MAT0121 - Cálculo Diferencial e Integral II - 2023
Lista 2

1. Curvas Planas

1. Dado $t \geq 0$, denote por $A(t)$ a área da região sombreada na Figura 1.

a) Mostre que $A(t) = \dfrac{\cosh(t)\sinh(t)}{2} - \displaystyle\int_1^{\cosh(t)} \sqrt{x^2-1}\,dx$ para todo $t \geq 0$.

b) Usando o Segundo Teorema Fundamental do Cálculo, mostre que A é contínua em $[0,+\infty)$, derivável em $(0,+\infty)$ e $A'(t) = \dfrac{1}{2}$ para todo $t > 0$. Conclua que $A(t) = \dfrac{t}{2}$ para todo $t \geq 0$. Interprete geometricamente.

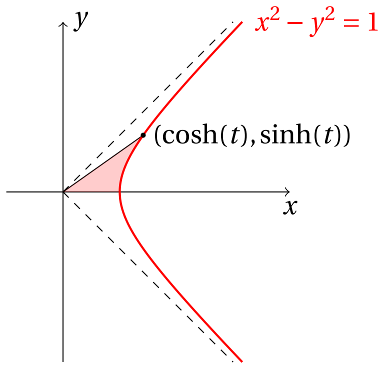


Figura 1: Exercício 1

2. Esboce as imagens das seguintes curvas, indicando o sentido de percurso.

a) $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos^2 t, \sin t)$

b) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\sin t, \sin^2 t)$

c) $\gamma : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (2+\cos t, 3+4\sin t)$

d) $\gamma : [0,+\infty) \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$

e) $\gamma : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\sec t, \tan t)$

f) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t, 2\sin t)$

g) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\sin t, \cos^2 t + 2)$

h) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (2+e^{-t}, 3-e^t)$

3. Esboce e encontre uma parametrização de cada conjunto abaixo.

a) $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4,\ y \geq -x \text{ e } y \geq x\right\}$

b) $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1,\ x < 0 \text{ e } y > -10\right\}$

c) $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1 \text{ e } y < 0\right\}$

d) C é o segmento de reta que liga os pontos $(2,3)$ e $(-5,7)$

4. Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (\cos t, \sin t \cos t)$. Mostre que γ admite duas retas tangentes distintas em $(0,0)$ e determine suas equações. Faça um esboço da imagem de γ.

5. **(MAT2454 - P1 2020)** Considere a curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = \left(t^2\cos(\pi t), t^2\sin(\pi t)\right)$. Encontre as equações das retas tangentes à trajetória de γ no ponto $(4,0)$.

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$.

a) Determine uma curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *derivável* cuja imagem é o gráfico de f.

b) Usando a curva obtida no item anterior, mostre que se t_0 é tal que $\gamma(t_0) = (0,0)$, então $\gamma'(t_0) = (0,0)$. Interprete geometricamente.

7. Sejam I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva derivável. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

a) Existe $C \geq 0$ tal que $\|\gamma(t)\| = C$ para todo $t \in I$.

b) $\gamma(t)$ é ortogonal a $\gamma'(t)$ para todo $t \in I$.

Interprete geometricamente.

8. Um barbante é enrolado ao redor de um círculo e então desenrolado, sendo mantido esticado. A curva traçada pelo ponto P no final do barbante é chamada de *involuta* do círculo. Se o círculo tem raio r e centro $O = (0,0)$, a posição inicial de P é $(r,0)$, e se o parâmetro θ é escolhido como na Figura 2, mostre que as equações paramétricas da involuta são:

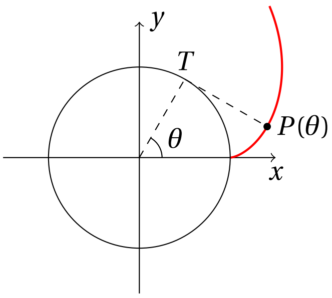
$$x = r(\cos\theta + \theta\sin\theta) \quad \text{e} \quad y = r(\sin\theta - \theta\cos\theta).$$

Veja esta parametrização da involuta aqui.

9. Uma circunferência de raio r rola sem escorregar ao longo do eixo Ox. A curva descrita por um ponto $P(\theta)$ da circunferência que se encontra inicialmente na origem é chamada de *cicloide* (veja a Figura 2). Mostre que as equações paramétricas do cicloide são:

$$x = r(\theta - \sin\theta) \quad \text{e} \quad y = r(1 - \cos\theta).$$

Veja esta parametrização do cicloide aqui.



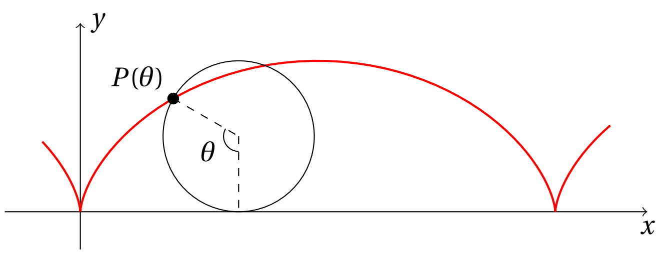


Figura 2: Exercícios 8 e 9

10. Decida se cada afirmação abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta.

a) A imagem da curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (\cos(2t), \sin^2(t))$ está contida em uma reta.

b) A imagem da curva $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\beta(t) = (e^{2t}, e^t)$ é uma parábola.

c) A imagem da curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (e^t + e^{-t}, e^t - e^{-t})$ está contida em uma hipérbole.

d) A imagem da curva $\delta : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^2$, $\delta(t) = (\cos t, \sec t)$ é uma hipérbole.

e) A imagem da curva $\epsilon : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^2$, $\epsilon(t) = (\sec^2 t, \tan t)$ é uma parábola.

f) A imagem da curva $\zeta : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\zeta(t) = (\cos^2 t - \sin^2 t, 4\sin t\cos t)$ é uma elipse.

11. **(MAT2454 - 2020)** Sejam I e J dois intervalos abertos e $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, $\beta : J \to \mathbb{R}^2$ duas curvas deriváveis. Dizemos que α e β *se tangenciam* em um ponto P se existem $t_0 \in I$ e $s_0 \in J$ tais que $\alpha(t_0) = \beta(s_0) = P$ e $\alpha'(t_0), \beta'(s_0)$ são vetores paralelos não nulos.

Considere as curvas $\sigma, \eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dadas por

$$\sigma(t) = \left(-\sqrt{2}\cos t + \sin t + 1, \sqrt{2}\cos t + \sin t\right) \quad \text{e} \quad \eta(s) = (s^2 - s, s^2 + s - 1).$$

a) Determine a intersecção das imagens de σ e de η.

b) Determine o ponto em que σ e η se tangenciam e escreva a equação da reta tangente às imagens de σ e η neste ponto.