“Teoria da Medida”

– 2o. Semestre, 2022 –

Notas de Aula para a disciplina de “Física Matemática III”
P*rof. Walter de Siqueira Pedra*

24 de Novembro de 2022

Conteúdo

1 Elementos de Teoria da Medida

1.1 Nota histórica – o problema da medida

Chamaremos de "movimento" em $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, a toda operação bijetora $\beta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ que preserva a distância euclidiana

$$\mathrm{dist}(x, y) \doteq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_d - y_d)^2}$$

entre pontos. Ou seja, $\beta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ é um movimento se, para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathrm{dist}(\beta(x), \beta(y)) = \mathrm{dist}(x, y) \ .$$

Por exemplo, translações e rotações em $\mathbb{R}^d$ são movimentos. Estendemos a noção de movimento de pontos $\mathbb{R}^d$ para a movimento de subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ da seguinte maneira: Para todo movimento $\beta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ e todo $E \in 2^{\mathbb{R}^d}$ (isto é, todo subconjunto $E \subseteq \mathbb{R}^d$),

$$\beta(E) \doteq \{\beta(x) \ : \ x \in E\} \ .$$

Com estas definições, o "problema do conteúdo", segundo Felix Hausdorff, é descrito da seguinte maneira: Busca-se uma função $\mathfrak{m} : 2^{\mathbb{R}^d} \to [0, \infty] \doteq [0, \infty) \cup \{\infty\}$ com as seguintes propriedades:

(i.) *Aditividade*: Para todo $E, E' \in 2^{\mathbb{R}^d}$ com $E \cap E' = \emptyset$, tem-se

$$\mathfrak{m}(E \cup E') = \mathfrak{m}(E) + \mathfrak{m}(E') \ .$$

(ii.) *Invariância ao movimento*: Para todo $E \in 2^{\mathbb{R}^d}$ e todo movimento $\beta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$,

$$\mathfrak{m}(\beta(E)) = \mathfrak{m}(E) \ .$$

(iii.) *Normalização*:

$$\mathfrak{m}([0, 1]^d) = 1 \ .$$

O problema formulado acima, apesar de sua aparência inofensiva, não possui solução satisfatória:

Teorema 1 (Hausdorff, 1914) *O problema do conteúdo não possui solução para $d \geq 3$.*

Teorema 2 (Banach, 1924) *O problema do conteúdo possui solução para $d = 1, 2$, porém esta não é única.*

A razão pela qual o problema do conteúdo formulado acima não tem solução em dimensão superior a 2, é o fato de que o seguinte princípio intuitivo *não* é válido na teoria habitual de conjuntos (Zermelo-Fränkel com Axioma da Escolha (ZFC)):

"Dividindo-se um corpo em finitas partes, não se pode combiná-las, após movimentos das mesmas, de modo a que o volume ocupado seja superior ao volume inicial."

Este princípio, formulado por Galileu no século XVI, é violado em ZFC, segundo o célebre "paradoxo de Banach-Tarski":

Teorema 3 (Banach-Tarski, 1924) *Seja $d \geq 3$ e sejam $E, E' \in 2^{\mathbb{R}^d}$ subconjuntos limitados com interior não vazio (isto é, que contenham algum subconjunto aberto não vazio). Então existem finitos subconjuntos* disjuntos $E_1, \ldots, E_n \in 2^{\mathbb{R}^d}$ *e movimentos $\beta_1, \ldots, \beta_n$ em $\mathbb{R}^d$ tais que*

$$E_1 \cup \cdots \cup E_n = E \quad e \quad \beta_1(E_1) \cup \cdots \cup \beta_n(E_n) = E' .$$

Por exemplo, o teorema acima afirma que, em dimensão $d \geq 3$, podemos construir dois cubos de lado 1, partindo de um único cubo, também de lado 1, dividindo o último em finitas partes e recombinando-as, após movimentos. Tal fato impossibilita a existência da função $\mathfrak{m}$ do problema do conteúdo de Hausdorff, em dimensão superior a 2.

Uma questão semelhante ao problema do conteúdo de Hausdorff é o "problema da medida". Este consiste em substituir a condição de aditividade do primeiro problema pela condição, mais forte, de "σ-aditividade", isto é, a condição (i.) acima é substituída por:

(i'.) *σ-Aditividade*: Para qualquer sequência $E_n \in 2^{\mathbb{R}^d}$, $n \in \mathbb{N}$, de subconjuntos disjuntos (isto é, $E_{n_1} \cap E_{n_2} = \emptyset$ se $n_1 \neq n_2$), tem-se

$$\mathfrak{m}(\cup_{n \in \mathbb{N}} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(E_n) .$$

Obviamente, como a condição de σ-aditividade é mais forte do que a de aditividade, o problema da medida não tem solução em dimensão superior a 2. Como o problema do conteúdo tem solução não única para $d = 1, 2$, poder-se-ia esperar que, neste caso, o problema da medida tenha solução única, por tratarem-se neste último condições mais restritivas. Porém:

Teorema 4 (Vitali, 1905) *Para toda dimensão, o problema da medida não tem solução.*

Daremos uma prova completa[1] deste teorema em momento adequado.

O teorema de Banach-Tarski é uma consequência do "Axioma da Escolha" da teoria de conjuntos, o qual afirma que para todo conjunto Ω e toda família de subconjuntos $\mathcal{E} \subseteq 2^{\Omega}$ existe, no mínimo, uma "função de escolha". Tal função é, por definição, uma função $f : \mathcal{E} \to \Omega$ tal que, para todo $E \in \mathcal{E}$, $f(E) \in E$. Existem teorias de conjuntos alternativas, sem o Axioma da Escolha, nas quais o problema da medida tem solução. Porém, muitos resultados importantes a várias áreas da matemática, e às ciências que dela se servem, dependem deste axioma. Deste modo, se quisermos desenvolver uma teoria de medida compatível com o restante da matemática clássica, somos obrigados a aceitar a existência de subconjuntos "não mensuráveis". Isto corresponde ao fato de somente sermos capazes

[1] Ver Teorema 169.

definir medidas para famílias $\mathcal{E} \subseteq 2^\Omega$ estritamente menores que 2^Ω (mas que contenham, ao menos, alguns dos subconjuntos que se gostaria poder medir). Observe-se também que, em certas situações, podemos considerar medidas sobre as quais não são impostas condições como a invariância por movimento ou normalização. Neste caso, o problema da medida correspondente poderá eventualmente ter solução mesmo em $\mathcal{E} = 2^\Omega$.

Probabilidades (no sentido de Kolmogorov) são casos especiais de medidas. Como no exemplo acima, a restrição a famílias de de subconjuntos ditos mensuráveis é, em geral, também necessária, por razões análogas. Entretanto, como discutiremos mais adiante, em Teoria de Probabilidades, o uso de famílias de conjuntos "pequenas" é natural e representa o fato de ter-se informação limitada sobre eventos probabilísticos.

No que segue, definiremos certas estruturas naturais para famílias de subconjuntos mensuráveis. Antes de iniciar esta discussão, introduziremos notações e recordaremos alguns fatos elementares sobre conjuntos:

1.2 Notações e algumas construções elementares com conjuntos

Definição 5 (conjunto potência) *Para todo conjunto M, definimos seu "conjunto potência", por:*

$$2^M \doteq \{E \subseteq M\} ,$$

isto é, 2^M é o conjunto de todos os subconjuntos (ou partes) de M.

Definição 6 (operações elementares com conjuntos) *Seja M um conjunto fixo arbitrário.*

i.) Para todo $E \in 2^M$, definimos seu "complemento" por

$$E^c \doteq \{p \in M \ : \ p \notin E\} \in 2^M .$$

ii.) Para todo $E, E' \in 2^M$, definimos a "interseção"

$$E \cap E' \doteq \{p \in M \ : \ p \in E \textit{ e } p \in E'\} \in 2^M .$$

De modo mais geral, para toda família $\mathcal{E} \subseteq 2^M$, definimos

$$\cap\mathcal{E} \doteq \{p \in M \ : \ p \in E \textit{ para todo } E \in \mathcal{E}\} \in 2^M .$$

Se $\mathcal{E}$ é vazia, adota-se a convenção $\cap\mathcal{E} \doteq M$. Note-se que $\cap\mathcal{E}$ é o maior subconjunto $\tilde{E}$ de M para o qual $\tilde{E} \subseteq E$ para todo $E \in \mathcal{E}$. Também utilizaremos a notação

$$\inf \mathcal{E} \doteq \cap\mathcal{E} .$$

iii.) Para todo $E, E' \in 2^M$, definimos a "diferença"

$$\begin{aligned} E \backslash E' &\doteq \{p \in M \ : p \in E \textit{ mas } p \notin E'\} \\ &= E \cap E'^c \in 2^M. \end{aligned}$$

iv.) Para todo $E, E' \in 2^M$, definimos a "união"

$$E \cup E' \doteq \{p \in M \ : \ p \in E \textit{ ou } p \in E'\} \in 2^M .$$

De modo mais geral, para toda família $\mathcal{E} \subseteq 2^M$, definimos

$$\cup\mathcal{E} \doteq \{p \in M \ : \ p \in E \textit{ para um } E \in \mathcal{E}\} \in 2^M .$$

Se $\mathcal{E}$ é vazia, adota-se a convenção $\cup\mathcal{E} \doteq \emptyset$. Note-se que $\cup\mathcal{E}$ é o menor subconjunto $\tilde{E}$ de M para o qual $E \subseteq \tilde{E}$ para todo $E \in \mathcal{E}$. Também utilizaremos a notação

$$\sup \mathcal{E} \doteq \cup\mathcal{E} .$$

v.) Para todo $E, E' \in 2^M$, definimos a "diferença simétrica"

$$\begin{aligned} E\Delta E' &\doteq (E \cup E')\backslash(E \cap E') \\ &= (E\backslash E') \cup (E'\backslash E) \in 2^M \ . \end{aligned}$$

De modo mais geral, para toda família $\mathcal{E} \subseteq 2^M$ finita e não vazia, definimos

$$\Delta\mathcal{E} \doteq \{p \in M \ : \ p \in E \text{ para um número impar de elementos } E \in \mathcal{E}\} \in 2^M \ .$$

Note-se que a diferença simétrica de subconjuntos é uma operação comutativa em 2^M:

$$E\Delta E' = E'\Delta E \ , \quad E, E' \in 2^M \ .$$

Para esta operação também vale a associatividade:

$$(E\Delta E')\Delta E'' = E\Delta(E'\Delta E'') = \Delta\{E, E', E''\} \ , \quad E, E', E'' \in 2^M \ .$$

As seguintes relações entre união, interseção e complemento de subconjuntos são válidas: Para toda família $\mathcal{E} \subseteq 2^M$,

$$(\cup\mathcal{E})^c = \cap\mathcal{E}^c \quad \text{e} \quad (\cap\mathcal{E})^c = \cup\mathcal{E}^c \ ,$$

onde

$$\mathcal{E}^c \doteq \{E^c \ : \ E \in \mathcal{E}\} \ .$$

Estas duas igualdades são conhecidas como "leis de de Morgan". Ademais, para todo $E' \in 2^M$ valem as seguintes "leis distributivas":

$$\begin{aligned} E' \cap (\cap\mathcal{E}) &= \cap\{E' \cap E \ : \ E \in \mathcal{E}\} \ , \\ E' \cup (\cup\mathcal{E}) &= \cup\{E' \cup E \ : \ E \in \mathcal{E}\} \ , \\ E' \cup (\cap\mathcal{E}) &= \cap\{E' \cup E \ : \ E \in \mathcal{E}\} \ , \\ E' \cap (\cup\mathcal{E}) &= \cup\{E' \cap E \ : \ E \in \mathcal{E}\} \ . \end{aligned}$$

Definição 7 (pré-imagem) *Sejam M_1 e M_2 conjuntos e f uma função $M_1 \to M_2$. Definimos a função "pré-imagem", $f^{-1} : 2^{M_2} \to 2^{M_1}$, por:*

$$f^{-1}(E_2) \doteq \{p_1 \in M_1 \ : \ f(p_1) \in E_2\} \in 2^{M_1} \ , \quad E_2 \in 2^{M_2}.$$

É fácil verificar que a função pré-imagem comuta com as operações de complemento, união e interseção de subconjuntos (e, portanto, com todas as operações definidas acima sobre subconjuntos), isto é, para todo $E_2 \in 2^{M_2}$ e toda família $\mathcal{E}_2 \subseteq 2^{M_2}$, tem-se

$$\begin{aligned} f^{-1}(E_2^c) &= f^{-1}(E_2)^c, \\ f^{-1}(\cup\mathcal{E}_2) &= \cup f^{-1}(\mathcal{E}_2) \ , \\ f^{-1}(\cap\mathcal{E}_2) &= \cap f^{-1}(\mathcal{E}_2) \ , \end{aligned}$$

onde

$$f^{-1}(\mathcal{E}_2) \doteq \{f^{-1}(E_2) \ : \ E_2 \in \mathcal{E}_2\} \subseteq 2^{M_1}.$$

A seguir introduziremos a noção de "limite" de uma sequência de subconjuntos:

Definição 8 (limite superior e inferior de uma seq. de conjuntos) *Seja $E_n \in 2^M$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência qualquer de subconjuntos de um conjunto M fixo.*

i.) O "limite superior" desta sequência é o subconjunto

$$\limsup_{n\to\infty} E_n \doteq \{p \in M \ : \ p \in E_n \textit{ para infinitos } n \in \mathbb{N}\} \in 2^M \ .$$

ii.) O "limite inferior" desta sequência é o subconjunto

$$\liminf_{n\to\infty} E_n \doteq \{p \in M \ : \ \textit{existe } n_p \in \mathbb{N} \textit{ tal, que } p \in E_n \textit{ para todo } n \geq n_p\} \in 2^M \ .$$

Se

$$\limsup_{n\to\infty} E_n = \liminf_{n\to\infty} E_n$$

dizemos que a sequência de subconjuntos de M é "convergente". Neste caso, o limite da sequência é:

$$\lim_{n\to\infty} E_n \doteq \limsup_{n\to\infty} E_n = \liminf_{n\to\infty} E_n \in 2^M \ .$$

Exercício 9 *Seja $E_n \in 2^M$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência arbitrária de subconjuntos de M. Mostre que as seguintes relações são válidas:*

i.)

$$\liminf_{n\to\infty} E_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} E_n.$$

ii.)

$$\limsup_{n\to\infty} E_n = \cap\{\cup\{E_k \ : \ k \geq n\} \ : \ n \in \mathbb{N}\} \ .$$

iii.)

$$\liminf_{n\to\infty} E_n = \cup\{\cap\{E_k \ : \ k \geq n\} \ : \ n \in \mathbb{N}\} \ .$$

iv.)

$$\left[\limsup_{n\to\infty} E_n\right]^c = \liminf_{n\to\infty} E_n^c \quad \textit{e} \quad \left[\liminf_{n\to\infty} E_n\right]^c = \limsup_{n\to\infty} E_n^c \ .$$

v.)

$$\limsup_{n\to\infty} E_n \backslash \liminf_{n\to\infty} E_n = \limsup_{n\to\infty} (E_n \Delta E_{n+1}) \ .$$

Definição 10 (inf e sup em 2^M) *Seja $E_i \in 2^M$, $i \in I$, uma família qualquer (não necessariamente enumerável) de subconjuntos de um conjunto M fixo.*

i.) $\inf_{i\in I} E_i \in 2^M$ *é, por definição, o maior subconjunto de M contido em todo E_i, $i \in I$. Isto é,*

$$\inf_{i\in I} E_i = \cap\{E_i \ : \ i \in I\} \in 2^M \ .$$

ii.) $\sup_{i\in I} E_i \in 2^M$ *é, por definição, o menor subconjunto de M que contém todo E_i, $i \in I$. Isto é,*

$$\sup_{i\in I} E_i = \cup\{E_i \ : \ i \in I\} \in 2^M \ .$$

Com estas duas definições, pelos itens ii.) e iii.) do exercício precedente:

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} E_n &= \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} E_k \ , \\ \liminf_{n\to\infty} E_n &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} E_k \ . \end{aligned}$$

Definição 11 (sequências monótonas) *Dizemos que a sequência $E_n \in 2^M$, $n \in \mathbb{N}$, é "monótona crescente" se vale $E_n \subseteq E_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De modo análogo, a sequência é dita ser "monótona decrescente" se $E_{n+1} \subseteq E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Lema 12 *Sequências monótonas em 2^M são sempre convergentes. Se $E_n \in 2^M$, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência crescente então vale $\lim_{n\to\infty} E_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Se a sequência é decrescente então $\lim_{n\to\infty} E_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} E_n$.*

Demonstração: Seja $E_n \in 2^M$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência decrescente. Então

$$\liminf_{n\to\infty} E_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} E_k = \inf_{n\in\mathbb{N}} E_n \ ,$$

pois

$$\inf_{k\geq n} E_k = \inf_{k\in\mathbb{N}} E_k$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como a sequência é decrescente, temos também

$$E_n = \sup_{k\geq n} E_k$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Sendo assim, tem-se

$$\liminf_{n\to\infty} E_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} E_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} E_k = \limsup_{n\to\infty} E_n \ .$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} E_n \ .$$

