

MAT-315 - Introdução à Análise (Real)

Primeira lista de exercícios

Supremo, ínfimo e propriedade arquimediana

1. Para cada $\varepsilon > 0$ encontre $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$, como na propriedade arquimediana.
(a) $\varepsilon = 0,2$ (b) $\varepsilon = 0,01$ (c) $\varepsilon = 0,00315$ (d) $\varepsilon = 1/m$ onde m é um natural fixado

Verifique que o n de cada item pode não servir para o outro. Existe um n que sirva para todos os $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$? Verifique se n serve para um item então qualquer $m > n$ também servirá

2. Para cada $x > 0$ encontre $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$, como na propriedade arquimediana.
(a) $x = 1$ (b) $x = \pi$ (c) $x = 100000,256$

Verifique que o n de cada item pode não servir para o outro. Existe um n que sirva para todos os $x \in \mathbb{R}$? Verifique se n serve para um item então qualquer $m > n$ também servirá.

3. Mostre que se m é o máximo de um conjunto A , então m é o supremo de A .

4. Encontre o supremo dos conjuntos abaixo. Justifique formalmente usando as propriedades S1 e S2 ou o exercício anterior.

(a) $I = [0, 2]$ (b) $I = [0, 2[$ (c) $A = \{-1/n : n \in \mathbb{N}\}$

5. Encontre o Sup e o inf (caso existam) dos conjuntos abaixo:

(a) $A = \{1\}$ (b) $A = \{1, 2\}$ (c) $A = \mathbb{N}$ (d) $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$

6. Encontre inf dos conjuntos abaixo. Justifique detalhadamente usando a propriedade arquimediana de $\mathbb{R}$ e as propriedades i1 e i2.

(a) $A = \{2/n : n \in \mathbb{N}\}$; (b) $A = \{5/n : n \in \mathbb{N}\}$; (c) $A = \{k/n : n \in \mathbb{N}\}$, sendo k uma constante positiva.

7. Determine a intersecção de todos os intervalos encaixados descritos em cada item:

- (a) $I_1 = [0, 1]$ e $I_2 = [0, 1/2]$
(b) $I_1 = [0, 1]$, $I_2 = [0, 1/2]$ e $I_3 = [0, 1/3]$
(c) $I_1 = [0, 1]$, $I_2 = [0, 1/2]$, ..., $I_{28} = [0, 1/28]$
(d) $I_1 = [0, 1]$, $I_2 = [0, 1/2]$, ..., $I_n = [0, 1/n]$
(e) $I_n = [0, 1/n]$ com $n \in \mathbb{N}$
(f) $I_n = [-1 - 1/n, 1 + 1/n]$ com $n \in \mathbb{N}$