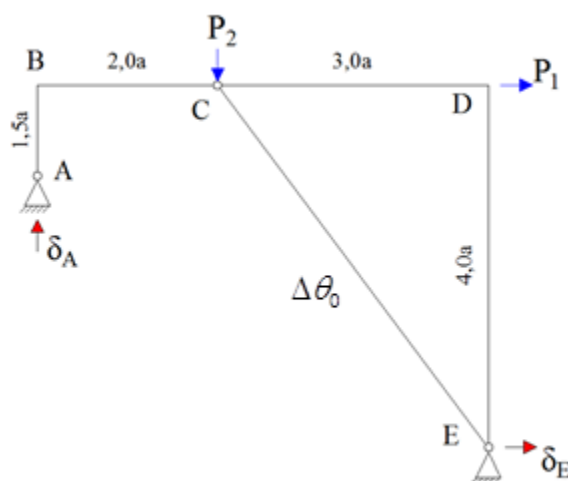
**Figura 3**

**PEF 3401 – Mecânica das Estruturas II**  
**Lista 1 – Teorema dos Esforços Virtuais**

**Exercício 4**

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da estrutura reticulada da figura 4 e calcular o deslocamento horizontal e a rotação do ponto D, usando o Teorema dos Esforços Virtuais. Não é necessário considerar o efeito da força normal em ABCDE, mas o é na barra EC. As ações sobre a estrutura estão indicadas na mesma figura e constituem-se de forças aplicadas  $P_1$  e  $P_2$ , recalques de apoio  $\delta_A$  e  $\delta_E$ , e um carregamento térmico uniforme  $\Delta\theta_0$ , exclusivamente na barra EC.

Dados:  $a = 1m$ ,  $P_1 = 200kN$ ,  $P_2 = 100kN$ ,  $EI = 80000kNm^2$ ,  $EA = 200000kN$ ,  $\alpha = 10^{-5} C^{-1}$ ,  $\Delta\theta_0 = 20^\circ C$ ,  $\delta_A = 0,001m$  e  $\delta_E = 0,002m$ .



**Figura 4**

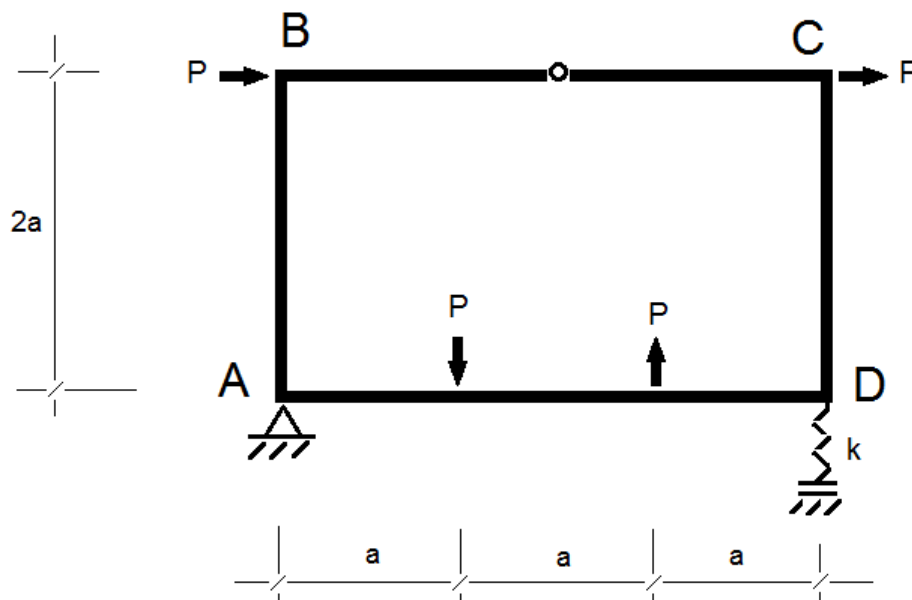
**PEF 3401 – Mecânica das Estruturas II**  
**Lista 1 – Teorema dos Esforços Virtuais**

**Exercício 5**

Para o quadro da figura 5, usando o Teorema dos Esforços Virtuais e desprezando o efeito da força normal, determinar:

- O diagrama de momentos fletores.
- O deslocamento vertical do ponto médio da barra  $AD$ .
- A rotação relativa na articulação da barra  $BC$ .

São conhecidos os valores da carga  $P$ , do comprimento  $a$ , do produto de rigidez à flexão  $EI$  (constante) e da rigidez da mola elástica linear  $k$ .