Se E_n, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência crescente, mostra-se de modo análogo que

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} E_n \ .$$

■

Observe-se que, para toda sequência dada $E_n \in 2^M$, $n \in \mathbb{N}$, as novas sequências $\inf_{k\geq n} E_k$ e $\sup_{k\geq n} E_k$, $n \in \mathbb{N}$, são monótonas e, respectivamente, crescente e decrescente. Em particular, pela discussão acima, tem-se:

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} E_n &= \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} E_k \ , \\ \limsup_{n\to\infty} E_n &= \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} E_k \ . \end{aligned}$$

Definição 13 (função característica de um subconjunto) *Seja M um conjunto qualquer. Para todo subconjunto $E \in 2^M$, definimos sua "função característica", $\chi_E : M \to \{0, 1\}$, por:*

$$\chi_E(p) \doteq \begin{cases} 1 & se \quad p \in E \\ 0 & se \quad p \notin E \end{cases} \ .$$

Usando funções características, podemos representar os limites superior e inferior para séries de subconjuntos em termos deste limites para séries numéricas:

Exercício 14 *Seja E_n, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de subconjuntos de um conjunto M. Mostre que, para todo $p \in M$,*

$$\begin{aligned} \chi_{\limsup_{n\to\infty} E_n}(p) &= \limsup_{n\to\infty} \chi_{E_n}(p) \, , \\ \chi_{\liminf_{n\to\infty} E_n}(p) &= \liminf_{n\to\infty} \chi_{E_n}(p) \, . \end{aligned}$$

Mostre ainda que, se a sequência de subconjuntos converge, no sentido discutido acima, então, para todo $p \in M$, tem-se

$$\chi_{\lim_{n\to\infty} E_n}(p) = \lim_{n\to\infty} \chi_{E_n}(p) \, .$$

Recorde-se que, para uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitada qualquer de números reias,

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} a_n &\doteq \lim_{n\to\infty} \left(\sup\{a_k \ : \ k \geq n\}\right) \in \mathbb{R} \, , \\ \liminf_{n\to\infty} a_n &\doteq \lim_{n\to\infty} \left(\inf\{a_k \ : \ k \geq n\}\right) \in \mathbb{R} \, . \end{aligned}$$

1.3 Anéis e álgebras de conjuntos

Definição 15 (grupo Abeliano) *Dizemos que o par $(G, +)$ é um "grupo Abeliano" se G é um conjunto e $+ : G \times G \to G$ uma operação binária em G com as seguintes propriedades:*

i.) Comutatividade: *Para todo $g, g' \in G$, $g + g' = g' + g$.*

ii.) Associatividade: *Para todo $g, g', g'' \in G$, $(g + g') + g'' = g + (g' + g'') \doteq g + g' + g''$.*

iii.) Existência de elemento neutro: *Existe um elemento $0 \in G$ tal, que, para todo $g \in G$, $0 + g = g$.*

iv.) Existência de elementos inversos: *Para todo $g \in G$, existe um elemento $-g \in G$ tal, que $g + (-g) = 0$.*

O elemento neutro $0 \in G$ é necessariamente único: Suponha que $\tilde{0} \in G$ seja um segundo elemento neutro. Então:

$$0 = 0 + \tilde{0} = \tilde{0} \, .$$

De modo análogo provamos a unicidade do elemento inverso: Sejam $-g, -g' \in G$ elementos inversos de $g \in G$. Então:

$$-g + g = 0 = -g' + g \, .$$

Logo,

$$-g + g + (-g) = -g' + g + (-g)$$

e, portanto, como $g + (-g) = 0$, tem-se que $-g' = -g$.

Note-se que, para todo $E \in 2^M$,

$$E \Delta \emptyset = \emptyset \Delta E = E \quad \text{e} \quad E \Delta E = \emptyset \, .$$

Como visto acima, a operação de diferença simétrica é comutativa e associativa. Portanto, $(2^M, \Delta)$ é um grupo Abeliano com elemento neutro $\emptyset$ e elemento inverso $-E = E$ para todo $E \in 2^M$.

Uma outra noção algébrica natural para famílias de subconjuntos é a de anel comutativo:

Definição 16 (anel comutativo) *Seja R um conjunto e $+, \cdot : R \times R \to R$ duas operações binárias (chamadas "adição" e "multiplicação", respectivamente) em R. Dizemos que a tripla $(R, +, \cdot)$ é um "anel comutativo" se $(R, +)$ é um grupo abeliano e a operação de multiplicação, $\cdot : R \times R \to R$, tem as seguintes propriedades:*

i.) Comutatividade: *Para todo* $r, r' \in R$, $r \cdot r' = r' \cdot r$.

ii.) Associatividade: *Para todo* $r, r', r'' \in R$, $(r \cdot r') \cdot r'' = r \cdot (r' \cdot r'') \doteq r \cdot r' \cdot r''$.

iii.) Distributividade: *Para todo* $r, r', r'' \in R$, $r \cdot (r' + r'') = r \cdot r' + r \cdot r''$.

Dizemos que $1 \in R$ *é elemento neutro da multiplicação se, para todo* $r \in R$, $1 \cdot r = r$.

Anéis não possuem necessariamente um elemento neutro da multiplicação. De modo análogo ao caso do elemento neutro da adição, é fácil mostrar que se existe tal elemento então este é necessariamente único.

Observe-se que a operação binária de interseção $\cap$ em 2^M é uma operação comutativa e associativa. Com efeito, tem-se:

Exercício 17 *Mostre que, para todo conjunto não vazio* M*, a tripla* $(2^M, \Delta, \cap)$ *é um anel comutativo.*

Pela identidade $M \cap E = E$, $E \in 2^M$, vemos que M é o elemento neutro da multiplicação no anel $(2^M, \Delta, \cap)$.

Definição 18 (anéis de conjuntos) *Seja* M *um conjunto não vazio e* $\mathcal{R} \subseteq 2^M$ *uma família não vazia de subconjuntos de* M*. Dizemos que* $\mathcal{R}$ *é um "anel sobre o conjunto* M*" se, para todo* $E, E' \in \mathcal{R}$*,*

$$E \Delta E', \; E \cap E' \in \mathcal{R}$$

(isto é, a família $\mathcal{R}$ *é estável com relação às operações* Δ *e* $\cap$*).*

Se $\mathcal{R} \subseteq 2^M$ é um anel então $\emptyset \in \mathcal{R}$, pois $E \Delta E = \emptyset$ para qualquer $E \in \mathcal{R}$. Isto é, $\mathcal{R}$ contém o elemento neutro da adição de $(2^M, \Delta, \cap)$. Recorde-se ainda que no anel $(2^M, \Delta, \cap)$, para todo $E \in 2^M$, $-E = E$. Assim, aneis sobre um conjunto não vazio M são sempre subaneis de $(2^M, \Delta, \cap)$, isto é, $\mathcal{R}$ forma um anel com relação à restrição das operações Δ e $\cap$ a $\mathcal{R}$. Além disso, o elemento neutro da adição de $\mathcal{R}$ (o conjunto vazio $\emptyset$) coincide com o de $(2^M, \Delta, \cap)$. Note-se, porém, que o anel $\mathcal{R}$ não necessariamente possui elemento neutro da multiplicação (e, neste caso, $M \notin \mathcal{R}$).

A seguir discutiremos três caracterizações equivalentes de anéis sobre um conjunto. Para tanto, observem-se as seguintes identidades para as operações Δ e $\cap$: Para todo $E, E' \in 2^M$,

$$\begin{aligned} E \cup E' &= \Delta\{E, E', E \cap E'\} , \\ E \backslash E' &= E \Delta (E \cap E') . \end{aligned}$$

Com elas concluímos que se a família $\mathcal{R} \subseteq 2^M$ é um anel sobre M, então, para todo $E, E' \in \mathcal{R}$, necessariamente tem-se:

$$E \backslash E', E \cup E' \in \mathcal{R} .$$

Isto é, todo anel sobre um dado conjunto é estavel com relação a diferenças e uniões finitas de seus elementos. De fato, esta propriedade caracteriza completamente o ser anel sobre um conjunto:

Exercício 19 *Seja uma família* $\mathcal{R} \subseteq 2^M$*. Mostre que as três condições seguintes são equivalentes:*

i.) $\mathcal{R}$ *é anel sobre* M*, isto é, para todo* $E, E' \in \mathcal{R}$*,vale* $E \Delta E' \in \mathcal{R}$ *e* $E \cap E' \in \mathcal{R}$*.*

ii.) Para todo $E, E' \in \mathcal{R}$*, vale* $E \Delta E' \in \mathcal{R}$ *e* $E \cup E' \in \mathcal{R}$*.*

iii.) Para todo $E, E' \in \mathcal{R}$*,vale* $E \backslash E' \in \mathcal{R}$ *e* $E \cup E' \in \mathcal{R}$*.*

Definição 20 (álgebras de conjuntos) *Dizemos que o anel $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ sobre M é uma "álgebra" sobre M, se, para todo $E \in \mathcal{A}$, vale $E^c \in \mathcal{A}$, isto é, se este anel é uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de M que é estável com relação à operação de complemento em M.*

É importante notar que o termo "álgebra" não é usado aqui da mesma maneira que em outras áreas da matemática. Note-se que se o anel $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ é uma álgebra sobre M, então $M \in \mathcal{A}$, pois o conjunto vazio é elemento de todo anel de conjuntos.

Exercício 21 *Seja $\mathcal{E} \subseteq 2^M$. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:*

i.) $\mathcal{E}$ é uma álgebra.

ii.) $\mathcal{E}$ é um anel e $M \in \mathcal{E}$. (Em particular o anel possui elemento neutro da multiplicação.)

iii.) Para todo $E, E' \in \mathcal{E}$, tem-se $E^c, E \cap E' \in \mathcal{E}$.

iv.) Para todo $E, E' \in \mathcal{E}$, tem-se $E^c, E \cup E'$

1.3.1 Complemento: Anéis de conjuntos como reticulados, anéis de Boole e teorema de representação de Stone

Também é possível caracterizar completamente um anel de conjuntos a partir de somente a relação de ordem para os conjuntos que o constituem. Com efeito, qualquer família de subconjuntos $\mathcal{R} \subseteq 2^M$ é parcialmente ordenada pela relação de inclusão inclusão: Para $E, E' \in \mathcal{R}$ quaisquer, dizemos que "E é menor ou igual a E'" se $E \subseteq E'$. Esta relação será denotada por $E \leq E'$, como é usual. Se $\mathcal{R}$ é um anel sobre M então é possível reconstruir esta relação de ordem parcial por via da operação $\cap$ (produto do anel comutativo):

$$E \leq E' \quad \text{se, e somente se,} \quad E \cap E' = E \ .$$

Observe-se ainda que, como

$$\emptyset = E \Delta E \in \mathcal{R} \ ,$$

todo anel de conjuntos possui um elemento mínimo. Reciprocamente, se numa família parcialmente ordenada de conjuntos $(\mathcal{R}, \leq)$ a relação de ordem é oriunda de uma estrutura de anel de conjuntos, as respectivas operações de anel podem ser reconstruidas a partir da relação de ordem: Seja $\mathcal{R}$ um anel sobre M. Para todo $E, E' \in \mathcal{R}$ sejam

$$\begin{aligned} E \wedge E' &\doteq \sup\{\tilde{E} \in \mathcal{R} \ : \ \tilde{E} \leq E, E'\} \in \mathcal{R} \ , \\ E \vee E' &\doteq \inf\{\tilde{E} \in \mathcal{R} \ : \ E, E' \leq \tilde{E}\} \in \mathcal{R} \ , \\ E \backslash E' &\doteq \inf\{\tilde{E} \in \mathcal{R} \ : \ E \leq \tilde{E} \vee E'\} \\ &= \sup\{\tilde{E} \in \mathcal{R} \ : \ \tilde{E} \leq E \ , \ \tilde{E} \wedge E' = \emptyset\} \in \mathcal{R} \ . \end{aligned}$$

Com esta definições, para todo $E, E' \in \mathcal{R}$, tem-se:

$$\begin{aligned} E \cap E' &= E \wedge E' \ , \\ E \Delta E' &= (E \backslash E') \vee (E' \backslash E) \ . \end{aligned}$$

A existência do supremo $E \wedge E'$ ($= E \cap E'$) e do ínfimo $E \vee E'$ ($= \Delta\{E, E', E \cap E'\}$) em $\mathcal{R}$ para todo $E, E' \in \mathcal{R}$ se refere ao fato do conjunto parcialmete ordenado $(\mathcal{R}, \leq)$ ser um "reticulado". Note-se ainda que $(\mathcal{R}, \leq)$ é um "reticulado distributivo", isto é, para todo $E, E', E'' \in \mathcal{R}$ vale

$$\begin{aligned} E \wedge (E' \vee E'') &= (E \wedge E') \vee (E \wedge E'') \ , \\ E \vee (E' \wedge E'') &= (E \vee E') \wedge (E \vee E'') \ . \end{aligned}$$

A existência e igualdade do ínfimo e do supremo

$$\inf\{\tilde{E} \in \mathcal{R} \ : \ E \leq \tilde{E} \vee E'\} = \sup\{\tilde{E} \ : \ \tilde{E} \leq E \ , \ \tilde{E} \wedge E' = \emptyset\} = E\Delta(E \cap E')$$

se referem à operação de "diferença" para reticulados com elemento mínimo (a qual não é necessariamente bem definida em um reticulado qualquer com elemento mínimo, mas aqui existe e coincide com a diferença usual de conjuntos).

Assim, temos que todo anel de conjuntos é um reticulado distributivo com elemento mínimo e diferença. Este ponto de vista sobre os aneis de conjuntos é natural em considerações de natureza lógica e probabilística, além de permitir formulações abstratas, sem referência (direta) a operações com conjuntos.

De modo mais geral, é possível mostrar que se $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ é um anel comutativo qualquer tal, que, para todo $r \in \mathcal{R}$, vale $r \cdot r = r$ (idempotência do produto, como no caso dos aneis de conjuntos) então a relação

$$r \leq r' \quad \text{para} \quad r \cdot r' = r \ , \quad r, r' \in \mathcal{R} \ ,$$

é uma ordem parcial em $\mathcal{R}$ tal, que

$$r \wedge r' = r \cdot r'$$

é o maior elemento de $\mathcal{R}$ menor que $r, r' \in \mathcal{R}$, e

$$r \vee r' = r + r' + r \cdot r'$$

é o menor elemento de $\mathcal{R}$ maior que $r, r' \in \mathcal{R}$. Segue diretamente disto que $(\mathcal{R}, \leq)$ é um reticulado distributivo. Ademais, $0 \in \mathcal{R}$, o elemento neutro da adição, é o elemento mínimo do reticulado. De modo similar,

$$r \backslash r' = r + r \cdot r' \ , \quad r, r' \in \mathcal{R} \ ,$$

é, simulaneamente, o maior elemento $\tilde{r} \leq r$ tal, que $\tilde{r} \cdot r = 0$, e o menor elemento $\tilde{r} \in \mathcal{R}$ tal, que $r \leq \tilde{r} \vee r'$. Assim, o reticulado $(\mathcal{R}, \leq)$ admite operação de diferença, como no caso se anéis de conjuntos. Note-se ainda que da propriedade de idempotência do produto segue também que $r = -r$ para todo $r \in \mathcal{R}$, exatamente com no caso especial de anéis de conjuntos: Considere a igualdade

$$\begin{aligned} r + r &= (r + r) \cdot (r + r) \\ &= r \cdot r + r \cdot r + r \cdot r + r \cdot r \\ &= r + r + r + r \ , \end{aligned}$$

a qual implica que $r + r = 0$ (por subtração de $r + r$ dos dois lados da igualdade).

Pelo Exercício 21(iii.), do ponto de vista da relação de ordem, álgebras de conjuntos são reticulados distributivos com operação de diferença e elemento mínimo (como os aneis de conjuntos gerais), mas (ao contrário de aneis gerais) também com elemento máximo M.

Exatamente como para conjuntos, em reticulados mais gerais $\mathcal{E}$ deste tipo definimos o "complemento" de $E \in \mathcal{E}$ por

$$E^c = M \backslash E \ .$$

Neste caso, para todo $E, E' \in \mathcal{E}$, vale (como no caso de ágebras de conjuntos)

$$E' \backslash E = E' \wedge E^c \ .$$

Aneis comutativos $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ com elemento neutro da multiplicação para os quais vale $r \cdot r = r$ para todo $r \in \mathcal{R}$ são chamados "anéis de Boole". Em particular, álgebras de conjuntos são aneis de Boole. Por um teorema devido a Stone, todo anel de Boole (abstrato) é equivalente a um de conjuntos (no sentido de haver uma bijeção entre os dois que converte as operações de reticulado $\wedge$ e

$\vee$ respectivamente nas operações $\cap$ e $\cup$ de conjuntos, e o complemento de reticulado em complemento usual de conjuntos). Por tanto, sem restrição à generalidade, podemos considerar somente aneis de Boole de conjuntos, isto é, álgebras de conjuntos. Com efeito, de modo mais geral, todo reticulado distributivo é equivalente a um de conjuntos (no sentido de haver uma bijeção entre os dois que converte as operações de reticulado nas operações $\cap$ e $\cup$ de conjuntos). Porém, no caso geral, ao contrário dos reticulados associados a anéis de Boole, note-se a diferença de elementos não pode ser identificada com as dos respectivos conjuntos, pois diferenças nem mesmo precisam existir no reticulado original.

