Teoremas de Energia

Carlos Eduardo Nigro Mazzilli
Guilherme Rosa Franzini
Rodrigo Provasi Correia

Agenda

1) Energia de Deformação – U
2) Exemplos – Cálculo de energia de deformação
3) Teorema da energia potencial total – Π
4) Teorema de Lagrange-Dirichlet
5) Flambagem: modelo simples
6) Energia de deformação complementar – U^*
7) Teorema da energia potencial total complementar – Π^*
8) Segundo teorema de Castigliano
9) Teorema de Menabrea
10) Aplicações com Octave

Energia de Deformação – U (1/4)

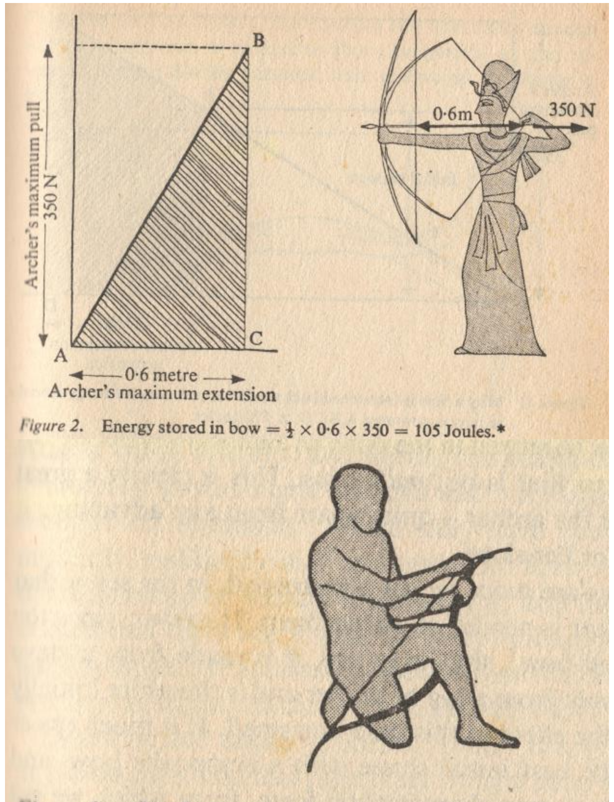


Figure 2. Energy stored in bow = ½ × 0·6 × 350 = 105 Joules.*

Figure 3. Greek stringing bow (vase painting).

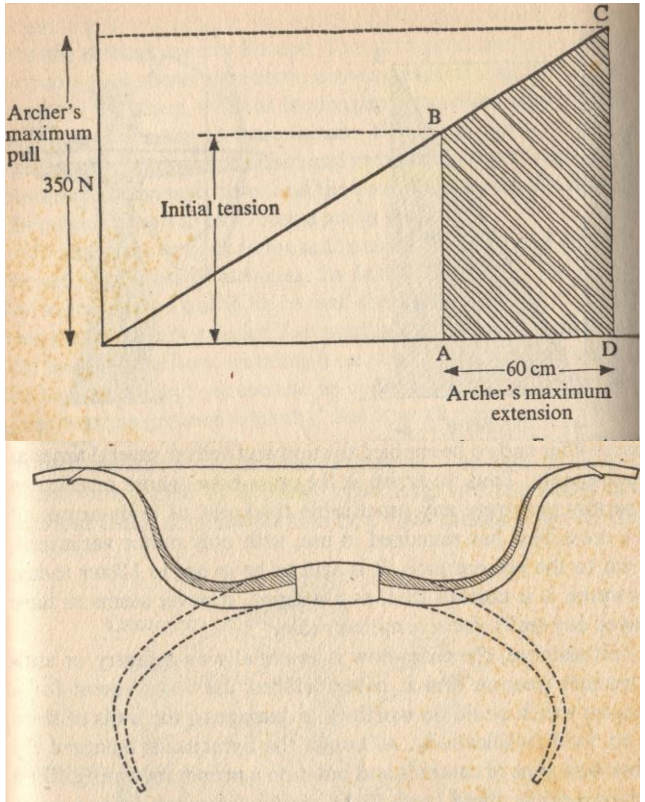


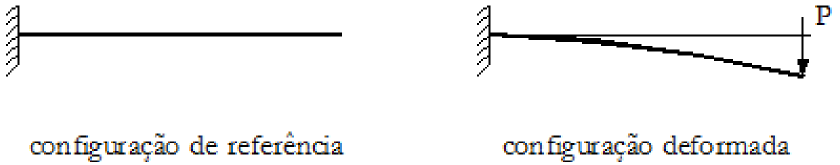
Figure 5. Composite bow, unstrung and strung.

Energia de Deformação – U (2/4)

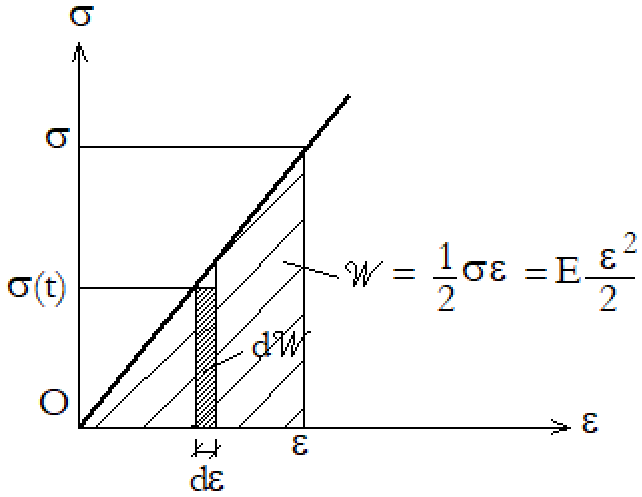
Approximate strain energy storage capacities of various solids

Material	Working strain %	Working stress p.s.i.	Working stress MN/m²	Strain energy stored Joules × 10⁶ per cubic metre	Density kilograms per cubic metre	Energy stored Joules per kilogram
Ancient iron	0·03	10,000	70	0·01	7,800	1·3
Modern spring steel	0·3	100,000	700	1·0	7,800	130
Bronze	0·3	60,000	400	0·6	8,700	70
Yew wood	0·9	18,000	120	0·5	600	900
Tendon	8·0	10,000	70	2·8	1,100	2,500
Horn	4·0	13,000	90	1·8	1,200	1,500
Rubber	300	1,000	7	10·0	1,200	8,000

Energia de Deformação – U (3/4)