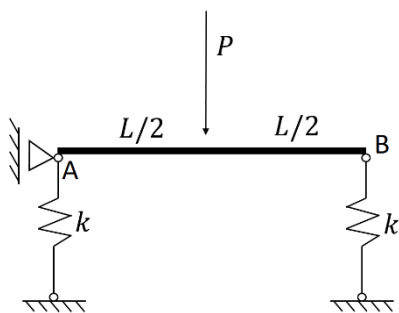
**Figura 5**

**PEF 3401 – Mecânica das Estruturas II**  
**Lista 1 – Teorema dos Esforços Virtuais**

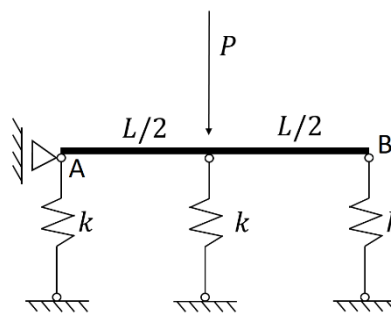
**Exercício 6**

Você deve realizar a análise da viga imponderável AB, que receberá uma carga concentrada  $P$  na metade do seu vão. Esta viga tem comprimento  $L$  e rigidez flexional  $EI$  (constante ao longo do comprimento). Para tanto, você deverá executar as seguintes tarefas de projeto:

- Considerar o sistema apresentado na figura 6. Utilizar o teorema dos esforços virtuais para obter uma expressão para o deslocamento  $\Delta$  observado no ponto de aplicação do carregamento externo de intensidade  $P$ . Interpretar fisicamente os termos da expressão obtida.
- Considerar agora um novo sistema, apresentado figura 7. Utilizar o teorema dos esforços virtuais para obter uma expressão para o deslocamento  $\Delta$  observado no ponto de aplicação do carregamento externo de intensidade  $P$ .



**Figura 6**



**Figura 7**

**PEF 3401 – Mecânica das Estruturas II**  
**Lista 1 – Teorema dos Esforços Virtuais**

**Exercício 7**

Considere-se o pórtico plano solicitado por esforços externos, por recalques de apoio em A e E, e por variação de temperatura apenas nas barras BCD, conforme se indica na figura 1. Esse pórtico é constituído por barras de aço com mesma seção transversal (CSV 300x85).

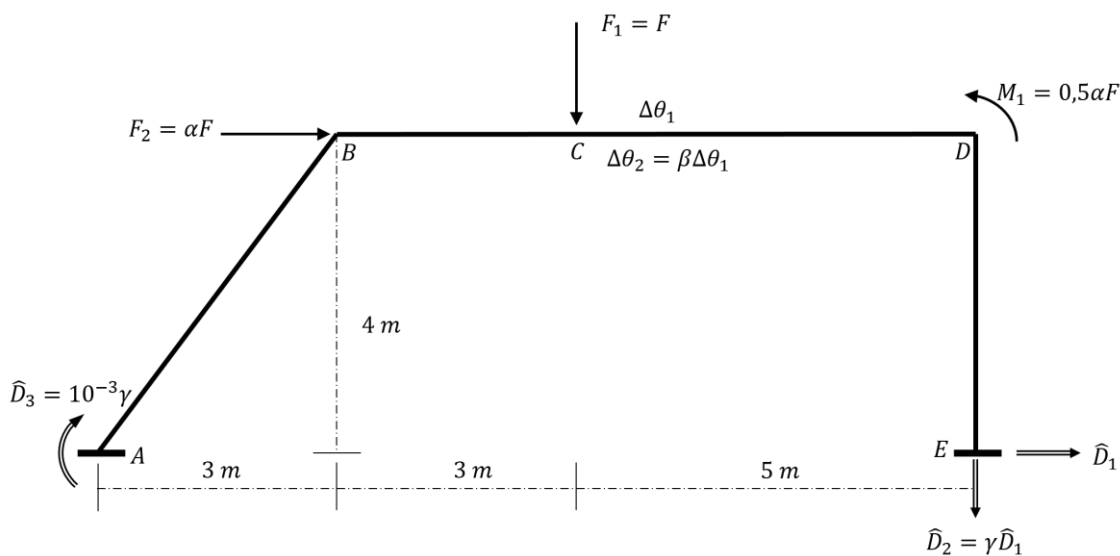
**Dados:**

$$E = 200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2 \quad c_\alpha = 1,2 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1} \quad f_y = 25 \times 10^4 \text{ kN/m}^2$$

$$F = 80 \text{ kN} \quad \Delta\theta_1 = 10^\circ\text{C} \quad \hat{D}_1 = 0,01 \text{ m}$$

$$\text{Perfil CSV 300x85} \quad I = 1,69 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \quad h = 0,3 \text{ m}$$

Os momentos solicitantes são medidos em kNm, e os recalques angulares, em rad.



**Figura 8 – Pórtico plano solicitado por esforços externos**

- a) Traçar os diagramas de esforços solicitantes;
- b) Calcular o deslocamento horizontal do ponto B;
- c) Calcular o deslocamento vertical do ponto C;
- d) Calcular a rotação do ponto D.