1.4 σ-Anéis

Definição 22 (famílias σ-sup- e σ-inf-fechadas) *Seja $\mathcal{E} \subseteq 2^M$. Dizemos que esta família de subconjuntos de M é "σ-sup-fechada" se, para toda sequência $E_n \in \mathcal{E}$, $n \in \mathbb{N}$, vale $\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{E}$. Analogamente, $\mathcal{E}$ é dita ser "σ-inf-fechada" se, para toda sequência $E_n \in \mathcal{E}$, $n \in \mathbb{N}$, vale $\inf_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{E}$. Finalmente, $\mathcal{E}$ é "σ-fechada" se for simultaneamente σ-inf- e σ-sup-fechada.*

Como é usual, também nestas notas o préfixo "σ-" fará referência à enumerabilidade. É importante notar que famílias estáveis pois uniões finitas não são necessariamente σ-sup-fechadas e, de modo similar, famílias estáveis pois interseções finitas não são necessariamente σ-inf-fechadas.

Definição 23 (σ-anéis e σ-álgebras) *Seja $\mathcal{R}$ um anel sobre M. Dizemos que $\mathcal{R}$ é um "σ-anel" sobre M se for σ-sup-fechado. Se o σ-anel $\mathcal{R}$ sobre M é uma álgebra, então dizemos que $\mathcal{R}$ é uma "σ-álgebra" sobre M.*

Veremos no decorrer deste capítulo que a estrutura de σ-álgebra é natural no problema da medida, ou seja, é conveniente impor que as famílias de conjuntos mensuráveis formem σ-álgebras.

Exercício 24 *Motre que se $\mathcal{R} \subseteq 2^M$ é anel, então $\mathcal{R}$ é σ-sup-fechado somente se for σ-inf-fechado. Mostre também que se $\mathcal{R}$ é uma álgebra então o ser σ-inf-fechado é equivalente ao ser σ-sup-fechado. (Em particular, nestes dois casos, $\mathcal{R}$ é σ-fechado.)*

Uma consequência imediata, mas importante, deste último exercício é a seguinte:

Corolário 25 *Seja $\mathcal{R} \subseteq 2^M$ um σ-anel. Para toda sequência $E_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$, vale:*

$$\liminf_{n\to\infty} E_n, \limsup_{n\to\infty} E_n \in \mathcal{R} \; .$$

Exercício 26 *Seja $\mathcal{E} \subseteq 2^M$ uma família arbitrária. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:*

i.) $\mathcal{E}$ é uma σ-álgebra.

ii.) $\mathcal{E}$ é σ-sup-fechada e, para todo $E \in \mathcal{E}$, vale $E^c \in \mathcal{E}$.

iii.) $\mathcal{E}$ é σ-inf-fechada e, para todo $E \in \mathcal{E}$, vale $E^c \in \mathcal{E}$.

Uma maneira comum de definir um anel, álgebra, σ-anel ou σ-álgebra sobre um dado conjunto M_1 é definir primeiro um anel, álgebra, σ-anel ou σ-álgebra sobre um outro conjunto M_2, em geral mais simples, assim como uma função $f : M_1 \to M_2$: Note-se que as estruturas de anel, álgebra, σ-anel e σ-álgebra são preservadas por pré-imagens. Isto é, se $\mathcal{R}_2$ é um anel (álgebra, σ-anel ou σ-álgebra) sobre um conjunto M_2 e f é uma função $M_1 \to M_2$, então a família $f^{-1}(\mathcal{R}_2) \subseteq 2^{M_1}$ é um anel (álgebra, σ-anel ou σ-álgebra). Este tipo de construção é muito usado, por exemplo, em teoria de probabilidades.

Também há um modo natural de, partindo agora de um anel (álgebra, σ-anel ou σ-álgebra) $\mathcal{R}_1$ sobre M_1 e uma função $f : M_1 \to M_2$, se definir um novo anel (álgebra, σ-anel ou σ-álgebra) sobre M_2:

Exercício 27 *Seja $\mathcal{R}_1 \subseteq 2^{M_1}$ um anel (álgebra, σ-anel ou σ-álgebra) sobre M_1. Mostre que a família*

$$\mathcal{R}_2 \doteq \{E_2 \in 2^{M_2} \ : \ f^{-1}(E_2) \in \mathcal{R}_1\} \subseteq 2^{M_2}$$

é o maior anel (álgebra, σ-anel ou σ-álgebra) $\mathcal{R}_2 \subseteq 2^{M_2}$ sobre M_2 tal, que $f^{-1}(\mathcal{R}_2) \subseteq \mathcal{R}_1$.

1.5 Definição de anéis de conjuntos por famílias geradoras

O modo mais comum de definição de um anel, álgebra, σ-anel ou σ-álgebra, $\mathcal{R}$, sobre um dado conjunto M é a definição explícita de alguma família (dita "geradora") $\mathcal{E} \subseteq 2^M$ contida em $\mathcal{R}$, que deverá ser o menor anel, álgebra, σ-anel ou σ-álgebra sobre M com esta propriedade. A existência de tal $\mathcal{R} \subseteq 2^M$ é garantida pelo seguinte fato elementar:

Lema 28 *Seja M um conjunto e $\mathcal{R}_i \subseteq 2^M$, $i \in I$, uma família não vazia de anéis (álgebras, σ-anéis ou σ-álgebras) sobre M.*

$$\mathcal{R}_I \doteq \inf_{i \in I} \mathcal{R}_i$$

é também um anel (álgebra, σ-anel ou σ-álgebra) sobre M.

Seja $\mathcal{E} \subseteq 2^M$ uma família arbitrária de subconjuntos de M e $\mathcal{R}_i \subseteq 2^M$, $i \in I$, a família de todos os anéis (álgebras, σ-anéis ou σ-álgebras) sobre M que contenham $\mathcal{E}$. Note-se que 2^M é sempre elemento desta família e, logo, esta é não vazia. Como $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{R}_I \subseteq \mathcal{R}_i$ para todo $i \in I$, $\mathcal{R}_I$ é o menor anel (álgebra, σ-anel ou σ-álgebra) sobre M que contém $\mathcal{E}$. Em particular, existe um menor anel (álgebra, σ-anel ou σ-álgebra) sobre M que contenha $\mathcal{E}$.

Definição 29 (anéis, álgebras, σ-anéis, σ-álgebras gerados) *Seja $\mathcal{E} \subseteq 2^M$ uma família arbitrária de subconjuntos de M. O menor anel (álgebra, σ-anel ou σ-álgebra) sobre M que contém $\mathcal{E}$ é chamado o anel (álgebra, σ-anel ou σ-álgebra) sobre M "gerado por $\mathcal{E}$". Utilizamos a notação $\mathcal{R}(\mathcal{E}) \subseteq 2^M$ para o anel, $\mathcal{A}(\mathcal{E}) \subseteq 2^M$ para a àlgebra, e $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq 2^M$ para a σ-álgebra gerados por $\mathcal{E}$.*

A definição de um anel (álgebra, σ-anel ou σ-álgebra) por uma família geradora é compatível com a definição por pré-imagens, no seguinte sentido:

Exercício 30 *Seja $\mathcal{E}_2 \subseteq 2^{M_2}$ uma família arbitrária de subconjuntos de M_2 e $\mathcal{R}_2 \subseteq 2^{M_2}$ o anel (álgebra, σ-anel ou σ-álgebra) sobre M_2 gerado por $\mathcal{E}_2$. Seja $f : M_1 \to M_2$ uma função. Mostre que $f^{-1}(\mathcal{R}_2) \subseteq 2^{M_1}$ é o anel (álgebra, σ-anel ou σ-álgebra) gerado pela família $f^{-1}(\mathcal{E}_2) \subseteq 2^{M_1}$.*

Sugestão: Use o Exercício 27 para mostrar que o anel (álgebra, σ-anel ou σ-álgebra) $f^{-1}(\mathcal{R}_2) \subseteq 2^{M_1}$ está contido no anel (álgebra, σ-anel ou σ-álgebra) gerado pela família $f^{-1}(\mathcal{E}_2) \subseteq 2^{M_1}$.

Outras propriedades simples, porém importantes, de anéis, álgebras, σ-anéis e σ-álgebras gerados são as seguintes:

Exercício 31 *Seja M um conjunto arbitrário, $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subseteq 2^M$ duas famílias de subconjuntos e $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \subseteq 2^M$ os respectivos anéis (álgebras, σ-anéis ou σ-álgebras) gerados por estas famílias. Mostre que:*

i.) Se $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2$ então $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$.

ii.) *Se $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$ então $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$.*

iii.) *Se $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$ e $\mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{R}_1$ então $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$.*

Uma consequência simples, porém útil, da terceira parte do exercício acima é o seguinte fato:

Lema 32 *Para toda família $\mathcal{E} \subseteq 2^M$, tem-se $\sigma(\mathcal{R}(\mathcal{E})) = \sigma(\mathcal{E})$.*

Demonstração: Obviamente vale $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{R}(\mathcal{E}))$. Como $\sigma(\mathcal{E})$ é um anel que contém $\mathcal{E}$ tem-se também $\mathcal{R}(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{E})$ e, portanto, o lema segue da terceira parte do último exercício. ■

Mesmo que a definição acima para anéis, álgebras, σ-anéis e σ-álgebras gerados faça sentido para qualquer família geradora $\mathcal{E} \subseteq 2^M$, convém, em geral, que já se imponha alguma estrutura à família geradora $\mathcal{E}$. A estrutura de "semianel" revelou-se bastante útil:

Definição 33 (semianel) *Dizemos que a família $\mathcal{H} \subseteq 2^M$ é um "semianel" sobre M se:*

i.) *$\emptyset \in \mathcal{H}$.*

ii.) *Para todo $E, E' \in \mathcal{H}$, vale $E \cap E' \in \mathcal{H}$.*

iii.) *Para todo $E, E' \in \mathcal{H}$, existem finitos elementos* disjuntos *$F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{H}$ tais, que*

$$E \backslash E' = F_1 \cup \cdots \cup F_n \,.$$

Exemplos típicos de semianéis sobre $\mathbb{R}$ são os seguintes:

Exemplo 34

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^1_{\mathbb{R}} &\doteq \{\emptyset\} \cup \{(a,b] \;:\; a,b \in \mathbb{R},\; a<b\} \subseteq 2^{\mathbb{R}}, \\ \mathcal{I}^1_{\mathbb{Q}} &\doteq \{\emptyset\} \cup \{(a,b] \;:\; a,b \in \mathbb{Q},\; a<b\} \subseteq 2^{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

são semianéis sobre $\mathbb{R}$. Obviamente, $\mathcal{I}^1_{\mathbb{Q}} \subsetneq \mathcal{I}^1_{\mathbb{R}}$.

A estrutura de semianel é estável com relação a produtos cartesianos:

Lema 35 *Sejam $\mathcal{H}_1 \subseteq 2^{M_1}$ e $\mathcal{H}_2 \subseteq 2^{M_2}$ semianéis sobre, respectivamente, M_1 e M_2. Então*

$$\mathcal{H}_1 * \mathcal{H}_2 \doteq \{E_1 \times E_2 \;:\; E_1 \in \mathcal{H}_1,\; E_2 \in \mathcal{H}_2\} \subseteq 2^{M_1 \times M_2}$$

é um semianel sobre $M_1 \times M_2$.

Demonstração: Exercício.

Identificando (canonicamente) os produtos cartesianos $(M_{k_1} \times \cdots \times M_{k_l}) \times M_{k_{l+1}}$, $M_{k_1} \times (M_{k_2} \cdots \times M_{k_{l+1}})$, $M_{k_1} \times \cdots \times M_{k_{l+1}}$, $l = 1, \ldots, n-1$, $k_1, \ldots, k_l = 1, \ldots, n$, e iterando o lema acima, concluímos que se $\mathcal{H}_k \subseteq 2^{M_k}$ são seminéis sobre os conjuntos M_k, $k = 1, \ldots, n$, então

$$\mathcal{H}_1 * \cdots * \mathcal{H}_n \doteq \{E_1 \times \cdots \times E_n \;:\; E_k \in \mathcal{H}_k,\; k = 1, \ldots, n\} \subseteq 2^{M_1 \times \cdots \times M_n}$$

é um semianel sobre $M_1 \times \cdots \times M_n$. Em particular, para todo $d \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^d_{\mathbb{R}} &\doteq \{\emptyset\} \cup \{(a_1,b_1] \times \cdots \times (a_d,b_d] \;:\; a_k,b_k \in \mathbb{R},\; a_k<b_k,\; k=1,\ldots,d\} \subseteq 2^{\mathbb{R}^d}, \\ \mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}} &\doteq \{\emptyset\} \cup \{(a_1,b_1] \times \cdots \times (a_d,b_d] \;:\; a_k,b_k \in \mathbb{Q},\; a_k<b_k,\; k=1,\ldots,d\} \subseteq 2^{\mathbb{R}^d} \end{aligned}$$

são semianéis sobre $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$.

Exercício 36 *Mostre que os σ-anéis gerados por $\mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}}$ e $\mathcal{I}^d_{\mathbb{R}}$, $d \in \mathbb{N}$, são, respectivamente, as σ-álgebras $\sigma(\mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}})$ e $\sigma(\mathcal{I}^d_{\mathbb{R}})$. Analogamente para os σ-anéis gerados por $\mathcal{R}(\mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}})$ e $\mathcal{R}(\mathcal{I}^d_{\mathbb{R}})$, $d \in \mathbb{N}$.*

Os anéis gerados por semianéis tem uma caracterização bastante explícita em termos dos elementos dos semianéis geradores:

Lema 37 *Seja $\mathcal{H} \subseteq 2^M$ um semianel sobre M. Então*

$$\{E_1 \cup \cdots \cup E_n \ : \ E_1, \ldots, E_n \textit{ elementos disjuntos de } \mathcal{H},\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq 2^M$$

é um anel sobre M.

Demonstração: Exercício.

Obviamente, o anel do lema acima contém $\mathcal{H}$ e está necessariamente contido em todo anel que contenha o semianel $\mathcal{H}$, pois anéis são estáveis com relação à operação de união finita de seus elementos. Assim, o anel do lema esta contido em $\mathcal{R}(\mathcal{H})$. Como este último é o menor anel que contém $\mathcal{H}$, tem-se:

Corolário 38 *Seja $\mathcal{H} \subseteq 2^M$ um semianel sobre M. Então vale*

$$\mathcal{R}(\mathcal{H}) = \{E_1 \cup \cdots \cup E_n \ : \ E_1, \ldots, E_n \textit{ elementos disjuntos de } \mathcal{H},\ n \in \mathbb{N}\}.$$

1.5.1 Famílias monótonas e sistemas de Dynkin

Definição 39 (famílias monótonas) *Dizemos que $\mathcal{M} \subseteq 2^M$ é uma "família monótona" (de subconjuntos de um conjunto fixo M) se, para toda sequência monótona $E_n \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$, vale $\lim_{n\to\infty} E_n \in \mathcal{M}$. Se $\mathcal{E} \subseteq 2^M$ é uma família qualquer, denota-se por $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subseteq 2^M$ a menor família monótona que contém $\mathcal{E}$. Esta é chamada a "família monótona gerada por $\mathcal{E}$".*

Observe-se que interseções de famílias monótonas são também famílias monótonas. Portanto, como no caso de anéis, σ-anéis e σ-álgebras gerados, $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ existe para todo $\mathcal{E} \subseteq 2^M$.

Recorde-se que σ-anéis são estáveis com respeito a limites de sequências de seus elementos. Portanto, σ-anéis são sempre famílias monótonas. Em particular, para toda família $\mathcal{E} \subseteq 2^M$, a família monótona $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subseteq 2^M$ está contida no σ-anel e na σ-álgebra gerados por $\mathcal{E}$.

Proposição 40 *Seja $\mathcal{R} \subseteq 2^M$ um anel sobre M. $\mathcal{M}(\mathcal{R}) \subseteq 2^M$ é o σ-anel gerado por $\mathcal{R}$. Se $\mathcal{R}$ é uma álgebra então $\mathcal{M}(\mathcal{R}) = \sigma(\mathcal{R})$.*

Demonstração: Para melhor compreensão, dividiremos a prova em diversos pequenos passos simples:

1. Como $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ sempre está contido no σ-anel gerado por $\mathcal{R}$, basta provar que $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ contém tal σ-anel.

2. Pela definição de σ-anel gerado, é suficiente provar que $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ é σ-anel.

3. Para todo $E \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$, definimos a família

$$\mathcal{M}_E(\mathcal{R}) \doteq \{\tilde{E} \in 2^M \ : \ E\backslash\tilde{E}, \tilde{E}\backslash E, E \cup \tilde{E} \in \mathcal{M}(\mathcal{R})\} .$$

   É fácil ver (pelas leis distributivas para $\cap$ e $\cup$) que, para todo $E \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$, $\mathcal{M}_E(\mathcal{R}) \subseteq 2^M$ é uma família monótona.