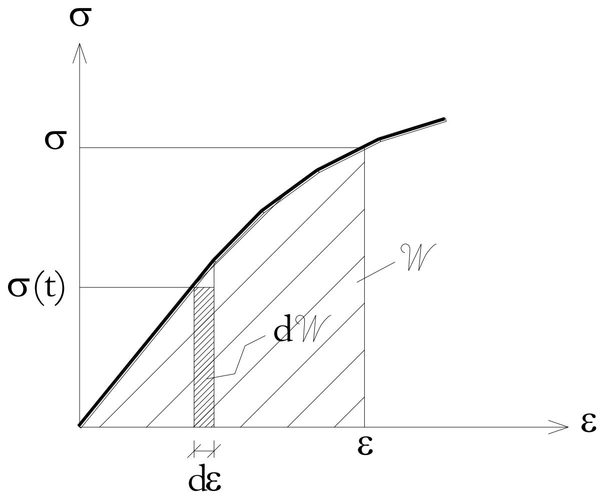


$$U = \int_V W dV$$



Elasticidade linear

$$W = E\frac{\varepsilon^2}{2}$$



Elasticidade não-linear

Energia de Deformação – U (4/4)

1) Teoria elementar de barra plana

$$U = \frac{1}{2}\int_V \sigma\varepsilon\, dV = \frac{1}{2}\int_V E\varepsilon^2\, dV = \frac{1}{2}\int_V E\left(u' - zw''\right)^2 dV = \frac{1}{2}\int_{est}\int_A E\left(u' - zw''\right)^2 dAdx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{est} EI_y\left(w''\right)^2 ds + \frac{1}{2}\int_{est} EA\left(u'\right)^2 ds = \boxed{\int_{est} \frac{{M_y}^2}{2EI_y} ds + \int_{est} \frac{N^2}{2EA} ds}$$

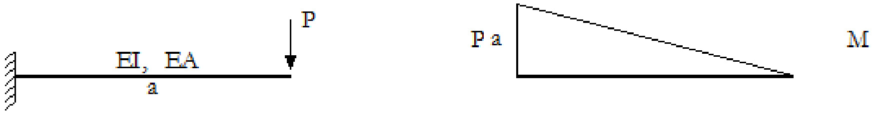
Dependência quadrática dos esforços solicitantes!

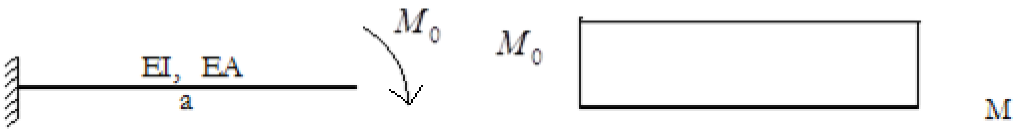
2) Teoria elementar de barra espacial

$$U = \frac{1}{2}\int_{est} EI_y\left(w''\right)^2 ds + \frac{1}{2}\int_{est} EI_z\left(v''\right)^2 ds + \frac{1}{2}\int_{est} EA\left(u'\right)^2 ds + \frac{1}{2}\int_{est} GI_T\left(\theta'\right)^2 ds$$

$$= \int_{est} \frac{{M_y}^2}{2EI_y} ds + \int_{est} \frac{{M_z}^2}{2EI_z} ds + \int_{est} \frac{N^2}{2EA} ds + \int_{est} \frac{T^2}{2GI_T} ds$$

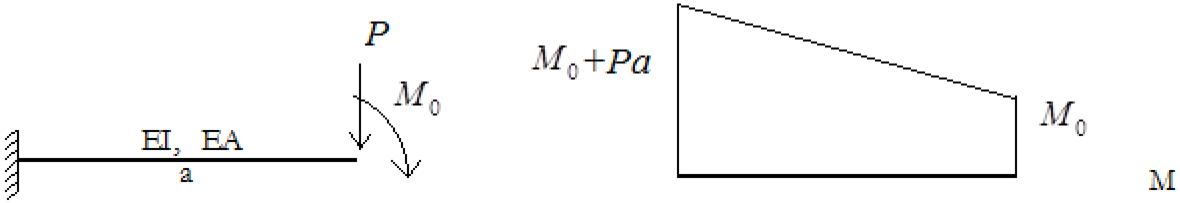
Exemplos – Cálculo de energia de deformação (1/3)





$$U = \int_{est} \frac{{M_y}^2}{2EI_y} ds = \frac{P^2 a^3}{6EI}$$

$$U = \int_{est} \frac{{M_y}^2}{2EI_y} ds = \frac{{M_0}^2 a}{2EI}$$

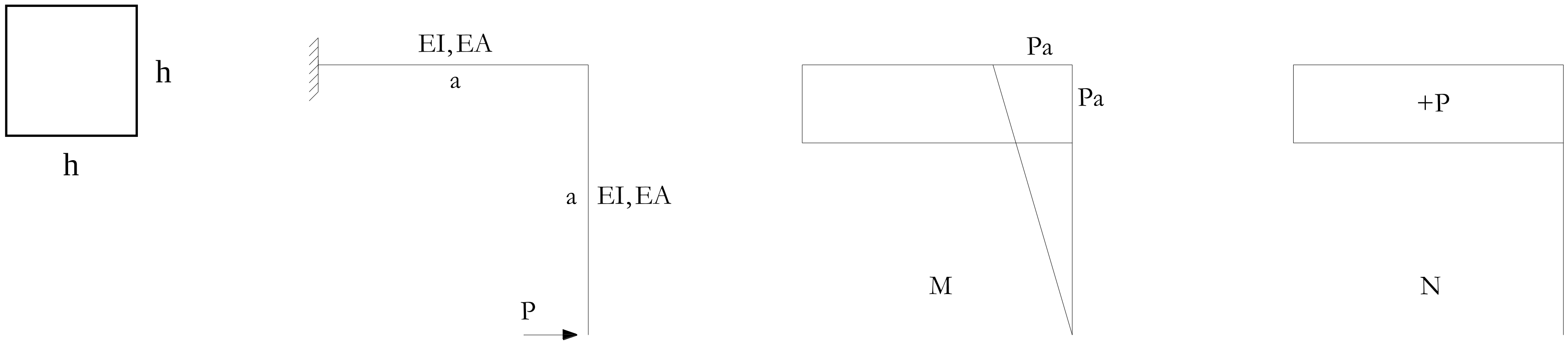


$$U = \int_{est} \frac{{M_y}^2}{2EI_y} ds = \frac{P^2 a^3}{6EI} + \frac{{M_0}^2 a}{2EI} + \boxed{\frac{M_0 P a^2}{2EI}}$$

Trabalho cruzado!