**PEF 3401 – Mecânica das Estruturas II**  
**Lista 1 – Teorema dos Esforços Virtuais**

**Respostas**

**Exercício 1**

$$U_2 = 3,63 \cdot 10^{-4} m \text{ (para baixo)}$$

$$U_3 = 2,00 \cdot 10^{-4} rad \text{ (sentido horário)}$$

**Exercício 2**

$$N_{AB} = N_{BC} = -154,7 N$$

$$N_{AC} = -490,6 N$$

$$U_1 = 2,71 \cdot 10^{-2} m \text{ (para a direita)}$$

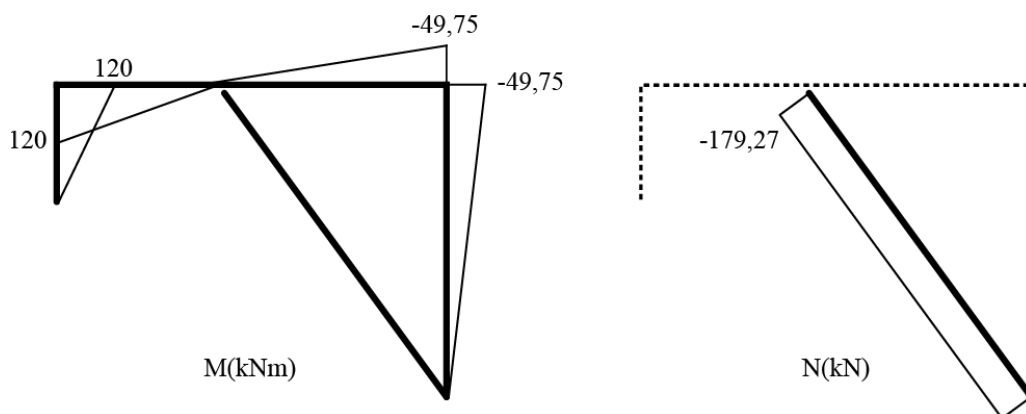
**Exercício 3**

$$U_1 = 2,09 \cdot 10^{-3} m \text{ (para baixo)}$$

$$U_1 = 2,59 \cdot 10^{-5} rad \text{ (sentido anti-horário)}$$

$$\Delta \ell = 1,46 \cdot 10^{-3} m$$

**Exercício 4**



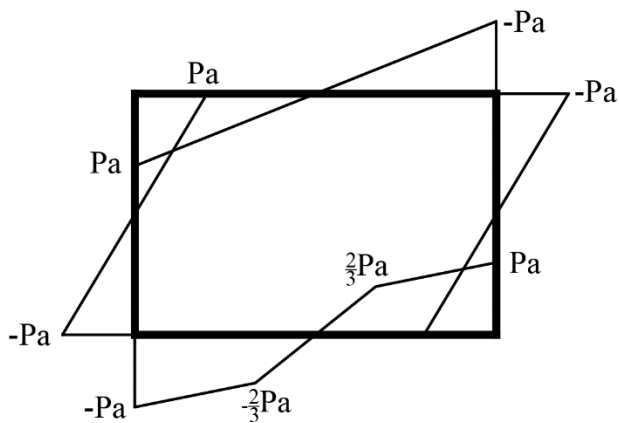
$$U_1 = 4,97 \cdot 10^{-3} m \text{ (para a direita)}$$

$$U_3 = 8,68 \cdot 10^{-5} rad \text{ (sentido anti-horário)}$$



**PEF 3401 – Mecânica das Estruturas II**  
**Lista 1 – Teorema dos Esforços Virtuais**

**Exercício 5**



$$U_1 = \frac{P}{2k} \text{ (para baixo)}$$

$$U_3 = 0$$

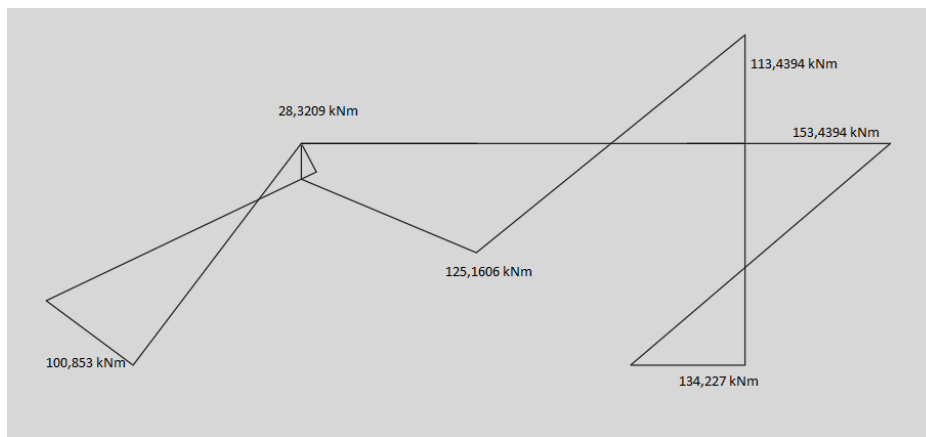
**Exercício 6**

a) 
$$\Delta = \frac{P}{2k} + \frac{PL^3}{48EI}$$

b) 
$$\Delta = \frac{P}{k} \left( \frac{\frac{L^3}{48EI} + \frac{1}{2k}}{\frac{L^3}{48EI} + \frac{3}{2k}} \right)$$

**Exercício 7**

a)



b)  $v_b = 19,1 \text{ mm}$

c)  $v_c = 24,2 \text{ mm}$

d)  $\phi_d = 0,001125 \text{ rad}$