4. Se $E \in \mathcal{R}$ então $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_E(\mathcal{R})$, pois $\mathcal{R}$ é um anel e anéis são estáveis com relação à diferença e à união (finita) de subconjuntos. Em particular, neste caso, $\mathcal{M}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{M}_E(\mathcal{R})$.

5. Note-se também que, pela definição de $\mathcal{M}_E(\mathcal{R})$, para todo $E, E' \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$, tem-se $E' \in \mathcal{M}_E(\mathcal{R})$ se, e somente se, $E \in \mathcal{M}_{E'}(\mathcal{R})$. Como (pelo passo 4), para todo $E \in \mathcal{R}$ e todo $E' \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$, vale $E' \in \mathcal{M}_E(\mathcal{R})$, segue então que, para todo $E \in \mathcal{R}$ e todo $E' \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$, vale $E \in \mathcal{M}_{E'}(\mathcal{R})$. Com isso, para todo $E \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$, vale $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_E(\mathcal{R})$.

6. Como $\mathcal{M}_E(\mathcal{R})$ é família monótona (pelo passo 3), para todo $E \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$, tem-se

$$\mathcal{M}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{M}_E(\mathcal{R}) \ .$$

Esta última inclusão implica, pela definição de $\mathcal{M}_E(\mathcal{R})$, que, para todo $E, E' \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$,

$$E \backslash E', E \cup E' \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$$

Isto é, $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ é um anel.

7. Seja agora $E_n \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência qualquer. Como $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ é anel, podemos definir a nova sequência:

$$E_1 \cup \cdots \cup E_n \in \mathcal{M}(\mathcal{R}) \ , \quad n \in \mathbb{N}.$$

Note-se que esta última sequência é monótona e que:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}(E_1 \cup \cdots \cup E_n) = \lim_{n\to\infty} (E_1 \cup \cdots \cup E_n) \ .$$

Como $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ é família monótona, tem-se então:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{M}(\mathcal{R}).$$

Assim, $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ é σ-anel.

8. Note-se, finalmente, que se $\mathcal{R}$ é uma álgebra (isto é, se $M \in \mathcal{R}$) então $M \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$ e, portanto, $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ é σ-álgebra. ■

Corolário 41 *Para todo $d \in \mathbb{N}$, tem-se*

$$\sigma(\mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}}) = \mathcal{M}(\mathcal{R}(\mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}})) \quad e \quad \sigma(\mathcal{I}^d_{\mathbb{R}}) = \mathcal{M}(\mathcal{R}(\mathcal{I}^d_{\mathbb{R}})) \ .$$

Demonstração: Pela última proposição, $\mathcal{M}(\mathcal{R}(\mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}}))$ é o σ-anel gerado por $\mathcal{R}(\mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}})$. Pelo Exercício 36, este σ-anel é a σ-álgebra $\sigma(\mathcal{R}(\mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}}))$. Finalmente, pelo Lema 32, tem-se $\sigma(\mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}}) = \sigma(\mathcal{R}(\mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}}))$. A segunda igualdade é provada da mesma forma. ■

Recorde-se que $\mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}}$ e $\mathcal{I}^d_{\mathbb{R}}$ são semianéis e que o anel gerado por um semianel é a família das uniões finitas disjuntas dos elementos do semianel (Corolário 38). Deste modo, pelo último corolário, podemos ver a σ-álgebra gerada por $\mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}}$ (ou $\mathcal{I}^d_{\mathbb{R}}$) como a menor família de subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ que contém todas as uniões finitas e disjuntas de elementos de $\mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}}$ (ou $\mathcal{I}^d_{\mathbb{R}}$) e é fechada por limites monótonos.

Além dos σ-anéis, um outro tipo importante de famílias monótonas são os “sistemas de Dynkin”:

Definição 42 (sistemas de Dynkin) *Dizemos que a família $\mathcal{D} \subseteq 2^M$ de subconjuntos de M é um “sistema de Dynkin” se:*

i.) $M \in \mathcal{D}$.

ii.) Para todo $E \in \mathcal{D}$, $E^c \in \mathcal{D}$.

iii.) Para toda sequência $E_n \in \mathcal{D}$, $n \in \mathbb{N}$, de elementos disjuntos*,*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{D}.$$

Em particular, $\emptyset = M^c \in \mathcal{D}$. Se $\mathcal{E} \subseteq 2^M$ é uma família qualquer de subconjuntos de M, denota-se por $\delta(\mathcal{E}) \subseteq 2^M$ o menor sistema de Dynkin que contém $\mathcal{E}$. Este é chamado o "sistema de Dynkin gerado por $\mathcal{E}$".

Interseções de sistemas de Dynkin são sistemas de Dynkin. Portanto, $\delta(\mathcal{E})$ existe para todo $\mathcal{E} \subseteq 2^M$. Observe-se que a condição iii.) na definição de sistemas de Dynkin é a condição mínima a impor-se sobre uma família de subconjuntos M para que a propriedade de σ-aditividade do problema da medida possa ser considerada. A estabilidade com relação a complementos (propriedade ii.) na definição acima) é fundamental em teoria de probabilidades. Dadas as propriedades ii.) e iii.), a propriedade i.) pode ser substituída, de modo equivalente, por i.') $\emptyset \in \mathcal{D}$. Obviamente, o fato de que o conjunto vazio possa ser medido é muito natural. Além disso, sem esta condição a aditividade não seria uma consequência da σ-aditividade.

Lema 43 *Sistemas de Dynkin são sempre famílias monótonas.*

Demonstração: Seja $\mathcal{D} \subseteq 2^M$ um sistema de Dynkin. Note-se que, para todo $E, E' \in 2^M$, vale

$$E \backslash E' = E \cap E'^c = (E^c \cup E')^c \ .$$

Se $E' \subseteq E$ então E^c e E' são disjuntos. Assim, como $\mathcal{D}$ é um sistema de Dynkin, para todo $E, E' \in \mathcal{D}$, $E' \subseteq E$, tem-se $E \backslash E' \in \mathcal{D}$. Seja $E_n \in \mathcal{D}$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência crescente. Então $E_{n+1} \backslash E_n \in \mathcal{D}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n = E_1 \cup \sup_{n\in\mathbb{N}} (E_{n+1} \backslash E_n) \in \mathcal{D} \ ,$$

pois $E_1, E_2 \backslash E_1$,... são disjuntos. Seja agora $E_n \in \mathcal{D}$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência decrescente. Então vale

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} E_n = \left[\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n^c \right]^c \in \mathcal{D} \ ,$$

pois $E_n^c \in \mathcal{D}$, $n \in \mathbb{N}$, é sequência crescente. ■

Evidentemente, σ-álgebras são sistemas de Dynkin. Além disso, como mostrado no lema acima, todo sistema de Dynkin é uma família monótona. Portanto, para toda família $\mathcal{E} \subseteq 2^M$ de subconjuntos de M, tem-se

$$\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subseteq \delta(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{E}) \ .$$

Vimos que, para toda álgebra $\mathcal{A} \subseteq 2^M$, vale $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$. Nesta situação tem-se então,

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \delta(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}) \ .$$

Assim, surge a questão natural sobre as condições sobre $\mathcal{E}$, suficientes e necessárias, para que valha $\delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$. Para respondê-la, observamos em primeiro lugar o seguinte:

Exercício 44 *Mostre que um sistema de Dynkin $\mathcal{D} \subseteq 2^M$ é uma σ-álgebra sobre M se, e somente se, para todo $E, E' \in \mathcal{D}$,*

$$E \cap E' \in \mathcal{D} \ .$$

Proposição 45 *Seja uma família $\mathcal{E} \subseteq 2^M$ tal, que, para todo $E, E' \in \mathcal{E}$, vale $E \cap E' \in \mathcal{E}$. Então tem-se:*

$$\delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E}) \ .$$

Demonstração: Seja uma família $\mathcal{E} \subseteq 2^M$ estável por interseções finitas. Mostraremos que o sistema de Dynkin gerado por essa família preserva esta propriedade e disto seguirá a proposição, pelo último exercício. Esta demonstração é bastante similar à da Proposição 40 e, novamente, para melhor compreensão, a dividiremos em diversos pequenos passos simples:

1. Para todo $E \in \delta(\mathcal{E})$, defina:

   $$\mathcal{D}_E(\mathcal{E}) \doteq \{\tilde{E} \in 2^M \ : \ \tilde{E} \cap E \in \delta(\mathcal{E})\} \subseteq 2^M \ .$$

   É fácil verificar que $\mathcal{D}_E(\mathcal{E})$ é uma família monótona.

2. Note-se que, para todo $E, E' \in 2^M$, vale

   $$E'^c \cap E = E \backslash (E' \cap E) = (E^c \cup (E' \cap E))^c \quad \text{e} \quad (E' \cap E) \cap E^c = \emptyset \ .$$

   Logo, para todo $E \in \delta(\mathcal{E})$ e todo $E' \in \mathcal{D}_E(\mathcal{E})$, vale $E'^c \in \mathcal{D}_E(\mathcal{E})$. Com esta observação (e as leis distributivas para $\cap$ e $\cup$) ve-se que, para todo $E \in \delta(\mathcal{E})$, $\mathcal{D}_E(\mathcal{E})$ é um sistema de Dynkin. Além disso, se $E \in \mathcal{E}$ então

   $$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_E(\mathcal{E}),$$

   pois $\mathcal{E}$ é estável com relação à interseção de seus elementos. Logo, para todo $E \in \mathcal{E}$, tem-se

   $$\delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_E(\mathcal{E}) \ .$$

3. Observe-se que, para todo $E' \in \delta(\mathcal{E})$ e $E \in \mathcal{E}$, $E' \in \mathcal{D}_E(\mathcal{E})$ implica, pela própria definição de $\mathcal{D}_E(\mathcal{E})$, que $E \in \mathcal{D}_{E'}(\mathcal{E})$. Assim, para todo $E \in \delta(\mathcal{E})$, tem-se

   $$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_E(\mathcal{E}) \ .$$

   Portanto, para todo $E \in \delta(\mathcal{E})$, vale

   $$\delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_E(\mathcal{E}) \ ,$$

   pois (como mostrado no passo 2) $\mathcal{D}_E(\mathcal{E})$ é um sistema de Dynkin e contém $\mathcal{E}$.

4. Finalmente, esta inclusão implica que, para todo $E, E' \in \delta(\mathcal{E})$, tem-se $E \cap E' \in \delta(\mathcal{E})$. Pelo último exercício, neste caso, $\delta(\mathcal{E})$ é uma σ-álgebra e, portanto, vale $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \delta(\mathcal{E})$.

5. Recordando que a inclusão $\delta(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{E})$ é verdadeira para toda família $\mathcal{E} \subseteq 2^M$, segue a proposição. ■

Note-se que as famílias $\mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}}$ e $\mathcal{I}^d_{\mathbb{R}}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, são estáveis com relação à interseção de seus elementos. Portanto, tem-se:

Corolário 46 *Para todo $d \in \mathbb{N}$,*

$$\sigma(\mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}}) = \delta(\mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}}) \quad e \quad \sigma(\mathcal{I}^d_{\mathbb{R}}) = \delta(\mathcal{I}^d_{\mathbb{R}}) \ .$$

Veremos na próxima seção que $\sigma(\mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}}) = \sigma(\mathcal{I}^d_{\mathbb{R}})$ é a "σ-álgebra de Borel" de $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. De modo mais geral, para todo semianel $\mathcal{H} \subseteq 2^M$,

$$\sigma(\mathcal{H}) = \delta(\mathcal{H}) \ .$$

O corolário acima mostra que a menor família de subconjuntos de $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, que contém $\mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}}$ ($\mathcal{I}^d_{\mathbb{R}}$) e é fechada com respeito à operação de complemento e com respeito a uniões disjuntas contáveis é justamente σ-álgebra gerada por $\mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}}$ ($\mathcal{I}^d_{\mathbb{R}}$). A estabilidade com respeito a uniões disjuntas contáveis é, como já discutido, a propriedade essencial para a teoria da medida. O ser σ-álgebra é, de certo modo, uma propriedade acidental, porém muito importante. Tanto é assim que na definição abstrata de um espaço de medida geral esta propriedade será tomada como axioma para tais espaços.

1.6 Álgebras de Borel

Em um espaço métrico, é natural considerar-se a σ-álgebra gerada pela topologia deste espaço:

Definição 47 (álgebras de Borel) *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer. A σ-álgebra sobre M*

$$\mathcal{B}(M, d) \doteq \sigma(\tau_d)$$

é chamada "σ-álgebra de Borel" (ou simplesmente "álgebra de Borel") de (M, d). Recorde-se que se V é um espaço vetorial de dimensão finita então toda norma neste espaço define a mesma topologia. Por esta razão, neste caso, será usada a notação

$$\mathcal{B}(V) \doteq \sigma(\tau_V) \ ,$$

onde $\tau_V \doteq \tau_{d_{\|\cdot\|}}$ e $\|\cdot\|$ é uma norma qualquer em V. Os elementos da σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(M, d)$ são chamados "subconjuntos Borelianos" do espaço métrico (M, d).

Espaços métricos são meramente um caso especial de "espaço topológico". Para um espaço topológico geral, (Ω, τ), define-se, de modo análogo, sua álgebra de Borel por $\mathcal{B}(\Omega, \tau) \doteq \sigma(\tau)$. Nas presentes notas nos restringiremos, por simplicidade, ao estudo detalhado de álgebras de Borel de espaços métricos, em especial epaços normados de dimensão finita, mesmo que vários dos resultados discutidos aqui tenham análogos no caso de espaços topológicos mais gerais.

Álgebras de Borel são, em geral, estritamente maiores que as topologias que as geram. Isto é, há subconjuntos Borelianos que não são abertos. Por exemplo, como σ-álgebras são estáveis com respeito a complementos, todos os subconjuntos fechados são Borelianos mas, em geral, nem todo subconjunto fechado é um aberto. Recorde-se que σ-álgebras que são estáveis com relação a uniões e interseções enumeráveis. Tal fato motiva a definição dos seguintes tipos de Borelianos:

Definição 48 (subconjuntos G_δ e F_σ) *Seja (M, d) um espaço métrico. Dizemos que o subconjunto $E \in 2^M$ é um "subconjunto G_δ" se este é o ínfimo (isto é, a interseção) de uma família enumerável de abertos de (M, d). De modo análogo, E é dito ser um "subconjunto F_σ" se este é o supremo (isto é, a união) de uma família enumerável de subconjuntos fechados de (M, d).*

A seguir discutimos dois exemplos simples, mas importantes, de subconjuntos G_δ e F_σ. Em todo espaço métrico (M, d), os subconjuntos que contém um único ponto são sempre fechados, mas também são subconjuntos G_δ: Com efeito, para todo $p \in M$, tem-se

$$\{p\} = \inf_{n \in \mathbb{N}} B_{1/n}(p) \ .$$

Com efeito, num esaço métrico qualquer, todo fechado é um subconjunto G_δ. Em geral, porém, subconjuntos G_δ e F_σ não precisam nem ser fechados, nem abertos, como mostra o seguinte exemplo: No espaço normado $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, os subconjuntos $(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^d$, $a_1, b_1, \ldots, a_d, b_d \in \mathbb{R}$, $a_1 < b_1, \ldots, a_d < b_d$, são, simultaneamente, subconjuntos G_δ e F_σ, pois

$$\begin{aligned}(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n] &= \inf_{k \in \mathbb{N}} (a_1, b_1 + 1/k) \times \cdots \times (a_n, b_n + 1/k) \\ &= \sup_{k \in \mathbb{N}} [a_1 + 1/k, b_1] \times \cdots \times [a_n + 1/k, b_n] \ .\end{aligned}$$

Note-se que $(a_1, b_1 + 1/k) \times \cdots \times (a_d, b_d + 1/k)$ são abertos e $[a_1 - 1/k, b_1] \times \cdots \times [a_d - 1/k, b_d]$ fechados em $\mathbb{R}^d$ com relação a qualquer norma neste espaço vetorial.

A seguir determinaremos várias famílias geradoras para as álgebras de Borel.