Não vale a simples sobreposição de efeitos!

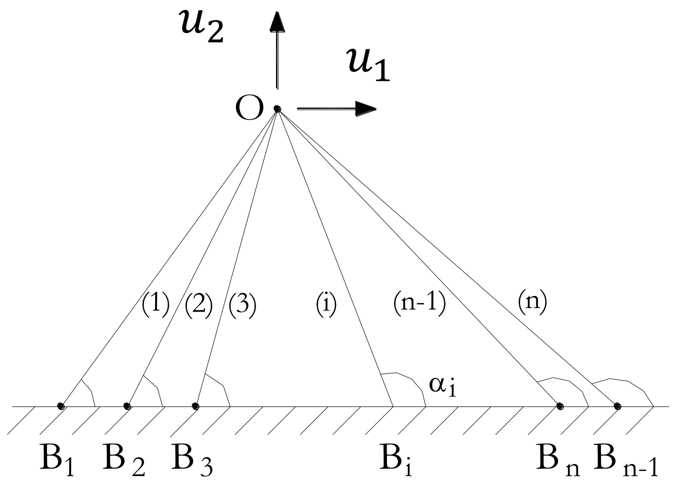
Exemplos – Cálculo de energia de deformação (2/3)



$$U = \int_{est} \frac{{M_y}^2}{2EI_y} ds + \int_{est} \frac{N^2}{2EA} ds = \frac{2P^2a^3}{3EI} + \frac{P^2a}{2EA} = \frac{2P^2a^3}{3EI}\left(1 + \boxed{\frac{h^2}{16a^2}}\right)$$

Na presença de momento fletor, o efeito da força normal é negligenciável!

Exemplos – Cálculo de energia de deformação (3/3)



Energia de deformação:

$$U = \int_{est} \frac{N^2}{2EA} ds = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\ell_i} \frac{N^2}{2EA} ds = \sum_{i=1}^{n} \frac{{N_i}^2 \ell_i}{2EA_i}$$

Força nas barras:

$$N_i = \frac{EA_i}{\ell_i}(u_1 \cos\alpha_i + u_2 \mathrm{sen}\alpha_i)$$

Assim:

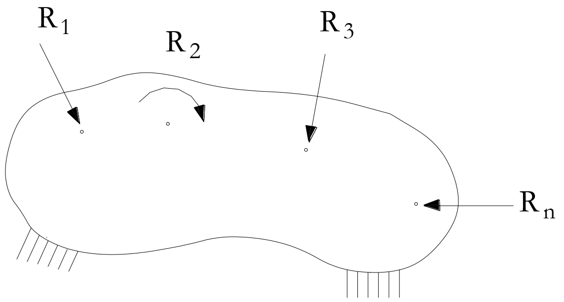
$$U = \frac{1}{2}(K_{11}u_1^2 + K_{12}u_1u_2 + K_{21}u_2u_1 + K_{22}u_2^2)$$
$$= \frac{1}{2}\{u\}^T[K]\{u\}$$

onde:

$$[K] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \frac{EA_i}{\ell_i}\cos^2\alpha_i & \sum_{i=1}^{n} \frac{EA_i}{\ell_i}\cos\alpha_i \sin\alpha_i \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{EA_i}{\ell_i}\cos\alpha_i \sin\alpha_i & \sum_{i=1}^{n} \frac{EA_i}{\ell_i}\mathrm{sen}^2\alpha_i \end{bmatrix}$$

Teorema da energia potencial total – Π

“Entre todas as soluções compatíveis, aquela que também é equilibrada torna estacionária a energia potencial total”.



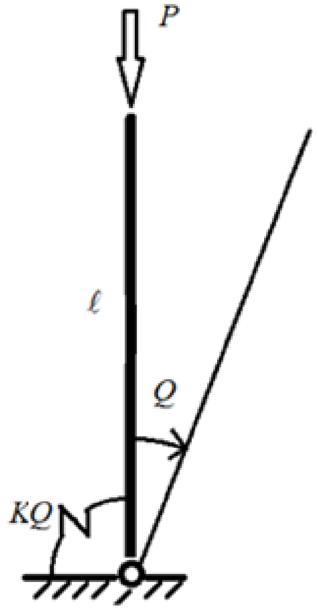
$$\Pi = \mathrm{U}(u_i) + \mathrm{P}(u_i) = \mathrm{U}(u_i) - \sum_{i=1}^{n} R_i u_i \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \Pi}{\partial u_k} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u_k} - R_k = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad [K]\{u\} = \{R\}$$

Teorema de Lagrange-Dirichlet

"Se a energia potencial total for mínima para uma configuração de equilíbrio, então ela é estável e reciprocamente":

$[K]$: Positiva-definida $\leftrightarrow$ estabilidade

Flambagem: modelo simples (1/4)



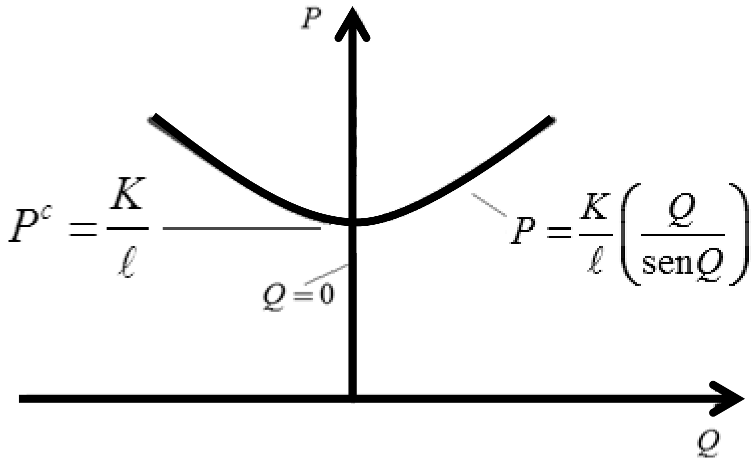
Energia de potencial: $\Pi = \frac{1}{2} K Q^2 - P\ell(1 - \cos Q)$

Duas trajetórias de equilíbrio:

Equilíbrio: $\Pi_{,Q} = \frac{d\Pi}{dQ} = KQ - P\ell \operatorname{sen} Q = 0 \rightarrow \begin{cases} Q = 0 \\ \text{ou} \\ Q \neq 0 \text{ e } P = \frac{K}{\ell}\left(\frac{Q}{\operatorname{sen} Q}\right) \cong \frac{K}{\ell}\left(1 + \frac{Q^2}{6}\right) \end{cases}$

Trajetória primária (0)

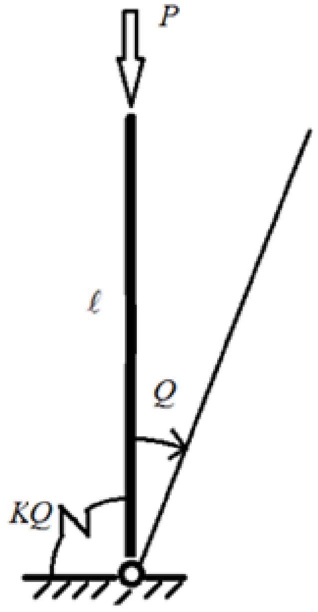
Trajetória secundária (*)



É necessário verificar a estabilidade das trajetórias!

