

MAT-315 - Introdução à Análise (Real)

Segunda Lista de exercícios

Números racionais e irracionais

1. Mostre que a soma e o produto de dois números racionais é um número racional. O mesmo vale para irracionais? Prove o dê um contra-exemplo.
2. Prove que o produto de um número racional não nulo por um irracional é irracional. *Sugestão: Raciocine por absurdo*
3. Mostre que se a é irracional, então $\frac{1}{a}$ também será. *Sugestão: Raciocine por absurdo*
4. (a) Se $p > 0$ é um número primo, prove que \sqrt{p} é irracional.
(b) Se $p_1, \dots, p_n > 0$ são números primos distintos, prove que $\sqrt{p_1 \dots p_n}$ é irracional.
(c) Se $p_1, \dots, p_n > 0$ são números primos distintos, prove que $\sqrt{p_1^{m_1} \dots p_n^{m_n}}$ é irracional se, e somente se, algum dos expoentes m_1, \dots, m_n é ímpar.
(d) Verifique que um número natural N é um quadrado perfeito se, e somente se, sua decomposição em fatores primos possui apenas expoentes pares.
(e) Conclua o motivo deste longo exercício: Um número natural ou é um quadrado perfeito, ou sua raiz quadrada é irracional.

Conjuntos enumeráveis

5. Prove que o conjunto dos números ímpares é enumerável.
6. Construa uma bijeção entre o intervalo $[0, 1]$ e outro intervalo $[a, b]$ de \mathbb{R} (é fácil, uma função afim resolve o problema). Conclua que nenhum intervalo da reta é enumerável.
7. Mostre que a união de dois conjuntos enumeráveis é enumerável. *Sugestão: É mais ou menos o raciocínio que usamos para mostrar que \mathbb{Z} é enumerável. Tome um certo cuidado quando os conjuntos não são disjuntos.*
8. Usando o exercício anterior, mesmo que não o tenha feito, mostre que o conjunto \mathbb{I} dos números irracionais não é enumerável. *Sugestão: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$*
9. Prove que todo intervalo $]a, b[$ contém infinitos racionais. *Sugestão: Nós mostramos que contém um racional. Agora basta ir dividindo o intervalo*
10. Prove que todo intervalo $]a, b[$ contém infinitos irracionais. *Sugestão: Um argumento de cardinalidade resolve o problema*