Lema 49 *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer e denote-se por $\mathcal{C}(M, d) \subseteq 2^M$ a família de todos os subconjuntos fechados deste espaço. $\mathcal{C}(M, d)$ gera a álgebra de Borel $\mathcal{B}(M, d)$.*

Demonstração: Como todo fechado é um Boreliano, tem-se

$$\sigma(\mathcal{C}(M, d)) \subseteq \sigma(\mathcal{B}(M, d)) = \mathcal{B}(M, d) \; .$$

Por outro lado, $\sigma(\mathcal{C}(M, d))$ contém todos os abertos (ou seja, os complementos de fechados) de (M, d), pois σ-álgebras são famílias estáveis com relação a complementos. Assim, $\tau_d \subseteq \sigma(\mathcal{C}(M, d))$ e, portanto,

$$\mathcal{B}(M, d) = \sigma(\tau_d) \subseteq \sigma(\mathcal{C}(M, d)) \; .$$

■

Como subconjuntos compactos em um espaço métrico são sempre fechados, temos também sempre a seguinte inclusão:

$$\sigma(\mathcal{K}(M, d)) \subseteq \sigma(\mathcal{C}(M, d)) = \mathcal{B}(M, d) \; .$$

Recorde-se que $\mathcal{K}(M, d) \subseteq 2^M$ denota a família de todos os subconjuntos compactos do espaço métrico (M, d). No caso de espaços normados de dimensão finita, devido ao teorema de Bolzano-Weierstrass e a propriedades simples de σ-álgebras, esta inclusão é satisfeita com igualdade:

Lema 50 *Seja V um espaço normado qualquer de dimensão finita. Então vale $\mathcal{B}(V) = \sigma(\mathcal{K}(V))$, onde $\mathcal{K}(V) \doteq \mathcal{K}(V, d_{\|\cdot\|})$ e $\|\cdot\|$ é uma norma qualquer em V.*

Demonstração: No caso de dimensão finita, toda bola fechada $\overline{B}_R(0) \subseteq V$, $R \in (0, \infty)$, é um compacto, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass. Seja $C \subseteq V$ um subconjunto fechado arbitrário e defina, para todo $N \in \mathbb{N}$,

$$C_N \doteq C \cap \overline{B}_N(0) \; .$$

Todo C_N, $N \in \mathbb{N}$, é um compacto, pois é subconjunto fechado do compacto $\overline{B}_N(0)$. Observe-se que

$$C = \sup_{N \in \mathbb{N}} C_N \in \sigma(\mathcal{K}(V)) \; .$$

Logo, tem-se $\mathcal{C}(V) \subseteq \sigma(\mathcal{K}(V))$, o que implica que $\sigma(\mathcal{C}(V)) \subseteq \sigma(\mathcal{K}(V))$, onde $\mathcal{C}(V) \doteq \mathcal{C}(V, d_{\|\cdot\|})$.
■

Recorde-se que os elementos de $\mathcal{I}^d_{\mathbb{R}} \subseteq 2^{\mathbb{R}^d}$, $d \in \mathbb{N}$, são Borelianos, pois são subconjuntos G_δ (e também F_σ). Portanto, vale sempre a inclusão:

$$\sigma(\mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}}) \subseteq \sigma(\mathcal{I}^d_{\mathbb{R}}) \subseteq \sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \; .$$

A seguir mostraremos que as inclusões acima são, na verdade, igualdades. Para tanto, no valeremos do seguinte resultado:

Exercício 51 *Mostre que para todo $O \in \tau_{\mathbb{R}^d}$, $d \in \mathbb{N}$, existe uma sequência $E_n \in \mathcal{R}(\mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}})$, $n \in \mathbb{N}$, cujo supremo é O.*

Sugestão: Utilize que $\mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}}$ é um semianel e escolha $E_n \in \mathcal{R}(\mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}})$, $n \in \mathbb{N}$, como união finita de (hiper)cubos semiabertos de lado 2^{-n}.

Proposição 52 *Para todo $d \in \mathbb{N}$, tem-se*

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)) = \sigma(\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)) = \sigma(\mathcal{I}^d_{\mathbb{R}}) = \sigma(\mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}}) \; .$$

Demonstração: Note-se que as duas primeiras igualdades correspondem aos dois últimos lemas. Lembrando que $\sigma(\mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}}) = \sigma(\mathcal{R}(\mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}}))$, pelo último exercício, vale $\tau_{\mathbb{R}^d} \subseteq \sigma(\mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}})$, pois σ-álgebras são estáveis com relação a supremos de famílias enumeráveis de seus elementos. Logo,

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\tau_{\mathbb{R}^d}) \subseteq \sigma(\mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}}) \subseteq \sigma(\mathcal{I}^d_{\mathbb{R}}) \subseteq \sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \ .$$

■

De maneira similar, podemos mostrar que a álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $d \in \mathbb{N}$, é gerada pelos "paralelepípedos" abertos ou fechados:

Exercício 53 *Mostre que a álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subseteq 2^{\mathbb{R}^d}$, $d \in \mathbb{N}$, é gerada pelas famílias $\mathcal{I}^d_{o,\mathbb{R}}, \mathcal{I}^d_{c,\mathbb{R}} \subseteq 2^{\mathbb{R}^d}$,*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^n_{o,\mathbb{R}} &\doteq \{(a_1,b_1) \times \cdots \times (a_d,b_d) \ : \ a_k, b_k \in \mathbb{R}, \ a_k \leq b_k, \ k = 1,\ldots,d\}, \\ \mathcal{I}^n_{c,\mathbb{R}} &\doteq \{[a_1,b_1] \times \cdots \times [a_d,b_d] \ : \ a_k, b_k \in \mathbb{R}, \ a_k \leq b_k, \ k = 1,\ldots,d\}. \end{aligned}$$

Para finalizar esta seção, estudaremos algumas outras caracterizações da σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, como famílias monótonas. Tais caracterizações são conceitualmente relevantes, mas também úteis, por exemplo, em argumentos sobre a unicidade de medidas. Começaremos caracterizando $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ como sistema de Dynkin:

Corolário 54 *Para todo $d \in \mathbb{N}$, tem-se*

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \delta(\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)) = \delta(\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)) = \delta(\mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}}) = \delta(\mathcal{I}^d_{\mathbb{R}}) \ .$$

Demonstração: Note-se que as famílias $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d), \mathcal{C}(\mathbb{R}^d), \tau_{\mathbb{R}^d}, \mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}}, \mathcal{I}^d_{\mathbb{R}}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ são estáveis com relação à interseção de seus elementos. Como estas geram a σ-álgebra (de Borel) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, o corolário segue da Proposição 45.

Corolário 55 *Para todo $d \in \mathbb{N}$, tem-se*

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{M}(\mathcal{R}(\mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}})) = \mathcal{M}(\mathcal{R}(\mathcal{I}^d_{\mathbb{R}})) \ .$$

Demonstração: Recorde-se que, pela Proposição 52, vale

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}}) = \sigma(\mathcal{I}^d_{\mathbb{R}}) \ .$$

Com esta igualdade, do Corolário 41 segue o lema. ■

A seguir mostraremos que, mesmo as famílias $\tau_{\mathbb{R}^d}$, $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ e $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$, $d \in \mathbb{N}$, não sendo anéis, a família monótona gerada por estas é a σ-álgebra (de Borel) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Para demonstrar tal fato usaremos o seguinte resultado:

Exercício 56 *Mostre que todo elemento de $\mathcal{R}(\mathcal{I}^d_{\mathbb{R}})$, $d \in \mathbb{N}$, é o limite de uma sequência monótona decrescente de elementos de $\tau_{\mathbb{R}^d}$ e de uma sequência monótona crescente de elementos de $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$.*

Proposição 57 *Para todo $d \in \mathbb{N}$, tem-se*

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{M}(\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)) = \mathcal{M}(\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)) = \mathcal{M}(\tau_{\mathbb{R}^d}) \ .$$

Demonstração: Pelo exercício acima, vale

$$\mathcal{R}(\mathcal{I}^d_{\mathbb{R}}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)), \mathcal{M}(\tau_{\mathbb{R}^d}) \ .$$

Logo, pelo último corolário, tem-se

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{M}(\mathcal{R}(\mathcal{I}^d_{\mathbb{R}})) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{M}(\mathcal{K}(\mathbb{R}^d))), \mathcal{M}(\mathcal{M}(\tau_{\mathbb{R}^d})) \ ,$$

isto é, vale

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)), \mathcal{M}(\tau_{\mathbb{R}^d}) \ .$$

Recorde-se que $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ e $\tau_{\mathbb{R}^d}$ geram $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ como σ-álgebra e que $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{E})$ (pois σ-álgebras são famílias monótonas). Assim,

$$\mathcal{M}(\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)), \mathcal{M}(\tau_{\mathbb{R}^d}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \ .$$

Como $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, também vale que

$$\mathcal{M}(\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

e a proposição segue. ■

1.6.1 Comportamento de Borelianos com respeito a transformações

Sejam (M_1, d_1) e (M_2, d_2) dois espaços métricos, e $f : M_1 \to M_2$ uma função (transformação). A seguir discutimos condições simples que garantam que f transforme subconjuntos Borelianos de (M_1, d_1) em subconjuntos Borelianos de (M_2, d_2).

Dizemos que a transformação f é "Borel mensurável" se

$$f^{-1}(\mathcal{B}(M_2, d_2)) \subseteq \mathcal{B}(M_1, d_1) \ .$$

Observe-se que se $f : M_1 \to M_2$ é *bijetora* então f transforma os subconjuntos Borelianos de (M_1, d_1) em subconjuntos Borelianos de (M_2, d_2) se, e somente, se a função inversa de f é Borel mensurável.

Lema 58 *Toda função contínua é Borel mensurável.*

Demonstração: Suponha que $f : M_1 \to M_2$ seja contínua. Neste caso, pelo Exercício 30, tem-se

$$f^{-1}(\mathcal{B}(M_2, d_2)) = f^{-1}(\sigma(\tau_{d_2})) = \sigma(f^{-1}(\tau_{d_2})) \ .$$

Como f é contínua, temos

$$f^{-1}(\tau_{d_2}) \subseteq \tau_{d_1}$$

e, portanto,

$$\mathcal{B}(M_1, d_1) = \sigma(\tau_{d_1}) \supseteq \sigma(f^{-1}(\tau_{d_2})) = f^{-1}(\mathcal{B}(M_2, d_2)) \ .$$

■

Do último lema segue que todo homeomorfismo de espaços métricos transforma subconjuntos Borelianos em subconjuntos Borelianos. Observe-se que as transformações em $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, aqui chamadas de "movimentos" são exatamente as isometrias sobrejetoras do espaço normado $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_e)$ nele mesmo, onde $\|\cdot\|_e$ é a norma Euclidiana. Em particular, movimentos são homeomorfismos. Com isto tem-se:

Corolário 59 *Seja $\|\cdot\|$ uma norma qualquer em $\mathbb{R}^d$ e $\theta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ uma isometria sobrejetora. Então, para todo Boreliano $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, vale $\theta(E) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Em particular, a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ é invariante com relação a movimentos.*

1.7 Pré-medidas em semianéis

1.7.1 Conteúdos e pré-medidas

Definição 60 (conteúdos) *Seja $\mathcal{H}$ um semianel qualquer sobre M. Dizemos que $\mu : \mathcal{H} \to [0, \infty]$ é um "conteúdo" se $\mu(\emptyset) = 0$ e μ é aditivo, isto é, para toda sequência* finita disjunta $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{H}$, *$n \in \mathbb{N}$, tal, que $E_1 \cup \cdots \cup E_n \in \mathcal{H}$, vale*

$$\mu(E_1 \cup \cdots \cup E_n) = \mu(E_1) + \cdots + \mu(E_n) .$$

O conteúdo $\mu : \mathcal{H} \to [0, \infty]$ é dito "σ-aditivo" se, para toda sequência disjunta $E_n \in \mathcal{H}$, *$n \in \mathbb{N}$, tal, que* $\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{H}$, *tem-se*

$$\mu\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) .$$

Neste caso, dizemos que μ é uma "pré-medida". Se $\mu : \mathcal{H} \to [0, \infty]$ é pré-medida e o semianel $\mathcal{H}$ é uma σ-álgebra, dizemos que μ é uma "medida". O conteúdo μ é "finito" se, para todo $E \in \mathcal{H}$, vale $\mu(E) < \infty$. Se $\mathcal{E}$ é uma σ-álgebra sobre M dizemos que o par $(M, \mathcal{E})$ é um "espaço mensurável". Se $\mu : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ é uma medida, dizemos que a tripla $(M, \mathcal{E}, \mu)$ é um "espaço de medida".

A seguir, damos alguns exemplos simples de conteúdos:

Exemplo 61 *Seja M um conjunto qualquer.*

i.) Seja $\mu : 2^M \to [0, \infty]$ definido, para todo $E \in 2^M$, por:

$$\mu(E) \doteq |E| \text{ (número de elementos de } E) .$$

$(M, 2^M, \mu)$ é um espaço de medida. A medida μ assim definida é chamada a "medida de contagem" para M.

ii.) Para um $p \in M$ fixo qualquer, definimos $\mu_p : 2^M \to [0, \infty]$ por

$$\mu_p(E) \doteq \chi_E(p) = \begin{cases} 1 & se \quad p \in E \\ 0 & se \quad p \notin E \end{cases} , \quad E \in 2^M .$$

Para todo $p \in M$, $(M, 2^M, \mu_p)$ é um espaço de medida. A medida μ_p é chamada a "medida δ" em $p \in M$.

Exemplo 62 *Seja o semianel $\mathcal{H}$ sobre $(0, 1]$ definido por:*

$$\mathcal{H} \doteq \{\emptyset\} \cup \{(a, b] \ : \ a, b \in [0, 1], \, a < b\} .$$

Defina $\mu : \mathcal{H} \to [0, \infty]$ por $\mu(\emptyset) \doteq 0$,

$$\mu((a, b]) \doteq b - a$$

se $a > 0$, e $\mu((0, b]) \doteq \infty$. μ é um conteúdo (isto é, é aditivo), porém não é pré-medida, pois não é σ-aditivo:

$$\infty = \mu((0, 1]) = \mu\left(\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]\right) \neq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]\right) = 1 .$$

Uma propriedade simples, porém importante, dos conteúdos em semianeis é a monotonicidade destes:

Lema 63 *Sejam E, E' elementos do semianel $\mathcal{H}$ sobre M e $\mu : \mathcal{H} \to [0, \infty]$ um conteúdo. Se $E' \subseteq E$ então $\mu(E') \leq \mu(E)$.*

Demonstração: Como $\mathcal{H}$ é semianel, por definição, existem $\tilde{E}_1, \ldots, \tilde{E}_n \in \mathcal{H}$ disjuntos tais, que

$$E \backslash E' = \tilde{E}_1 \cup \cdots \cup \tilde{E}_n \ .$$

Note-se que $E', \tilde{E}_1, \ldots, \tilde{E}_n \in \mathcal{H}$ são disjuntos. Se $E' \subseteq E$, tem-se

$$E = E' \cup \tilde{E}_1 \cup \cdots \cup \tilde{E}_n \ .$$

Portanto, pela aditividade de conteúdos, vale

$$\mu(E) = \mu(E') + \mu(\tilde{E}_1) + \cdots + \mu(\tilde{E}_n) \ .$$

Como $\mu(\tilde{E}_k) \geq 0$, $k = 1, \ldots, n$, tem-se, neste caso, que $\mu(E) \geq \mu(E')$. ■

No caso dos anéis, conteúdos são sempre subaditivos com respeito a sequências finitas e σ-superaditivos com respeito a sequências disjuntas:

Lema 64 *Seja $\mathcal{R}$ um anel sobre M e $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ um conteúdo.*

i.) Subaditividade de μ. *Seja uma sequência finita $E_1, \ldots, E_N \in \mathcal{R}$ arbitrária (não necessariamente disjunta) e $E \in \mathcal{R}$ tais, que*

$$E \subseteq E_1 \cup \cdots \cup E_N \ .$$

Então vale

$$\mu(E) \leq \mu(E_1) + \cdots + \mu(E_N) \ .$$

ii.) σ-superaditividade disjunta de μ. *Seja uma sequência $E_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$, disjunta qualquer e $E \in \mathcal{R}$ tais, que* $\sup_{n \in \mathbb{N}} E_n \subseteq E$. *Então vale*

$$\mu(E) \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n) \ .$$

Demonstração: Seja uma sequência finita $E_1, \ldots, E_N \in \mathcal{R}$ e $E \in \mathcal{R}$ tais, que

$$E \subseteq E_1 \cup \cdots \cup E_N \ .$$

Então, pela monotonicidade de μ,

$$\begin{aligned} \mu(E) \ &\leq \ \mu(E_1 \cup \cdots \cup E_N) = \mu(\cup\{E_{n+1} \backslash (E_1 \cup \cdots \cup E_n) \ : \ n = 1, \ldots, N-1\} \cup E_1) \\ &= \ \mu(E_1) + \sum_{n=1}^{N-1} \mu(E_{n+1} \backslash (E_1 \cup \cdots \cup E_n)) \leq \sum_{n=1}^{N} \mu(E_n) \ . \end{aligned}$$

Note-se que os subconjuntos E_1 e $E_{n+1} \backslash (E_1 \cup \cdots \cup E_n)$, $n = 1, \ldots, N-1$, são disjuntos e estão contidos em $\mathcal{R}$, pois este é um anel. Isto prova i.).

Seja agora uma sequência *disjunta*, $E_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$, e $E \in \mathcal{R}$ tais, que $\sup_{n \in \mathbb{N}} E_n \subseteq E$. Note-se que, como $\mathcal{R}$ é anel, para todo $N \in \mathbb{N}$, vale

$$E \supseteq \sup_{n \in \mathbb{N}} E_n \supseteq E_1 \cup \cdots \cup E_N \in \mathcal{R} \ .$$

Pela monotonicidade de μ e pela aditividade de μ, para todo $N \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\mu(E) \geq \sum_{n=1}^{N} \mu(E_n) .$$

Logo,

$$\mu(E) \geq \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \mu(E_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n)$$

e ii.) fica provado. ■

Veremos mais adiante que o lema acima se estende para o caso, mais geral, dos semianéis.