Flambagem: modelo simples (2/4)

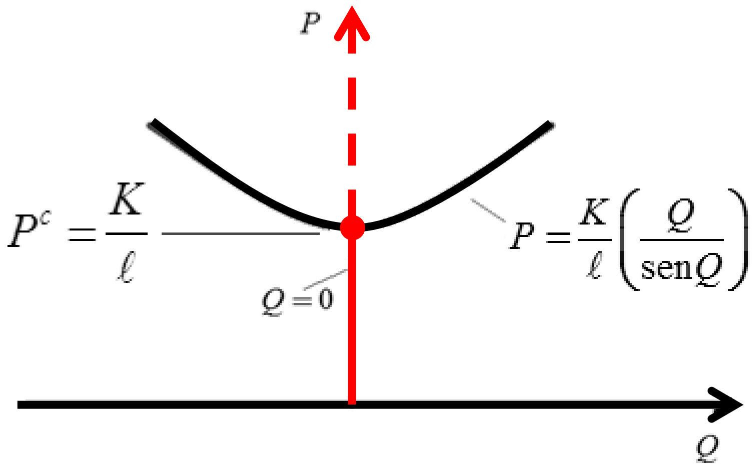
Estabilidade da trajetória primária (0): $Q = 0$



$$\delta\Pi = \underbrace{\cancel{\Pi^0_{,Q}}}_{0}\delta Q + \frac{1}{2!}\Pi^0_{,QQ}\delta Q^2 + \frac{1}{3!}\Pi^0_{,QQQ}\delta Q^3 + \frac{1}{4!}\Pi^0_{,QQQQ}\delta Q^4 + \ldots$$

Estudar o sinal

$$\Pi^0_{,QQ} = K - P\ell; \quad \Pi^0_{,QQQ} = 0; \quad \Pi^0_{,QQQQ} = P\ell$$



Discussão:

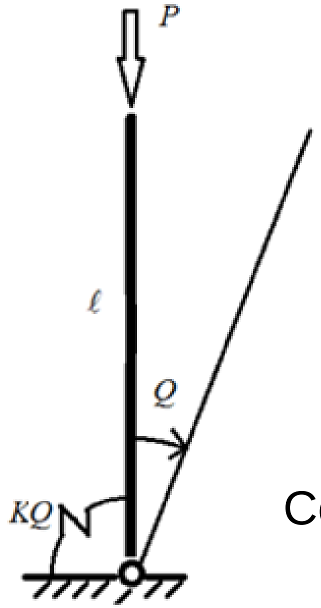
Se: $P < \dfrac{K}{\ell} \rightarrow \Pi^0_{,QQ} > 0 \rightarrow$ $Q = 0$ é estável

Se: $P > \dfrac{K}{\ell} \rightarrow \Pi^0_{,QQ} < 0 \rightarrow$ $Q = 0$ é instável

Se: $P = \dfrac{K}{\ell} \rightarrow \Pi^0_{QQ} = 0;\ \Pi^0_{QQQ} = 0;\ \Pi^0_{QQQQ} > 0 \rightarrow$ $Q = 0$ é estável

Flambagem: modelo simples (3/4)

Estabilidade da trajetória secundária (*): $Q \neq 0$ e $P = \dfrac{K}{\ell}\left(\dfrac{Q}{\text{sen}Q}\right) \cong \dfrac{K}{\ell}\left(1 + \dfrac{Q^2}{6}\right)$

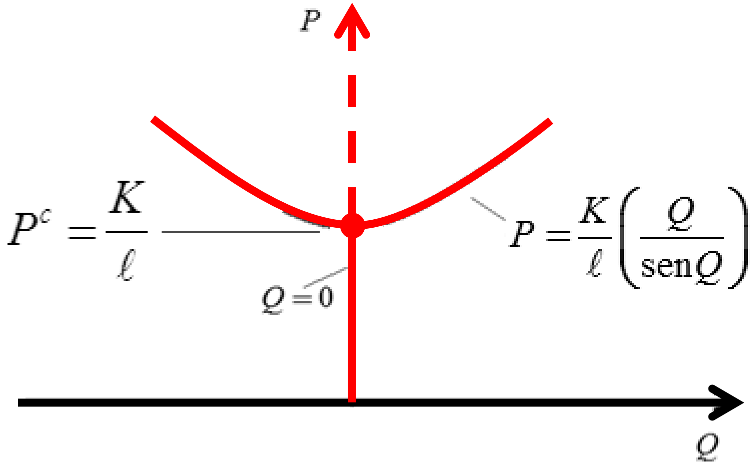


$$\delta\Pi = \cancelto{0}{\Pi^*_{,Q}}\delta Q + \frac{1}{2!}\Pi^*_{,QQ}\delta Q^2 + \frac{1}{3!}\Pi^*_{,QQQ}\delta Q^3 + \frac{1}{4!}\Pi^*_{,QQQQ}\delta Q^4 + \ldots$$

Estudar o sinal

$$\Pi^*_{,QQ} = K - P\ell\cos Q = K\left[1 - \frac{Q}{\tan Q}\right] > 0$$

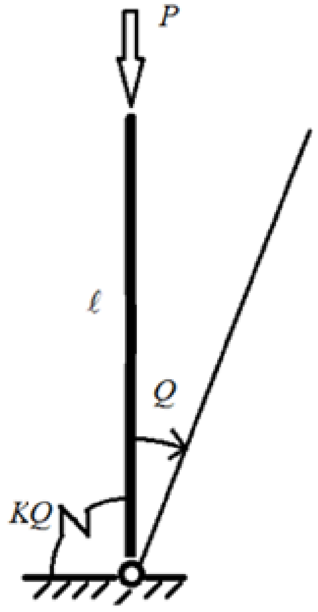
Como $Q \neq 0$ e $\Pi^*_{,QQ} > 0$ →Trajetória secundária (*) é estável



