Lista I - Eletromagnetismo (4300372) - 2º Sem - 2023
Professor: Karin S. F. Fornazier Guimarães

1 Demonstre as seguintes identidades vetoriais:

(a) $\vec{A} \times \vec{A} = 0$

(b) $\vec{A} \cdot \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = 0$

(c) $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

(d) $\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{B}\left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right)$

2 Demonstre as seguintes identidades do cáculo vetorial:

(a) $\nabla \times \left(\nabla \times \vec{F}\right) = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{F}\right) - \nabla^2 \vec{F}$

(b) $\nabla \cdot \left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \vec{G} - \left(\nabla \times \vec{G}\right) \cdot \vec{F}$

(c) $\nabla \times \left(\phi \vec{F}\right) = (\nabla\phi) \times \vec{F} + \phi \nabla \times \vec{F}$

3 Seja a função escalar

$$\psi(x,\, y,\, z) = 2x - 3y^2 + 4xyz$$

(a) Calcule a seguinte integral

$$\int\!\!\int\!\!\int \psi(x,\, y,\, z)\, dx\, dy\, dz,$$

com $0 < z < y$, $0 < y < x$ e $0 < x < r$.

(b) Encontre $\nabla\psi$.

(c) Calcule a integral de linha abaixo sobre um caminho em linha reta:

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,0,0)} \nabla\psi \cdot d\vec{l}$$

(d) $\nabla\psi$ é um campo conservativo?

4 Calcule o divergente e o rotacional para o campo vetorial $\vec{v} = r^n\, \hat{r}$. Interprete geometricamente o resultado do rotacional e verifique a consistência do seu divergente através do teorema da divergência. Com o resultado, obtenha o valor da integral:

$$J = \int_{\mathcal{V}} dV\, e^{-r} \left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2}\right),$$

onde $\mathcal{V}$ é a esfera de raio r_0 centrada na origem.

5 Uma placa plana infinita, de espessura $2d$, possui uma densidade volumétrica de carga uniforme ρ (Figura 1). Encontre o campo elétrico, como função de y, onde $y = 0$ no centro. Esboce um gŕafico de E por y, assuma E positivo quando ele estiver a direção $+y$ e negativo quando estiver na direção de $-y$.

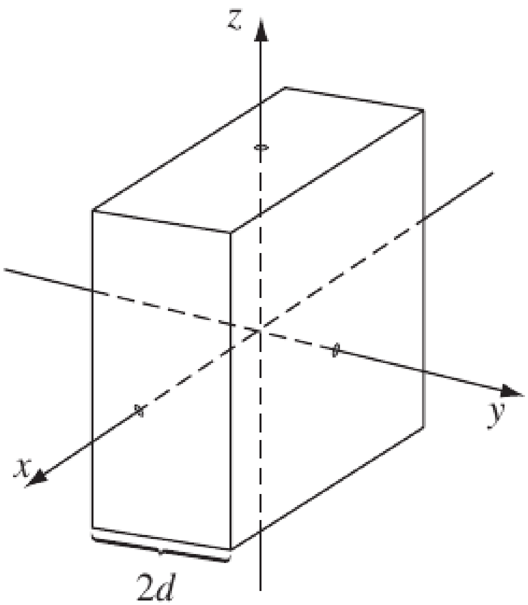

Figura 1:

6 Um cabo coaxial longo (Figura 2) possui uma densidade de carga uniforme ρ no cilindro interno (raio a), e uma densidade de carga superficial uniforme na casca cilindrica externa (raio b). Essa carga superficial é negativa e tem a maginetude correta para que todo o cabo seja neutro. Determine o campo elétrico nas três regiões: I) Dentro do cilindro interno ($r < a$). II) Entre os cilindros ($a < r < b$). III) Fora do cabo ($r > b$). Esboce um gráfico do módulo do campo elétrico em função de r.

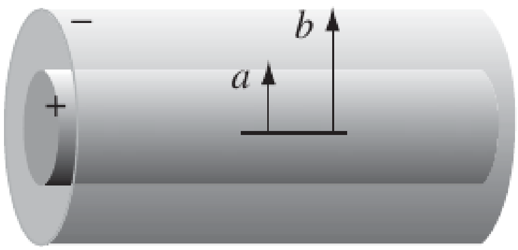

Figura 2:

7 O modelo de Thomson, conhecido como "pudim de ameixas", supunha que o átomo era formado por uma carga positiva distribuída uniformemente num volume esférico de raio R e que nessa "massa"os elétrons estariam incrustados. Considere o modelo de Thomson para o hidrogênio responda;

(a) Qual é o campo elétrico a um distância r quando $r > R$?

(b) Qual o campo elétrico dentro do átomo, a uma distância r do centro?

8 No contexto do artigo "Sobre o surgimento das equações de Maxwell"de Lima C. Marcelo. A energia contida em um vórtice individual de volume V_{cel} é

$$U^m_{\text{cel}} = \frac{\mu}{8\pi}\,\vec{H}^2\,V_{\text{cel}}. \tag{1}$$

Em que passando ao limite do contínuo

$$U_m = \int_V u_m dV,$$

onde u_m é a densidade volumétrica de energia cinética, dada por

$$u_m = \frac{\mu}{8\pi}\,\vec{H}^2. \tag{2}$$

(a) Calcule $\dfrac{\partial u_m}{\partial t}$.