Definição 65 (σ-subaditividade) *Dizemos que o conteúdo $\mu : \mathcal{H} \to [0, \infty]$, onde $\mathcal{H}$ é um semianel sobre M, é "σ-subaditivo" se, para toda sequência $E_n \in \mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}$, (não necessariamente disjunta) e $E \in \mathcal{H}$ tais, que $E \subseteq \sup_{n \in \mathbb{N}} E_n$, tem-se*

$$\mu(E) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n) .$$

Temos a seguinte caracterização equivalente de pré-medidas em anéis, com respeito à σ-subaditividade:

Corolário 66 *Seja $\mathcal{R}$ um anel sobre M e $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ um conteúdo. As seguintes condições são equivalentes:*

i.) μ é uma pré-medida.

ii.) μ é σ-subaditivo.

iii.) Para toda sequência disjunta $E_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$, tal, que $\sup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{R}$, vale

$$\mu\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n) .$$

Demonstração:

1. Primeiro mostraremos que toda pré-medida $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ em um anel $\mathcal{R}$ é σ-subaditiva: Seja $E_n \in \mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência arbitrária e $E \in \mathcal{H}$ tais, que $E \subseteq \sup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Então

   $$E = E \cap \sup_{n \in \mathbb{N}} E_n = (E \cap E_1) \cup \sup_{n \in \mathbb{N}} [(E \cap E_{n+1}) \backslash (E_1 \cup \cdots \cup E_n)]$$

   e

   $$\sup_{n \in \mathbb{N}} [(E \cap E_{n+1}) \backslash (E_1 \cup \cdots \cup E_n)] = E \cap \left(\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \backslash E_1\right) = E \backslash E_1 \in \mathcal{R} .$$

   Pela σ-aditividade de μ e sua monotonicidade, tem-se

   $$\mu(E) = \mu(E \cap E_1) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu((E \cap E_{n+1}) \backslash (E_1 \cup \cdots \cup E_n)) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n) .$$

   Assim, i.) implica ii.).

2. Obviamente, ii.) implica iii.).

3. Suponha agora que o conteúdo μ satisfaça à condição iii.) e seja $E_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência arbitrária disjunta tal, que $\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{R}$. Como $\mathcal{R}$ é anel, pelo lema acima vale

$$\mu\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) \ .$$

Pela condição iii.), vale também a desigualdade oposta e, portanto, neste caso, tem-se

$$\mu\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) \ ,$$

isto é, o conteúdo μ é σ-aditivo. Logo, iii) implica i.).

■

Mais adiante mostraremos que a σ-subaditividade e a σ-aditividade são propriedades equivalentes de conteúdos não somente em anéis, mas também no caso mais geral dos semianéis.

Exercício 67 *Seja um $\mathcal{H}$ semianel e $\mu : \mathcal{H} \rightarrow [0,\infty]$ um conteúdo. Sejam $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{H}$ e $\tilde{E}_1, \ldots, \tilde{E}_{\tilde{n}} \in \mathcal{H}$, $n, \tilde{n} \in \mathbb{N}$, duas sequências finitas disjuntas tais, que*

$$E_1 \cup \cdots \cup E_n = \tilde{E}_1 \cup \cdots \cup \tilde{E}_{\tilde{n}} \ .$$

Mostre que

$$\mu(E_1) + \cdots + \mu(E_n) = \mu(\tilde{E}_1) + \cdots + \mu(\tilde{E}_{\tilde{n}}) \ .$$

Lembrando que o anel $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ gerado por um semianel $\mathcal{H}$ é a família das uniões finitas disjuntas de elementos de $\mathcal{H}$, o exercício acima implica o seguinte:

Proposição 68 (extensão de conteúdos - I) *Seja $\mathcal{H}$ um semianel e $\mu : \mathcal{H} \rightarrow [0,\infty]$ um conteúdo. Existe um conteúdo único $v : \mathcal{R}(\mathcal{H}) \rightarrow [0,\infty]$, cuja restrição a $\mathcal{H}$ coincide com μ (isto é, o conteúdo v estende μ de $\mathcal{H}$ para $\mathcal{R}(\mathcal{H})$).*

Note-se que se o conteúdo μ é finito no semianel $\mathcal{H}$, então sua extensão para o anel gerado por $\mathcal{H}$ também é um conteúdo finito.

Corolário 69 *Seja $\mathcal{H}$ um semianel sobre M e $\mu : \mathcal{H} \rightarrow [0,\infty]$ um conteúdo.*

i.) Subaditividade de μ. *Seja uma sequência finita $E_1, \ldots, E_N \in \mathcal{H}$ arbitrária e $E \in \mathcal{H}$ tais, que $E \subseteq E_1 \cup \cdots \cup E_N$. Então vale*

$$\mu(E) \leq \mu(E_1) + \cdots + \mu(E_N) \ .$$

ii.) σ-superaditividade disjunta de μ. *Seja uma sequência $E_n \in \mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}$, disjunta arbitrária e $E \in \mathcal{H}$ tais, que $\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n \subseteq E$. Então vale*

$$\mu(E) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) \ .$$

Demonstração: Denote-se por v o conteúdo único em $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ que estende μ. Seja uma sequência qualquer de elementos disjuntos E_n, $n \in \mathbb{N}$, do semianel $\mathcal{H}$ e $E \in \mathcal{H}$ tais, que $\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n \subseteq E$. Em particular, $E_n \in \mathcal{R}(\mathcal{H})$, $n \in \mathbb{N}$, e $E \in \mathcal{R}(\mathcal{H})$. Portanto, como mostrado acima para conteúdos em anéis:

$$v\,(E) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} v(E_n)\ .$$

Como v é extensão de μ, concluímos que:

$$\mu\,(E) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)\ .$$

Com um argumento semelhante se demonstra a subaditividade de conteúdos em semianéis a partir desta propriedade (já demonstrada acima) para anéis. ■

Se a extensão de um conteúdo em um semianel para o anel gerado correspondente é uma pré-medida então, obviamente, já o conteúdo no semianel é necessariamente uma pré-medida. A recíproca desta afirmação também é verdadeira:

Proposição 70 (extensão de conteúdos - II) *Seja $\mu : \mathcal{H} \to [0,\infty]$ um conteúdo num semianel $\mathcal{H}$ sobre M e seja $v : \mathcal{R}(\mathcal{H}) \to [0,\infty]$ o único conteúdo no anel gerado por $\mathcal{H}$ que estende μ. Então μ é uma pré-medida se, e somente se, v o for.*

Demonstração:

1. Suponha que $\mu : \mathcal{H} \to [0,\infty]$ seja uma pré-medida. Para provar que v é também pré-medida, temos que mostrar que v é σ-aditivo. Seja então E_n, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência disjunta em $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ tal, que $\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{R}(\mathcal{H})$. Então existe uma sequência finita disjunta $\tilde{E}_1, \ldots, \tilde{E}_N \in \mathcal{H}$ tal, que
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \tilde{E}_1 \cup \cdots \cup \tilde{E}_N\ .$$
De modo análogo, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe uma sequência finita disjunta $\tilde{E}_1^{(n)}, \ldots, \tilde{E}_{N_n}^{(n)} \in \mathcal{H}$ tal, que
$$E_n = \tilde{E}_1^{(n)} \cup \cdots \cup \tilde{E}_{N_n}^{(n)}\ .$$

2. Assim, para todo $k = 1, \ldots, N$, tem-se
$$\begin{aligned} \tilde{E}_k &= \tilde{E}_k \cap \cup\{E_n \ :\ n \in \mathbb{N}\} \\ &= \cup\{\tilde{E}_k \cap E_n \ :\ n \in \mathbb{N}\} \\ &= \cup\{\tilde{E}_k \cap \tilde{E}_{k_n}^{(n)} \ :\ n \in \mathbb{N},\ k_n = 1, \ldots, N_n\} \end{aligned}$$
Note-se que a última união acima é uma união disjunta enumerável de elementos de $\mathcal{H}$, pois o conjunto
$$\{(n, k_n)\ :\ n \in \mathbb{N}, k_n = 1, \ldots, N_n\}$$
é enumerável. Portanto, pela σ-aditividade de μ, para todo $k = 1, \ldots, N$, tem-se
$$\mu(\tilde{E}_k) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k_n=1}^{N_n} \mu(\tilde{E}_k \cap \tilde{E}_{k_n}^{(n)})\ .$$

3. Logo, observando que

$$E_n = E_n \cap \sup_{k\in\mathbb{N}} E_k = \cup\{\tilde{E}^{(n)}_{k_n} \cap \tilde{E}_k \ : \ k = 1,\ldots,N,\ k_n = 1,\ldots,N_n\}\ ,$$

tem-se

$$\begin{aligned} v\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) &= \sum_{k=1}^{N} \mu(\tilde{E}_k) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k_n=1}^{N_n} \mu(\tilde{E}_k \cap \tilde{E}^{(n)}_{k_n}) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\left[\sum_{k=1}^{N}\sum_{k_n=1}^{N_n} \mu(\tilde{E}_k \cap \tilde{E}^{(n)}_{k_n})\right] = \sum_{n\in\mathbb{N}} v(E_n)\ . \end{aligned}$$

Note-se que podemos inverter a ordem das somas infinitas acima, pois somente uma delas é infinita. ■

O seguinte corolário é consequência da última proposição, da caracterização da σ-aditividade de conteúdos em anéis através da σ-subaditividade dos mesmos, assim como da σ-superaditividade disjunta de conteúdos em semianéis, já demonstrada acima:

Corolário 71 *Seja $\mu : \mathcal{H} \to [0,\infty]$ um conteúdo no semianel $\mathcal{H}$. As seguintes condições são equivalentes:*

i.) μ é uma pré-medida.

ii.) μ é σ-subaditivo.

iii.) Para toda sequência disjunta $E_n \in \mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}$, tal, que $\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{H}$, vale

$$\mu\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)\ .$$

A seguir discutiremos a caracterização da σ-aditividade de conteúdos através da propriedade de σ-normalidade.

Definição 72 (σ-normalidade de conteúdos) *Seja $\mu : \mathcal{H} \to [0,\infty]$ um conteúdo, onde $\mathcal{H}$ é um semianel arbitrário. Dizemos que μ é "σ-normal", se, para toda sequência monótona* crescente *$E_n \in \mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}$, tal, que*

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{H},$$

tem-se

$$\mu\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(E_n\right)\ .$$

Note-se que para toda sequência crescente $E_n \in \mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}$, a sequência numérica $\mu(E_n)$, $n \in \mathbb{N}$, é também crescente, pela monotonicidade de conteúdos. Em particular, o limite de $\mu(E_n)$ quando $n \to \infty$ existe, neste caso. Também da monotonicidade de μ segue que

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(E_n\right) \leq \mu\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right)\ .$$

Portanto, a σ-normalidade de um conteúdo pode ser vista como propriedade de "continuidade à esquerda". Em anéis, esta propriedade é equivalente ao ser pré-medida:

Lema 73 *Seja $\mathcal{R}$ um anel e $\mu : \mathcal{R} \to [0,\infty]$ um conteúdo. μ é pré-medida se, e somente se, for σ-normal.*

Demonstração:

1. Seja $\mathcal{R}$ um anel e $\mu : \mathcal{R} \to [0,\infty]$ uma pré-medida. Então, para toda sequência monótona *crescente* $E_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$, tal, que $\lim_{n\to\infty} E_n \in \mathcal{R}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\mu\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) &= \mu\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \mu\left(E_1 \cup \left[\sup_{n\in\mathbb{N}}(E_{n+1}\backslash E_n)\right]\right) \\
&= \mu(E_1) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_{n+1}\backslash E_n) = \lim_{N\to\infty}\left[\mu(E_1) + \sum_{n=1}^{N} \mu(E_{n+1}\backslash E_n)\right] \\
&= \lim_{N\to\infty} \mu(E_{N+1}) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)\ .
\end{aligned}$$

Assim, toda pré-medida em um anel é σ-normal.

2. Seja agora $\mu : \mathcal{R} \to [0,\infty]$ um conteúdo σ-normal. Então, para toda sequência disjunta $E_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$, tal, que $\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{R}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\mu\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) &= \mu\left(\sup_{n\in\mathbb{N}}[E_1 \cup \cdots \cup E_n]\right) = \mu\left(\lim_{n\to\infty}[E_1 \cup \cdots \cup E_n]\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu\left(E_1 \cup \cdots \cup E_n\right) = \lim_{n\to\infty}\left[\mu\left(E_1\right) + \cdots + \mu\left(E_n\right)\right] \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(E_n\right)\ .
\end{aligned}$$

Deste modo, todo conteúdo σ-normal em $\mathcal{R}$ é uma pré-medida.

■

Aplicando o lema acima ao anel gerado por um semianel, obtém-se:

Corolário 74 *Seja $\mathcal{H}$ um semianel e $\mu : \mathcal{H} \to [0,\infty]$ uma pré-medida. Então μ é conteúdo σ-normal.*

Seja $E_n \in \mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência *decrescente* em um semianel $\mathcal{H}$ tal, que $\inf_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{H}$, e seja $\mu : \mathcal{H} \to [0,\infty]$ uma pré-medida. Note-se que, neste caso, não necessariamente vale a propriedade (similar à σ-normalidade de μ) de que

$$\mu\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(E_n\right)\ .$$

Porém, como veremos a seguir, no caso especial de conteúdos *finitos*, a propriedade acima e a σ-normalidade são propriedades equivalentes:

Proposição 75 *Seja $\mathcal{R}$ um anel e $\mu : \mathcal{R} \to [0,\infty]$ um conteúdo finito. As condições seguintes são equivalentes:*

i.) μ *é uma pré-medida.*

ii.) μ *é σ-normal.*

iii.) Para toda sequência decrescente $E_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$*, tal, que*

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{R} \ ,$$

tem-se:

$$\mu\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(E_n\right) \ .$$

iv.) Para toda sequência decrescente $E_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$*, tal, que* $\inf_{n\in\mathbb{N}} E_n = \emptyset$*, tem-se:*

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(E_n\right) = 0 \ .$$

Demonstração:

1. Note-se que a equivalência de i.) e ii.) corresponde ao último lema.

2. Seja $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ um conteúdo finito σ-normal e $E_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência monótona decrescente no anel $\mathcal{R}$ tal, que $E_\infty \doteq \lim_{n\to\infty} E_n \in \mathcal{R}$. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, vale

$$\mu(E_\infty) \leq \mu(E_n) \leq \mu(E_1) < \infty \ .$$

   Observe-se que a sequência $E_1 \backslash E_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$, é monótona crescente e vale

$$\lim_{n\to\infty} E_1 \backslash E_n = E_1 \backslash E_\infty \in \mathcal{R} \ .$$

   Logo, pela hipótese, tem-se que

$$\begin{aligned} \mu(E_1) &= \lim_{n\to\infty} [\mu(E_1 \backslash E_n) + \mu(E_n)] = \lim_{n\to\infty} \mu(E_1 \backslash E_n) + \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) \\ &= \mu(E_1 \backslash E_\infty) + \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu(E_1 \backslash E_\infty) + \mu(E_\infty) \ . \end{aligned}$$

   Como $\mu(E_1 \backslash E_\infty)$ é finito, a última igualdade implica que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu(E_\infty) \ .$$

   Isto é, ii) implica iii). Note-se que a identidade

$$\mu(E_1) = \mu(E_1 \backslash E_\infty) + \mu(E_\infty) \ ,$$

   da qual segue a última igualdade, é uma simples consequência da aditividade do conteúdo μ, já que $E_\infty \subseteq E_1$.

3. iii) implica trivialmente iv).

4. Suponha, finalmente, que a propriedade iv) valha para o conteúdo finito $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$. Seja uma sequência monótona *crescente* qualquer $E_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$, com $E_\infty \doteq \lim_{n\to\infty} E_n \in \mathcal{R}$. Então $E_\infty \backslash E_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$, é sequência decrescente com $\lim_{n\to\infty} E_\infty \backslash E_n = \emptyset$. Assim, pela hipótese sobre μ, tem-se que

$$\begin{aligned} \mu(E_\infty) &= \lim_{n\to\infty} [\mu(E_\infty \backslash E_n) + \mu(E_n)] \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) \ . \end{aligned}$$

   Isto mostra que μ é σ-normal e, portanto, iv) implica ii). ■

Como veremos mais adiante, a parte iv.) da última proposição é um dos axiomas de Kolmogorov para a teoria de probabilidades clássica.