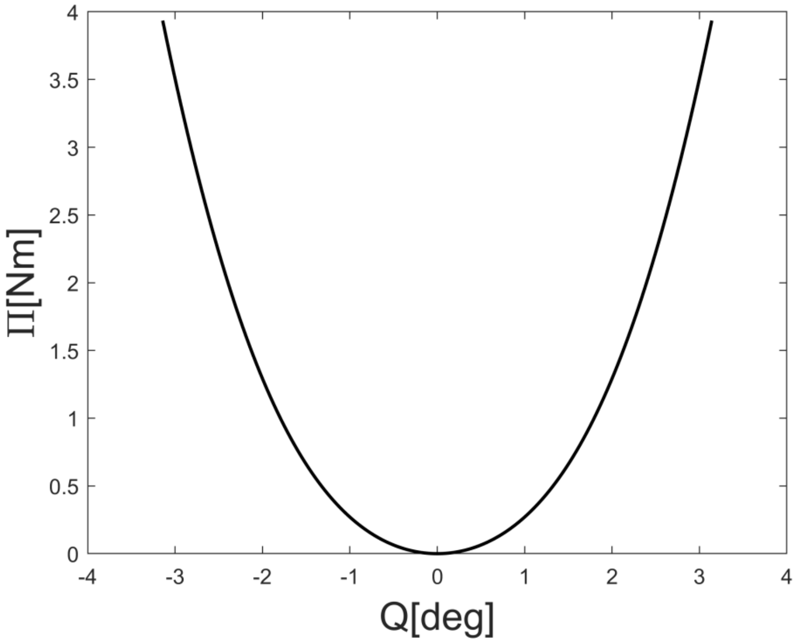
Flambagem: modelo simples (4/4)

Traçar função energia potencial total para:

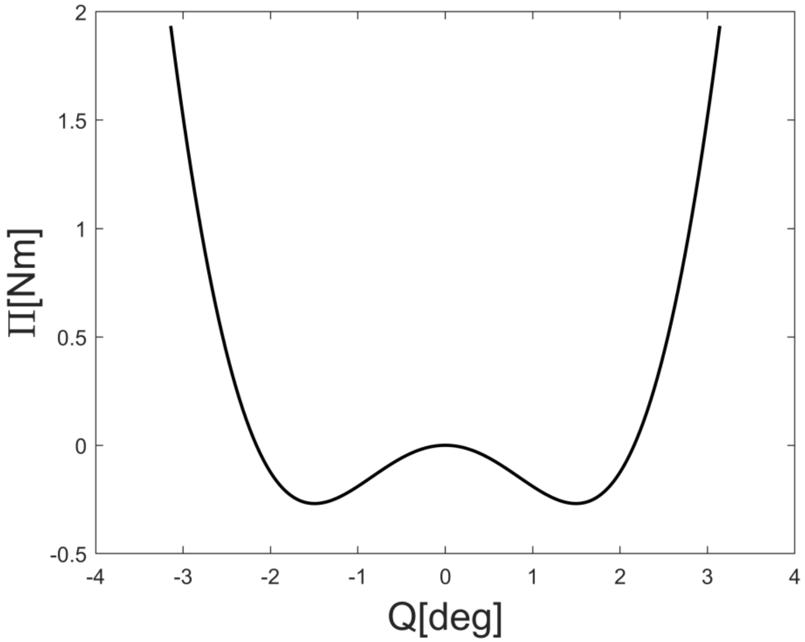
Energia de potencial: $$\Pi = \frac{1}{2}KQ^2 - P\ell(1-\cos Q)$$



$K = 1;\ l = 1.$



$$P = \frac{1}{2}\left(\frac{K}{\ell}\right) < P^C$$



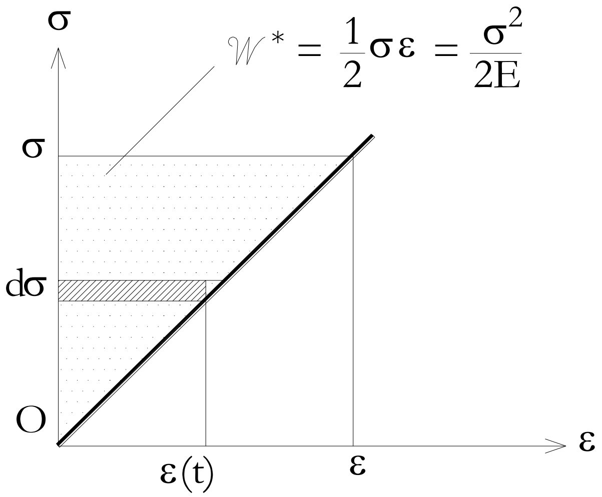
$$P = \frac{3}{2}\left(\frac{K}{\ell}\right) > P^C$$

Energia de deformação complementar – U*

$$\mathrm{U}^* = T^*_{\mathrm{int}}$$

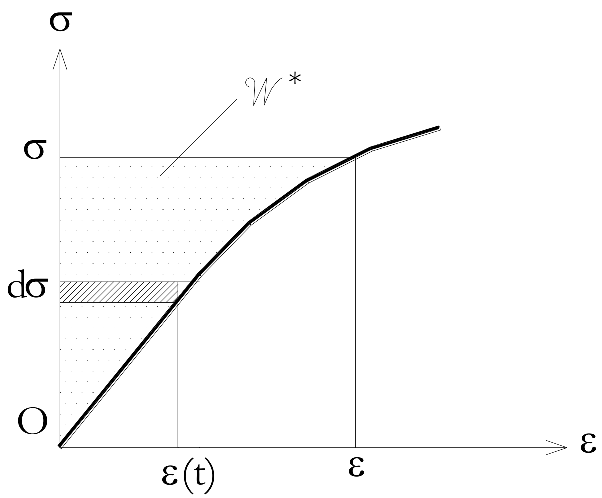
$$\mathrm{U}^* = \int_V \mathrm{W}^* dV$$

$$\mathrm{U}^* + \mathrm{U} = \int_V \sigma\epsilon dV$$



Elasticidade linear

$$\mathrm{W}^* = \int_0^\sigma \varepsilon d\sigma$$

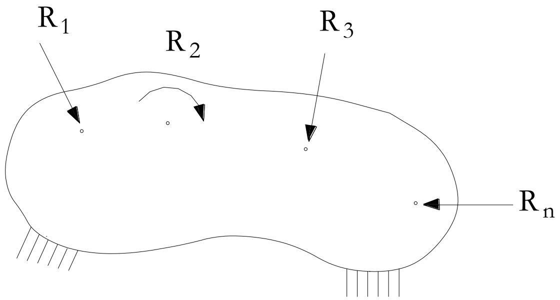


Elasticidade não-linear

$\mathrm{W}^* = \mathrm{W}$ Material elástico linear:

Teorema da energia potencial total complementar Π^*

"Entre todas as soluções equilibradas, aquela que também é compatível torna estacionária a energia potencial total complementar".