(b) Definindo a perda de energia total de uma célula completa como sendo

$$P^E_{\text{cel}} = -\frac{N}{2}\left(\oint_{\text{cel}} \vec{n}\times\vec{E}\,\delta S\right)\cdot\vec{H}, \tag{3}$$

onde $N = \dfrac{1}{2\pi}$, $\vec{E}$ é a "força eletromotriz"e δS é um elemento de área. Aplique o teorema de Stokes na integral (3). Note que o $\vec{E}$ independe do volume V_{cel} da célula.

(c) Nota-se que P^E_{cel} é uma potência, por tanto

$$P^E_{\text{cel}} = \frac{\partial u_m}{\partial t}\,V_{\text{cel}}. \tag{4}$$

Utilizando os itens anteriores e que $\vec{B} = \mu\,\vec{H}$, obtenha a Lei de Faraday à la Maxwell.

(d) Agora considere o fluxo magnético $\Phi_B(t)$, que atravessa uma superfície arbitrária S e contorno C, onde S varia no tempo(Figura 3.O fluxo magnético inicial é dado por

$$\Phi_B(t) = \int_{S(t)} \vec{B}\cdot\hat{n}dS. \tag{5}$$

Obtenha a Lei de Faraday na forma integral e em seguida usando o teorema de Stokes, obtenha a Lei de Faraday na forma diferencial.

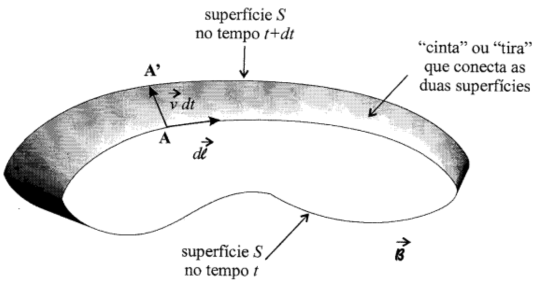

Figura 3:

9 Um solenoide longo de raio R e n espiras por unidade de comprimento é percorrido por uma corrente I que varia no tempo com uma taxa $\dfrac{dI}{dt}$.

(a) Determine a *fem* $\mathcal{E}$ induzida num circuito circular de raio ρ concentrico com o solenoide, conforme a Figura 4. A corrente propaga-se pelo solenoide, girando no sentido horário.

(b) Determine o campo elétrico induzido no circuito.

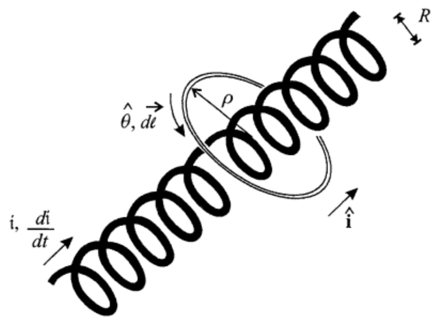

Figura 4:

10 Um toroide é a forma geométrica obtida quando as extremidades de um cilindro são entortadas até que elas se toquem, formando a Figura 5. Considerando um solenoide de tamanho L, se o torcermos até que seus extremos coicidam, formaremos um toroide magnético. Usanddo a lei de Ampère, calcule o campo magnético gerado pelo toroide.

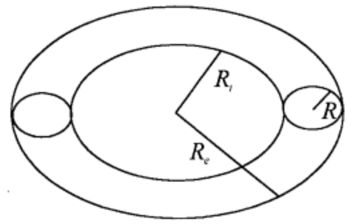

Figura 5:

11 Considere um capacitor plano paralelo formado por placas circulares de raio R separados por uma distância L, como na Figura 6. A placa direita do capacitor transporta é a placa positiva, e ele está sendo carregado por cargas transportadas por uma corre I. Considere que durante o carregamento a carga se distribua uniformemente sobre a superfície das placas do capacitor.

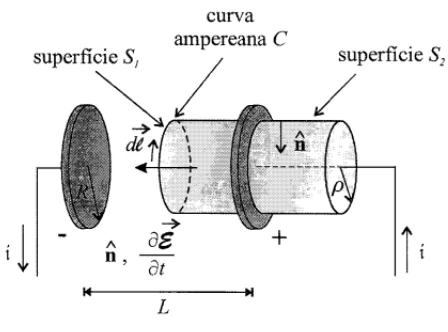

Figura 6:

(a) Considerando a superfície circular plana S_1 de contorno C e raio ρ, ache a corrente de deslocamento através dessa superfície e o campo magnético $\vec{B}$ na curva amperana.

(b) Refaça os cálculos anteriores, só que agora utilize a superfície cilíndrica S_2, que se estende para fora do capacitor e que é limitada pela curva ampereana C.

12 Considere o campo magnético $\vec{B}$ obtido pela lei de Biot-Savart

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \, dV. \tag{6}$$

Mostre que a Lei de Gauss magnética é satisfeita, ou seja $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. Interprete esse resultado e compare com a dedução presente no artigo "Gauss's Law for Magnetism & Law of Universal Magnetism: Calculate the Charge of a Monopole"de Poole G.