Aplicando a proposição acima a anéis gerados por semianéis obtém-se:

Corolário 76 *Seja $\mathcal{H}$ um semianel e $\mu : \mathcal{H} \to [0, \infty]$ uma pré-medida finita. Para toda sequência monótona $E_n \in \mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}$, tal, que $\lim_{n\to\infty} E_n \in \mathcal{H}$, tem-se:*

$$\mu\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(E_n\right) \ .$$

1.7.2 Conteúdos e pré-medidas em $\mathcal{I}^1_{\mathbb{R}}$

Neste parágrafo estudaremos os conteúdos e pré-medidas finitos no semianel $\mathcal{I}^1_{\mathbb{R}}$. Veremos, em particular, que estes são naturalmente associados a funções crescentes $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Definição 77 (conteúdo associado à uma função crescente) *Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona crescente. Definimos $\mu_F : \mathcal{I}^1_{\mathbb{R}} \to [0, \infty)$ por $\mu_F(\emptyset) \doteq 0$ e, para $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,*

$$\mu_F((a, b]) \doteq F(b) - F(a) .$$

Exercício 78

i.) Para uma função monótona crescente qualquer, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mostre que μ_F é um conteúdo finito em $\mathcal{I}^1_{\mathbb{R}}$.

ii.) Sejam $F_1, F_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções monótonas crescentes tais, que $\mu_{F_1} = \mu_{F_2}$. Mostre que existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal, que, para todo $x \in \mathbb{R}$, vale

$$F_2(x) = F_1(x) + c .$$

Diremos que duas funções monótonas crescentes $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são equivalentes se estas forem iguais até uma constante. Neste contexto, $[F]$ denotará a classe de equivalência da função monótona crescente $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. O exercício acima mostra que as classes de equivalência de funções monótonas crescentes estão associadas de modo unívoco a conteúdos finitos do semianel $\mathcal{I}^1_{\mathbb{R}}$. A recíproca também é verdadeira:

Definição 79 (função associada a um conteúdo finito) *Para $\mu : \mathcal{I}^1_{\mathbb{R}} \to [0, \infty)$ um conteúdo* finito *arbitrátio defina a função $F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por*

$$F_\mu(x) \doteq \begin{cases} \mu((0, x]) & \textit{se} \quad x > 0 \\ 0 & \textit{se} \quad x = 0 \\ -\mu((x, 0]) & \textit{se} \quad x < 0 \end{cases} .$$

Exercício 80 *Mostre que, para todo conteúdo finito $\mu : \mathcal{I}^1_{\mathbb{R}} \to [0, \infty)$, $F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função monótona crescente tal, que $\mu_{F_\mu} = \mu$.*

Os dois últimos exercícios mostram que os conteúdos finitos em $\mathcal{I}^1_{\mathbb{R}}$ estão associados, um a um, às classes de equivalência de funções monótonas crescentes $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. A seguir identificaremos quais destas funções definem pré-medidas.

Definição 81 (continuidade à direita) *Dizemos que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é "contínua à direita em x", $x \in \mathbb{R}$, se, para toda sequência* decrescente *$x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, tal, que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, tem-se*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) .$$

Dizemos que f "contínua à direita" se esta for contínua à direita em todo $x \in \mathbb{R}$.

Seja $\mu : \mathcal{I}^1_{\mathbb{R}} \to [0, \infty)$ uma pré-medida *finita* e $x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência decrescente arbitrária tal, que $\lim_{n\to\infty} x_n = x < 0$. Então, pela σ-normalidade de μ, tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} F_\mu(x_n) &= -\lim_{n\to\infty} \mu((x_n, 0]) \\ &= -\mu((x, 0]) = F_\mu(x) . \end{aligned}$$

De modo análogo, se $x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência decrescente e $\lim_{n\to\infty} x_n = x \geq 0$, pelo Corolário 76, tem-se, para $x > 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} F_\mu(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \mu((0, x_n]) \\ &= \mu((0, x]) = F_\mu(x) \end{aligned}$$

e, para $x = 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} F_\mu(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \mu((0, x_n]) \\ &= \mu(\emptyset) = 0 = F_\mu(x) \ . \end{aligned}$$

Assim, para toda pré-medida finita $\mu : \mathcal{I}^1_\mathbb{R} \to [0, \infty)$, $F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua à direita. Obviamente, toda função monótona crescente equivalente a uma função monótona crescente contínua à direita também é, ela mesma, contínua à direita. Deste modo, toda pré-medida finita no semianel $\mathcal{I}^1_\mathbb{R}$ está associada, de modo único, a uma classe de equivalência de funções monótonas crescentes e contínuas à direita. Mostraremos a seguir que a recíproca também é verdadeira:

Proposição 82 *O mapa $\mu \mapsto [F_\mu]$ define uma bijeção entre conteúdos finitos μ em $\mathcal{I}^1_\mathbb{R}$ e classes de equivalência de funções monótonas crescentes $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. As pré-medidas finitas em $\mathcal{I}^1_\mathbb{R}$ correspondem exatamente às classes de equivalência de funções (monótonas crescentes) contínuas à direita.*

Demonstração:

1. Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótona crescente e contínua à direita. Sabemos que esta define, de modo único, um conteúdo $\mu_F : \mathcal{I}^1_\mathbb{R} \to [0, \infty)$ (por ser monótona crescente). Recorde-se que para mostrar a σ-aditividade de um conteúdo $\mu_F : \mathcal{I}^1_\mathbb{R} \to [0, \infty)$ basta provar que, para toda sequência disjunta $E_n = (a_n, b_n] \in \mathcal{I}^1_\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, tal, que $\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n = (a, b] \in \mathcal{I}^1_\mathbb{R}$, vale

$$\mu_F(\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_F(E_n) \ .$$

2. Fixe $\varepsilon > 0$ e escolha $\tilde{a} > a$ tal, que

$$F(\tilde{a}) - F(a) \leq \varepsilon \ .$$

Isto é possível, pois F é contínua à direita. De modo similar, para todo $n \in \mathbb{N}$, escolhemos um $\tilde{b}_n > b_n$ tal, que

$$F(\tilde{b}_n) - F(b_n) \leq \varepsilon 2^{-n} \ .$$

Por construção, $(a_n, \tilde{b}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, é um recobrimento *aberto* do compacto $[\tilde{a}, b] \subseteq \mathbb{R}$. Portanto, existe um subconjunto *finito* $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{N}$ tal, que

$$(\tilde{a}, b] \subseteq [\tilde{a}, b] \subseteq \cup\{(a_n, \tilde{b}_n) \ : \ n \in \mathbb{I}\} \subseteq \cup\{(a_n, \tilde{b}_n] \ : \ n \in \mathbb{I}\} \ .$$

3. Logo, pela monotonicidade e subaditividade da extensão única de μ_F para o anel $\mathcal{R}(\mathcal{I}^1_\mathbb{R})$, tem-se que

$$\mu_F((\tilde{a}, b]) \leq \sum_{n\in\mathbb{I}} \mu_F((a_n, \tilde{b}_n]) \ .$$

Portanto, como

$$\mu_F((a, b]) = \mu_F((a, \tilde{a}]) + \mu_F((\tilde{a}, b]) = F(\tilde{a}) - F(a) + \mu_F((\tilde{a}, b]) \ ,$$

tem-se:

$$\begin{aligned}\mu_F((a,b])-\varepsilon &\leq \sum_{n\in\mathbb{I}}\mu_F((a_n,\tilde{b}_n])\\ &= \sum_{n\in\mathbb{I}}\Big(\mu_F((a_n,b_n])+\mu_F((b_n,\tilde{b}_n])\Big)\\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{I}}\left(\mu_F((a_n,b_n])+\varepsilon 2^{-n}\right)\leq \varepsilon+\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu_F((a_n,b_n])\ .\end{aligned}$$

Como a escolha de $\varepsilon > 0$ é arbitrária, isto implica que

$$\mu_F((a,b]) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}}\mu_F((a_n,b_n])\ .$$

■

Definição 83 (pré-medidas de Stieltjes) *Seja $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função monótona crescente e contínua à direita. A pré-medida μ_F em $\mathcal{I}^1_{\mathbb{R}}$ é chamada "pré-medida de Stieltjes" associada a F. No caso especial $F(x)=x$ chamamos μ_F de "pré-medida de Lebesgue".*

1.7.3 Componentes "puro ponto" e "contínua" de pré-medidas em $\mathcal{I}^1_{\mathbb{R}}$

Observe-se que funções $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ monótonas crescentes sempre possuem limites à esquerda: Para um dado $x\in\mathbb{R}$, seja uma sequência $x_n\in(-\infty,x)$, $n\in\mathbb{N}$, crescente qualquer tal, que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x\ .$$

Então a sequência $F(x_n)\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, também é crescente e $F(x_n)\leq F(x)\in\mathbb{R}$. Portanto, $F(x_n)$, $n\in\mathbb{N}$, possui limite em $\mathbb{R}$ e vale

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n)\leq F(x)\ .$$

Exercício 84 *Mostre que o limite acima não depende da escolha da sequência crescente $x_n\to x$.*

Devido ao resultado acima, introduzimos, para toda função *monótona crescente* $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e todo $x\in\mathbb{R}$, a notação

$$F(x^-)\doteq\lim_{n\to\infty}F(x_n)\ ,$$

onde $x_n\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, é qualquer sequência crescente tal, que $\lim_{n\to\infty}x_n=x$. $F(x^-)$ é chamado o "limite à esquerda" da função F no ponto x. De modo análogo, definimos "limites à direita" de funções monótonas crescentes: Para todo $x\in\mathbb{R}$,

$$F(x^+)\doteq\lim_{n\to\infty}F(x_n)\geq F(x)\ ,$$

onde $x_n\in(x,\infty)$, $n\in\mathbb{N}$, é qualquer sequência *decrescente* tal, que $\lim_{n\to\infty}x_n=x$. Obviamente, para todo $x\in\mathbb{R}$, vale que

$$F(x^-)\leq F(x)\leq F(x^+)\ .$$

Observe-se que a função monótona crescente F é contínua à direita em $x\in\mathbb{R}$ se, e somente se,

$$F(x^+)=F(x)$$

e que F é contínua em x se, e somente se,

$$F(x^-)=F(x)=F(x^+)\ .$$

Em particular, se F é contínua à direita, esta é contínua em $x\in\mathbb{R}$ se, e somente se,

$$F(x^-)=F(x)\ .$$

Definição 85 (pontos de salto) *Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona crescente contínua à direita. Para todo $x \in \mathbb{R}$, defina*

$$s_F(x) \doteq F(x) - F(x^-) \geq 0 \ .$$

Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é um "ponto de salto" da função F se $s_F(x) > 0$. Denotar-se-á por $S_F \subseteq \mathbb{R}$ o conjunto de todos os ponto de salto de F.

Exercício 86 *Mostre que $S_F \subseteq \mathbb{R}$ é um subconjunto enumerável e que, para todo $L \in (0, \infty)$,*

$$\sum_{x \in S_F \cap [-L,L]} s_F(x) < \infty \ .$$

Sugestão: Mostre primeiro que, para todo $N \subseteq \mathbb{N}$, $S_F \cap [-N, N] \subseteq \mathbb{R}$ é enumerável e observe que a união enumerável de conjuntos enumeráveis também é um conjunto enumerável.

É importante notar aqui que somas infinitas cujos termos são *positivos* independem da ordem de somação destes. É um bom exercício provar este fato, se já não for conhecido. Com esta observação, se $S_F \cap [-L, L]$ contiver um número infinito de elementos, $\sum_{x \in S_F \cap [-L,L]} s_F(x)$ denota uma soma usual $\sum\limits_{n=1}^{\infty} s_F(x_n)$ para *qualquer* enumeração x_n, $n \in \mathbb{N}$, dos elementos de $S_F \cap [-L, L]$.

Definição 87 (funções salto) *Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona crescente. Dizemos que F é uma "função salto" se existem $\alpha \in \mathbb{R}$, um subconjunto enumerável $S \subseteq \mathbb{R}$ e uma função $s : S \to (0, \infty)$ tais, que:*

i.) Para todo $L \in (0, \infty)$,

$$\sum_{x \in S \cap [-L,L]} s(x) < \infty \ .$$

ii.) Para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \begin{cases} \alpha + \sum_{\tilde{x} \in S \cap (0,x]} s(\tilde{x}) & \text{se} \quad x > 0 \\ \alpha & \text{se} \quad x = 0 \\ \alpha - \sum_{\tilde{x} \in S \cap (x,0]} s(\tilde{x}) & \text{se} \quad x < 0 \end{cases} \ .$$

Lema 88 *Funções salto são sempre contínuas à direita.*

Demonstração: Seja F uma função salto e sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, $S \subseteq \mathbb{R}$, $s : S \to (0, \infty)$ como na definição acima.

1. Tome-se um $x > 0$ qualquer. Como F é monótona crescente, para provar que F é contínua à direita em x basta demmantrar que

$$F(x^+) = \lim_{k \to \infty} F(x + k^{-1}) \leq F(x) \ ,$$

ou seja,

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{\tilde{x} \in S \cap (0, x+k^{-1}]} s(\tilde{x}) \leq \sum_{\tilde{x} \in S \cap (0,x]} s(\tilde{x}) \ .$$

Se S for um subconjunto finito, tal fato é evidentemente.

2. Seja então S infinito e $x_n \in S$, $n \in \mathbb{N}$, uma enumeração qualquer deste conjunto (infinito). Então temos que mostrar que

$$\begin{aligned}\sum_{\tilde{x}\in S\cap(0,x]} s(\tilde{x}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{(0,x]} s(x_n) \geq \lim_{k\to\infty} \sum_{\tilde{x}\in S\cap(0,x+k^{-1}])} s(\tilde{x}) \\ &= \lim_{k\to\infty}\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \chi_{(0,x+k^{-1}]} s(x_n)\ .\end{aligned}$$

Recorde-se que $\chi_{(0,z]}$, $z = x, x+k^{-1}$, é a função característica do intervalo $(0,z]$, isto é,

$$\chi_{(0,z]}(x_n) \doteq \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x_n \in (0,z] \\ 0 & \text{se} \quad x_n \notin (0,z] \end{cases} .$$

3. Por outro lado, como, para todo $L \in (0,\infty)$, vale

$$\sum_{\tilde{x}\in S\cap[-L,L]} s(\tilde{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[-L,L]} s(x_n) < \infty\ ,$$

para todo $L \in (0,\infty)$ e $\varepsilon > 0$, existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal, que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[-L,L]} s(x_n) - \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} \chi_{[-L,L]} s(x_n) = \sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} \chi_{[-L,L]} s(x_n) \leq \varepsilon\ .$$

Tomando-se $L \geq x+1$, tem-se $\chi_{[-L,L]} s \geq \chi_{(0,x+k^{-1}]} s$ e, portanto, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{(0,x+k^{-1}]} s(x_n) - \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} \chi_{(0,x+k^{-1}]} s(x_n) = \sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} \chi_{(0,x+k^{-1}]} s(x_n) \leq \sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} \chi_{[-L,L]} s(x_n) \leq \varepsilon\ .$$

4. Logo, para todo $\varepsilon > 0$, tem-se

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \chi_{(0,x+k^{-1}]} s(x_n) &\leq \varepsilon + \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} \chi_{(0,x+k^{-1}]} s(x_n) \\ &= \varepsilon + \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} \lim_{k\to\infty} \chi_{(0,x+k^{-1}]} s(x_n) \\ &= \varepsilon + \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} \chi_{(0,x]} s(x_n) \leq \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{(0,x]} s(x_n)\ ,\end{aligned}$$

e, portanto, vale

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{\tilde{x}\in S\cap(0,x+k^{-1}]} s(\tilde{x}) \leq \sum_{\tilde{x}\in S\cap(0,x]} s(\tilde{x})\ .$$

Logo, F é contínua à direita em todo $x > 0$.

5. Prova-se que F é contínua à direita em todo $x \leq 0$ da mesma maneira.

■

Pelo último lema, funções salto estão associadas a pré-medidas finitas em $\mathcal{I}^1_{\mathbb{R}}$. Tais pré-medidas são chamadas "pré-medidas puramente pontuais". A razão para tal denominação é o fato destas estarem totalmente concentradas em pontos (não necessariamente isolados):

Lema 89 *Seja F uma função salto e sejam $S \subseteq \mathbb{R}$, $s : S \to (0, \infty)$ como na definição acima. Então, para todo $(a, b] \in \mathcal{I}^1_{\mathbb{R}}$, tem-se que*

$$\mu_F((a, b]) = \sum_{x \in S \cap (a,b]} s(x) \; .$$

Dada uma função monótona crescente contínua à direita $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, é sempre possível decompô-la em uma parte contínua e uma função salto, ambas monótonas crescentes:

Definição 90 (componentes puramente pontuais e contínuas de funções) *Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona crescente contínua à direita. Definimos as funções contínuas à direita $F_{pp}, F_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por*

$$F_{pp}(x) \doteq \begin{cases} \sum_{\tilde{x} \in S_F \cap (0,x]} s_F(\tilde{x}) & se \quad x > 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \\ -\sum_{\tilde{x} \in S_F \cap (x,0]} s_F(\tilde{x}) & se \quad x < 0 \end{cases}$$

e $F_c \doteq F - F_{pp}$. A função salto F_{pp} é chamada a componente "puramente pontual" (ou "puro ponto") de F e F_c sua componente "contínua".

Mostraremos a seguir que F_c, a componente contínua de F, é de fato uma função contínua e também que é monótona crescente.

Exercício 91 *Seja F uma função salto e $\alpha \in \mathbb{R}$, $S \subseteq \mathbb{R}$, $s : S \to (0, \infty)$ como na definição correspondente acima. Mostre que $S_F = S$ e $s_F = s$.*

Sugestão: Com um argumento análogo ao usado na demonstração do último lema, prove i.) que, para todo $x \in \mathbb{R} \backslash S$, vale $F(x) = F(x^-)$ e ii) que, para todo $x \in S$, $F(x) = F(x^-) + s(x)$.