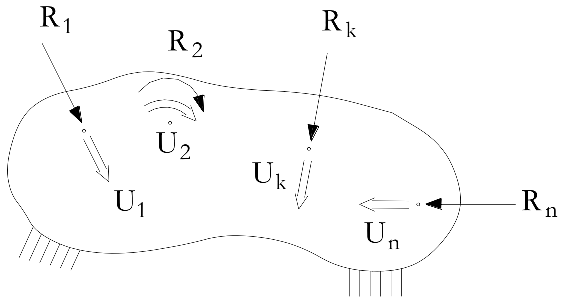


$$\Pi^* = \mathrm{U}^*(R_i) + P^*(R_i) = \mathrm{U}^*(R_i) - \boxed{\sum_{i=1}^{n} R_i \hat{u}_i} \Rightarrow \frac{\partial \Pi^*}{\partial R_k} = \frac{\partial \mathrm{U}^*}{\partial R_k} - \hat{u}_k = 0$$

em S_u

Segundo teorema de Castigliano

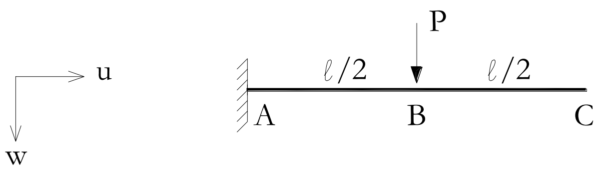
“Para sistemas elásticos lineares, se a energia de deformação for expressa em função de esforços concentrados independentes entre si, então a sua derivada parcial em relação a um desses esforços é igual ao deslocamento correspondente”



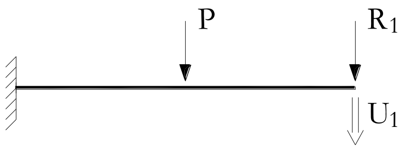
$$U^* = U \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial R_k} = u_k$$

Cálculo de deslocamentos estrutura isostática (1/2)

Calcular o deslocamento vertical do ponto C



Aplicação de esforço R_1 no ponto C:



Esforço correspondente ao deslocamento que se quer calcular!

Momento fletor solicitante:

$$M^e = M + R_1 \bar{M}_1$$

M: diagrama de momentos real

$\bar{M}_1$: diagrama de momentos para $R_1 = 1$

Energia de deformação:

$$\mathrm{U} = \int_0^{\ell} \frac{{M^e}^2}{2EI} dx$$

Segundo teorema de Castigliano $\rightarrow$ $\left.\dfrac{\partial \mathrm{U}(P, R_1)}{\partial R_1}\right|_{R_1=0} = \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial R_1}(P, 0) = u_1$

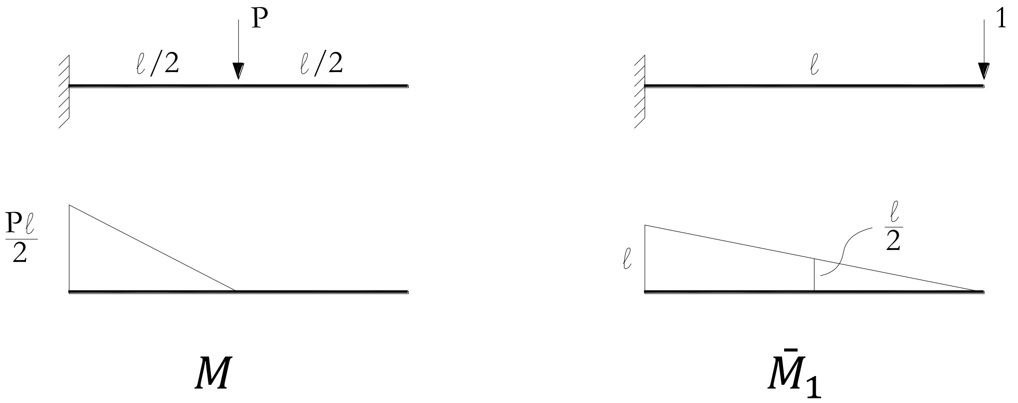
Cálculo de deslocamentos estrutura isostática (2/2)

Daí,

$$u_1 = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial R_1} = \int_0^\ell \frac{M^e}{EI}\frac{\partial M^e}{\partial R_1}dx$$

com:

$$M^e = M + R_1\bar{M}_1 \quad \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M^e}{\partial R_1} = \bar{M}_1 \\ (M)_{R_1=0} = M \end{cases}$$

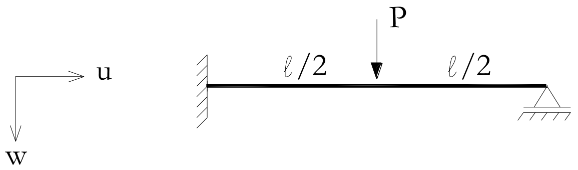


Assim:

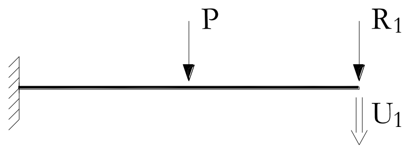
$$u_1 = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial R_1}(P,0) = \int_0^\ell \frac{M^e}{EI}\frac{\partial M^e}{\partial R_1}dx = \int_0^\ell \frac{M\bar{M}_1}{EI}dx = \frac{5P\ell^3}{48EI}$$

Teorema de Menabrea (1/3)

Resolver a estrutura hiperestática



EIF e aplicação de esforço R_1 no ponto C:



$$R_1 = X_1$$

Incógnita hiperestática

Momento fletor solicitante:

$$M^e = M_0 + X_1 \bar{M}_1$$

$$\mathrm{U} = \int_0^{\ell} \frac{{M^e}^2}{2EI} dx$$

Segundo teorema de Castigliano $\rightarrow$ $\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial X_1}(P, X_1) = u_1$

Para o caso de deslocamento nulo $u_1 = 0 \rightarrow \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial X_1}(P, X_1) = 0$

Teorema de Menabrea

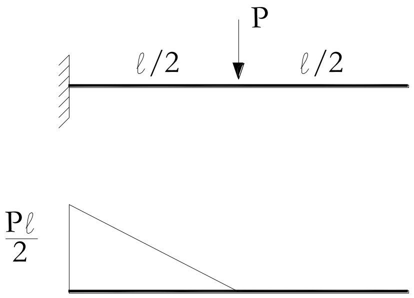
Teorema de Menabrea (2/3)

Daí,

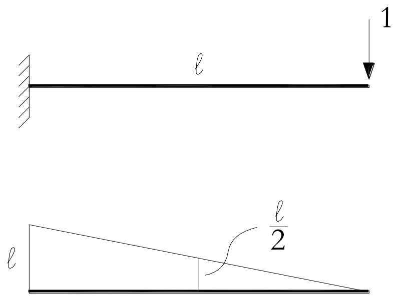
$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial X_1}(P, X_1) = \int_0^{\ell} \frac{M^e}{EI}\frac{\partial M^e}{\partial X_1}dx = 0$$

com:

$$M^e = M_0 + X_1\bar{M}_1 \quad \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M^e}{\partial X_1} = \bar{M}_1 \\ M = M_0 + X_1\bar{M}_1 \end{cases}$$



M_0



$\bar{M}_1$

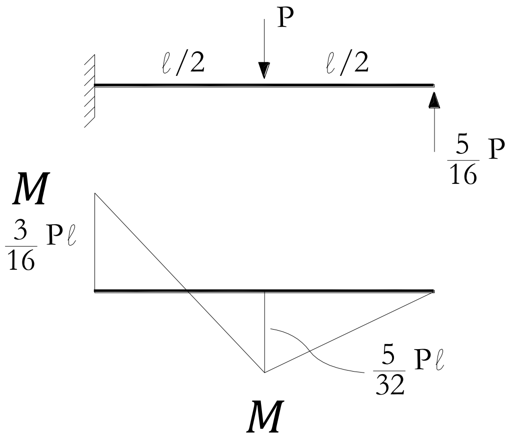
Teorema de Menabrea (3/3)

Daí,

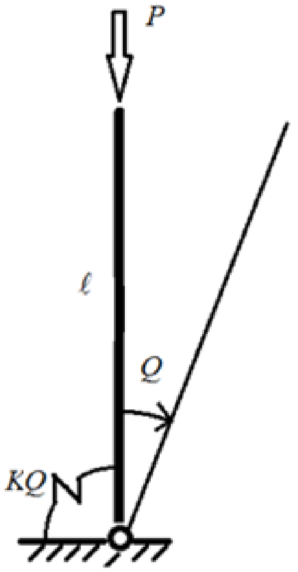
$$\frac{\partial U^*}{\partial X_1}(P, X_1) = \int_0^\ell \frac{M\bar{M}_1}{EI}dx = \int_0^\ell \frac{(M_0 + X_1\bar{M}_1)\bar{M}_1}{EI}dx = u_1 = 0$$

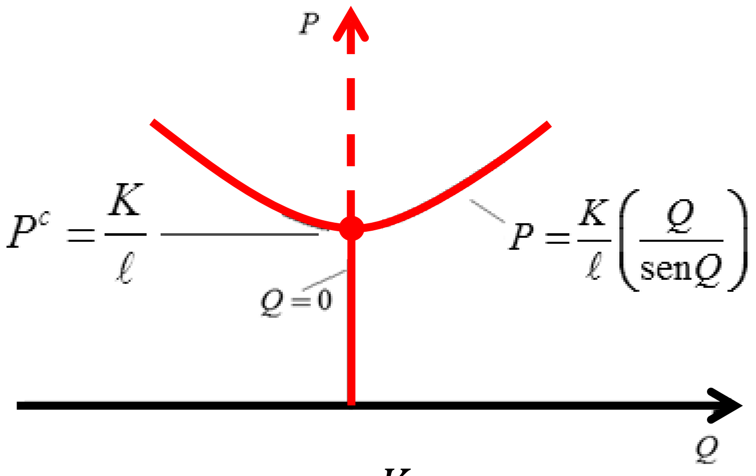
$$\int_0^\ell \frac{M_0\bar{M}_1}{EI}dx + X_1\int_0^\ell \frac{\bar{M}_1\bar{M}_1}{EI}dx = 0 \quad \rightarrow \quad X_1 = -\frac{\int_0^\ell \frac{M_0\bar{M}_1}{EI}dx}{\int_0^\ell \frac{\bar{M}_1\bar{M}_1}{EI}dx} = -\frac{5}{16}P$$

Assim:



Exercício 1 – Energia Potencial





$$P^c = \frac{K}{\ell}$$

Dados:

- $k = 1\, N.m/rad$
- $l = 1\, m$

- Energia Potencial:

$$\Pi = \frac{1}{2} K Q^2 - P\ell(1 - \cos Q)$$

Construa uma rotina que calcule a Energia Potencial (Π), para cada um dos casos abaixo, mostrando também o gráfico $\Pi(Q)xQ$:

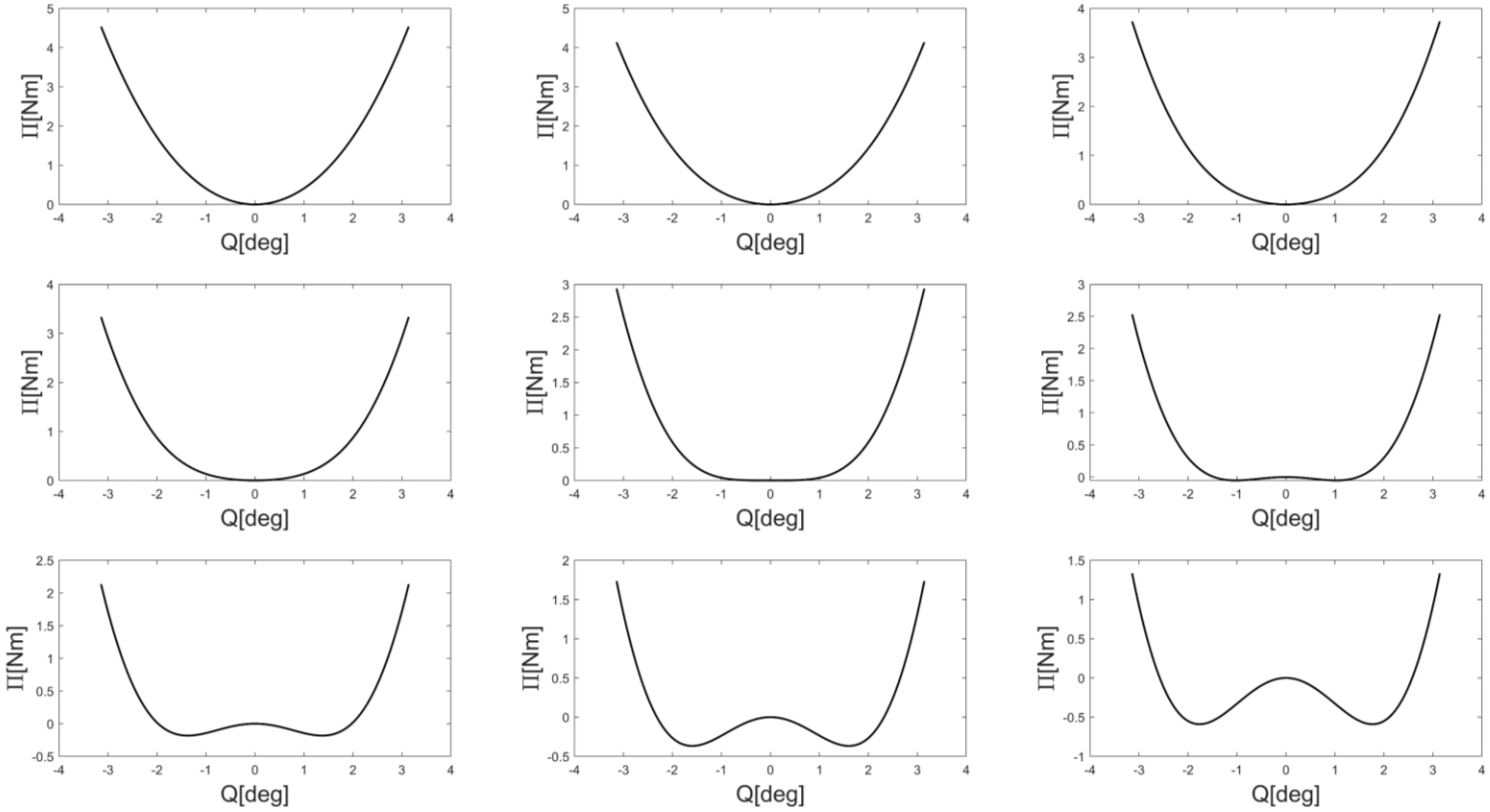
a) $P_a = 0.8 * P^c$

b) $P_b = P^c$

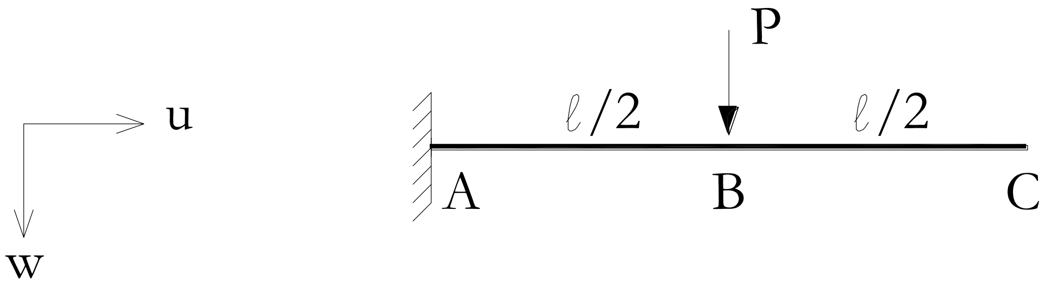
c) $P_c = 1.2 * P^c$

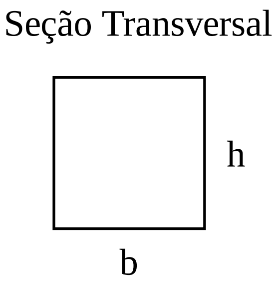
Exercício 1 – Energia Potencial - Desafio

Desafio: Gerar um script que é capaz de produzir uma única figura com 9 cenários de valores de carga P, com o menor número de linhas de Código.



Exercício 2 – Deslocamento em Estrutura Isostática





Dados:

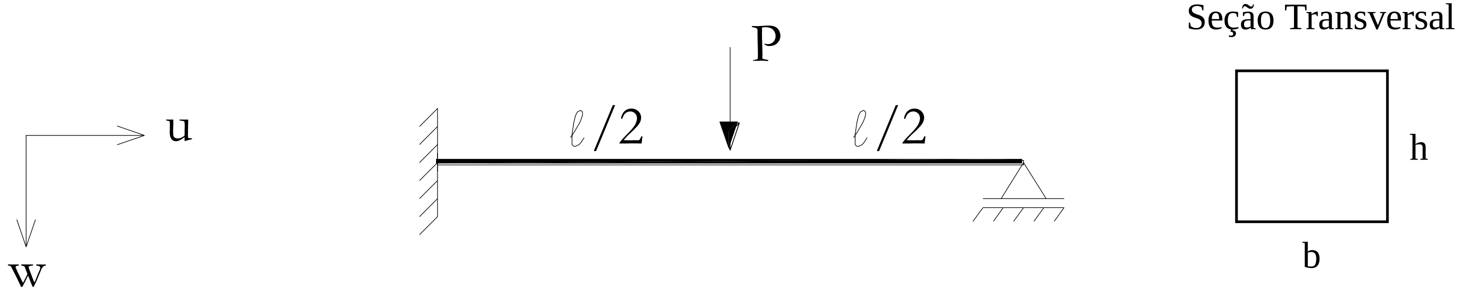
- $\ell = 1\,m$
- $b = h = 10\,mm$
- $E = 210\,GPa$
- $P = 1\,N$
- Resultado analítico:

$$v_c = +\frac{5}{48}\frac{P\ell^3}{EI}$$

a) Construa uma rotina que permita calcular, via Teorema de Castigliano, o deslocamento vertical no ponto C, calculando numericamente o valor das integrais

b) Compare o erro relativo entre os resultados numérico e analítico para diferentes refinamentos no eixo x (por ex. 100 elementos X 1000 elementos)

Exercício 3 – Deslocamento em Estrutura Hiperestática



Dados:

- $\ell = 1\,m$
- $b = h = 10\,mm$
- $E = 210\,GPa$
- $P = 1\,N$
- Resultado analítico:

$$v_c = -\frac{5}{16}P$$

a) Construa uma rotina que permita calcular, via Teorema de Menabrea, o valor da reação vertical no apoio simples, calculando numericamente o valor das integrais
b) Compare o erro relativo entre os resultados numérico e analítico para diferentes refinamentos no eixo x (por ex. 100 elementos X 1000 elementos)
c) Construa o diagrama de momentos fletores