Exercício 92 *Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona crescente contínua à direita. Mostre que, para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, vale*

$$F(b) - F(a) \geq F_{pp}(b) - F_{pp}(a) \; .$$

Pelo último exercício tem-se, em particular, que, para toda $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua à direita, $F_c = F - F_{pp}$ é uma função monótona crescente contínua à direita. Por construção, F_{pp} é uma função salto, em particular é uma função monótona crescente contínua à direita. Pelo penúltimo exercício, tem-se $S_{F_{pp}} = S_F$ e, para todo $x \in S_F$, vale $s_{F_{pp}}(x) = s_F(x)$. Em particular, F_c é uma função *contínua*, já que $S_{F_c} = \emptyset$. Com estas observações concluímos:

Proposição 93 *Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona crescente contínua à direita. Então existem duas funções monótonas crescentes $F_c, F_{pp} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tais, que*

$$F = F_c + F_{pp} \; ,$$

F_c é contínua e F_{pp} é função salto. Esta decomposição é única até constantes. Em particular, as classes de equivalência $[F_c]$ e $[F_{pp}]$ são unicamente determinadas pela classe de equivalência $[F]$ de F.

O resultado acima motiva a seguinte definição:

Definição 94 (componentes contínuas e puramente pontuais de pré-medidas) *Seja μ uma pré-medida em $\mathcal{I}^1_{\mathbb{R}}$ e seja*

$$\mu = \mu_c + \mu_{pp}$$

a decomposição única de μ em pré-medidas μ_c, μ_{pp} tais, que

$$F_\mu = F_{\mu_c} + F_{\mu_{pp}}$$

com F_{μ_c} sendo uma função contínua e $F_{\mu_{pp}}$ uma função salto. μ_c é chamada a "componente contínua" de μ e μ_{pp} a "componente puramente pontual" (ou "puro ponto") de μ.

1.7.4 Conteúdos e pré-medidas em $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}^d$, $d > 1$

A seguir discutiremos brevemente a generalização para o caso de dimensões superiores a um, isto é, para o caso dos semianéis $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}^d$, $d > 1$, da abordagem às pré-medidas e conteúdos através de funções monótonas.

Para toda função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, defina, para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, a quantidade $\Delta_{(a,b)}F \in \mathbb{R}$ por:

$$\begin{aligned}\Delta_{(a,b)}F &\doteq F(b) - F(a) \\ &= \sum_{k\in\{0,1\}} (-1)^k F(b - (b-a)k) \ .\end{aligned}$$

Note-se que F é monótona crescente se, e somente se, para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, vale

$$\Delta_{(a,b)}F \geq 0$$

Observe-se também que duas funções monótonas crescentes F_1 e F_2 são equivalentes se, e somente se, para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, vale

$$\Delta_{(a,b)}F_1 = \Delta_{(a,b)}F_2 \ .$$

Esta abordagem é naturalmente generalizada para dimensões superiores a 1: Sejam $a, b \in \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Para toda função $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, definimos a variação $\Delta_{(a,b)}F \in \mathbb{R}$ por

$$\Delta_{(a,b)}F \doteq \sum_{k_1,\ldots,k_d\in\{0,1\}} (-1)^{k_1}\cdots(-1)^{k_d} F(b_1 - (b_1 - a_1)k_1, \ldots, b_d - (b_d - a_d)k_d) \ .$$

Observe-se que no caso especial

$$F(x_1, \ldots, x_d) = F_1(x_1)\cdots F_d(x_d)$$

tem-se:

$$\Delta_{(a,b)}F = (F_1(b_1) - F_1(a_1))\cdots(F_d(b_d) - F_d(a_d)) \ .$$

Dizemos que "a é menor ou igual a b" (notação: $a \leq b$), $a, b \in \mathbb{R}^d$, se $b_k \geq a_k$ para todo $k = 1, \ldots, d$. A função $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ é dita ser "contínua à direita" se, para toda sequência $x^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, tal, que $x^{(n+1)} \leq x^{(n)}$ e $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = x \in \mathbb{R}^d$, tem-se que

$$\lim_{n\to\infty} F(x^{(n)}) = F(x) \ .$$

Com estas últimas definições e notações temos o seguinte resultado para conteúdos e pré-medidas em $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}^d$, $d \in \mathbb{N}$:

Proposição 95

i.) *Para toda função $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tal, que, para todo $a, b \in \mathbb{R}^d$, $a \leq b$, vale $\Delta_{(a,b)}F \geq 0$, o mapa $\mu_F : \mathcal{I}_{\mathbb{R}}^d \to [0, \infty)$ definido por*

$$\mu_F((a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d]) \doteq \Delta_{(a,b)}F \ ,$$

onde $a \doteq (a_1, \ldots a_d)$ e $b \doteq (b_1, \ldots b_d)$, é um conteúdo finito.

ii.) *Se $\mu_{F_1} = \mu_{F_2}$ então, para todo $a, b \in \mathbb{R}^d$, $a \leq b$, vale*

$$\Delta_{(a,b)}F_1 = \Delta_{(a,b)}F_2$$

Neste caso dizemos que F_1 e F_2 são equivalentes.

iii.) *Se a função F no item i.) for contínua à direita, então μ_F é uma pré-medida em $\mathcal{I}^d_{\mathbb{R}}$.*

iv.) *Seja μ um conteúdo em $\mathcal{I}^d_{\mathbb{R}}$ e defina a função $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ por:*

$$F_\mu(x_1, \ldots, x_d) \doteq$$
$$\left\{ \begin{array}{ccc} 1 & se & x_1 \geq 0 \\ -1 & se & x_1 < 0 \end{array} \right\} \cdots \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & se & x_d \geq 0 \\ -1 & se & x_d < 0 \end{array} \right\}$$
$$\cdot \mu \left(\left\{ \begin{array}{ccc} (0, x_1] & se & x_1 \geq 0 \\ (x_1, 0] & se & x_1 < 0 \end{array} \right\} \times \cdots \times \left\{ \begin{array}{ccc} (0, x_d] & se & x_d \geq 0 \\ (x_d, 0] & se & x_d < 0 \end{array} \right\} \right) .$$

Então $\mu_{F_\mu} = \mu$.

v.) *Se μ é uma pré-medida, então F_μ é contínua a direita.*

Observe-se que a função $F_L : (x_1, \ldots, x_d) \mapsto x_1 \cdots x_d$ é contínua e, portanto, contínua à direita. Além disto, para todo $a, b \in \mathbb{R}^d$, $a \leq b$, vale

$$\Delta_{(a,b)} F_L = (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_1) \geq 0 .$$

Definição 96 (pré-medidas de Lebesgue) *Para $d \in \mathbb{N}$, a pré-medida finita*

$$\lambda^{(d)} \doteq \mu_{F_L} : \mathcal{I}^d_{\mathbb{R}} \to [0, \infty)$$

é chamada "pré-medida de Lebesgue em d dimensões".

Observe-se que, para todo $a, b \in \mathbb{R}^d$, $a \leq b$, tem-se que

$$\lambda^{(d)}((a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d]) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) .$$

1.7.5 Transformações mensuráveis e invariâncias de medidas

Definição 97 (transformações mensuráveis) *Sejam $(M_1, \mathcal{E}_1)$ e $(M_2, \mathcal{E}_2)$ dois espaços mensuráveis (isto é, $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$ são σ-álgebras sobre M_1 e M_2, respectivamente). Dizemos que a função $f : M_1 \to M_2$ é "$\mathcal{E}_2$-$\mathcal{E}_1$-mensurável" se, para todo $E_2 \in \mathcal{E}_2$, $f^{-1}(E_2) \in \mathcal{E}_1$. No caso especial $(M_2, \mathcal{E}_2) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, $d \in \mathbb{N}$, diremos que $f : M_1 \to M_2$ é "$\mathcal{E}_1$-mensurável", se esta for $\mathcal{E}_2$-$\mathcal{E}_1$-mensurável. De modo análogo, diremos que $f : \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{R}^{d_2}$, $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$, é "mensurável" se esta for $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_2})$-$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_1})$-mensurável".*

Como discutido anteriormente, pré-imagens $f^{-1}(E_2) \subseteq \mathbb{R}^{d_1}$ de Borelianos $E_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_2})$ são Borelianos se $f : \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{R}^{d_2}$ for contínua. Portanto, tais funções contínuas são exemplos de transformações mensuráveis.

Seja $(M_1, \mathcal{E}_1, \mu_1)$ um espaço de medida, $(M_2, \mathcal{E}_2)$ um espaço mensurável e $f : M_1 \to M_2$ uma função $\mathcal{E}_2$-$\mathcal{E}_1$-mensurável. Defina a função $f_*(\mu_1) : \mathcal{E}_2 \to [0, \infty]$ por:

$$[f_*(\mu_1)](E_2) \doteq \mu_1(f^{-1}(E_2)) , \quad E_2 \in \mathcal{E}_2 .$$

Exercício 98 *Mostre que $f_*(\mu_1)$ é uma medida em $\mathcal{E}_2$.*

Exercício 99 *Seja $(M_0, \mathcal{E}_0, \mu_0)$ um espaço de medida, $(M_1, \mathcal{E}_1)$,..., $(M_N, \mathcal{E}_N)$, $N \in \mathbb{N}$, espaços mensuráveis, e sejam funções $\mathcal{E}_n$-$\mathcal{E}_{n-1}$-mensuráveis $f_n : M_{n-1} \to M_n$, $n = 1, \ldots, N$. Mostre que que a composição*

$$f_N \circ \cdots \circ f_1 : M_0 \to M_N$$

é $\mathcal{E}_N$-$\mathcal{E}_0$-mensurável e vale

$$(f_N \circ \cdots \circ f_1)_* = f_{N*} \circ \cdots \circ f_{1*} .$$

A medida $f_*(\mu_1)$ em $\mathcal{E}_2$ é chamada "densidade de f em M_2" ou de "pushforward" da medida μ_1 através da função (mensurável) f.

Definição 100 (medida invariante com relação a uma transformação mensurável) *Seja Seja $(M, \mathcal{E})$ é um espaço mensurável e $f : M \to M$ uma transformação $\mathcal{E}$-$\mathcal{E}$-mensurável. Se μ é uma medida em $\mathcal{E}$, dizemos que esta é "invariante" com relação à transformação f se $f_*(\mu) = \mu$.*

Pares $((M, \mathcal{E}), T)$ em que $(M, \mathcal{E})$ é um espaço mensurável e $T : M \to M$ uma transformação $\mathcal{E}$-$\mathcal{E}$-mensurável são chamados "sistemas dinâmicos". Em física matemática, M representa o conjunto de estados de um dado sistema físico e $T(p) \in M$ a evolução do estado $p \in M$ após transcorrida uma unidade temporal. Particularmente interessante e importante, tanto para a física matemática quanto para diversas outras disciplinas, é o seguinte tipo de sistema dinâmico munido de medida invariante:

Definição 101 (sistemas ergódicos) *Seja $((M, \mathcal{E}), T)$ um sistema dinâmico e μ uma medida invariante com relação a T. Dizemos que μ é uma "medida ergódica" com relação à transformação T, ou que T é uma "transformação ergódica" com relação à medida μ, se, para todo $E \in \mathcal{E}$ tal, que $\mu(T^{-1}(E)\Delta E) = 0$ (isto ocorre, em particular, se $T^{-1}(E) = E$), tem-se $\mu(E) = 0$ ou $\mu(E^c) = 0$. Neste caso dizemos também que a tripla $((M, \mathcal{E}), T, \mu)$ é um "sistema ergódico".*

1.8 Unicidade de extensões de pré-medidas em semianéis para σ-álgebras

Neste parágrafo demonstraremos que o problema da extensão de pré-medidas em semianéis para medidas nas σ-álgebras geradas por estes têm, sob condições bastante naturais, no máximo uma solução. Algumas consequências deste fato para medidas com invariâncias serão também discutidas.

Proposição 102 *Seja $\mathcal{E} \subseteq 2^M$, onde M é um conjunto qualquer e sejam μ_1 e μ_2 duas medidas na σ-álgebra $\sigma(\mathcal{E})$ (isto é, na σ-álgebra gerada por $\mathcal{E}$) tais, que, para todo $E \in \mathcal{E}$, vale $\mu_1(E) = \mu_2(E)$. Para todo $E \in \mathcal{E}$ tal, que $\mu_1(E) = \mu_2(E) < \infty$ tem-se que a família de subconjuntos*

$$\mathcal{D}_E \doteq \{\tilde{E} \in \sigma(\mathcal{E}) \ : \ \mu_1(\tilde{E} \cap E) = \mu_2(\tilde{E} \cap E)\} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$$

é um sistema de Dynkin.

Demonstração: Seja $E \in \mathcal{E}$ como no enunciado da proposição e note-se que $M \in \mathcal{D}_E$, pois $\mu_1(E) = \mu_2(E)$. Para todo $\tilde{E} \in \mathcal{D}_E \subseteq \sigma(\mathcal{E})$, vale $\tilde{E}^c \in \sigma(\mathcal{E})$ e, pela aditividade de medidas, tem-se que

$$\begin{aligned}\mu_k(E) &= \mu_k(M \cap E) = \mu_k((\tilde{E} \cup \tilde{E}^c) \cap E) \\ &= \mu_k(\tilde{E}^c \cap E) + \mu_k(\tilde{E} \cap E) \ ,\end{aligned}$$

$k \in \{1, 2\}$. Portanto, como, por hipótese, $\mu_1(E) = \mu_2(E) < \infty$, tem-se

$$\begin{aligned}\mu_1(\tilde{E}^c \cap E) &= \mu_1(E) - \mu_1(\tilde{E} \cap E) \\ &= \mu_2(E) - \mu_2(\tilde{E} \cap E) = \mu_2(\tilde{E}^c \cap E) \ .\end{aligned}$$

Assim, para todo $\tilde{E} \in \mathcal{D}_E$, vale $\tilde{E}^c \in \mathcal{D}_E$. Seja agora $E_n \in \mathcal{D}_E$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência disjunta. Como $\sigma(\mathcal{E})$ é σ-álgebra, vale $\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \sigma(\mathcal{E})$. Pela σ-aditividade das medidas μ_1 e μ_2, tem-se

$$\begin{aligned}\mu_1\left(\left[\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right] \cap E\right) &= \mu_1\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} [E_n \cap E]\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_1(E_n \cap E) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_2(E_n \cap E) = \mu_2\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} [E_n \cap E]\right) \\ &= \mu_2\left(\left[\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right] \cap E\right) \ .\end{aligned}$$

Logo, $\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{D}_E$. Com isso fica mostrado que $\mathcal{D}_E$ é um sistema de Dynkin.

■

Corolário 103 *Seja $\mathcal{E} \subseteq 2^M$ uma família estável com relação à interseção, isto é, para todo $E, E' \in \mathcal{E}$, vale $E \cap E' \in \mathcal{E}$, e sejam μ_1 e μ_2 duas medidas na σ-álgebra gerada $\sigma(\mathcal{E})$ tais, que $\mu_1(E) = \mu_2(E)$ para todo $E \in \mathcal{E}$. Então, para todo $\tilde{E} \in \sigma(\mathcal{E})$ e todo $E \in \mathcal{E}$ tal, que $\mu_1(E) = \mu_2(E) < \infty$, vale que*

$$\mu_1(\tilde{E} \cap E) = \mu_2(\tilde{E} \cap E) \ .$$

Demonstração: Como $\mathcal{E}$ é estável com relação à interseções finitas, vale $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_E$. Em particular, $\delta(\mathcal{E})$ (o sistema de Dynkin gerado por $\mathcal{E}$) está contido em $\mathcal{D}_E$, já que este útimo é um sistema de Dynkin, pela última proposição. Como já demonstrado anteriormente, sabemos que, para famílias $\mathcal{E}$ estáveis com relação a interseções finitas, vale $\delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$. Deste modo, tem-se

$$\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_E \subseteq \sigma(\mathcal{E}).$$

■

Sob certas condições bastante simples, a última igualdade implica, como veremos, a igualdade das medidas μ_1 e μ_2 em toda σ-álgebra $\sigma(\mathcal{E})$.

Definição 104 (conteúdo σ-finito) *Seja $\mathcal{H}$ um semianel sobre M. Dizemos que o conteúdo $\mu : \mathcal{H} \to [0, \infty]$ é "σ-finito" se existe uma sequência $E_n \in \mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}$, tal, que $\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n = M$ e, para todo $n \in \mathbb{N}$, vale $\mu(E_n) < \infty$.*

Por exemplo, em qualquer dimensão, a pré-medida de Lebesgue, assim como toda pré-medida de Stieltjes, é σ-finita.

Proposição 105 *Seja $\mathcal{H} \subseteq 2^M$ um semianel e sejam μ_1 e μ_2 duas medidas na σ-álgebra $\sigma(\mathcal{H})$ tais, que, para todo $E \in \mathcal{H}$, vale $\mu_1(E) = \mu_2(E)$. Se a restrição de μ_1 ou μ_2 a $\mathcal{H}$ define um conteúdo σ-finito em $\mathcal{H}$ então vale $\mu_1 = \mu_2$.*

Demonstração: Seja uma sequência $E_n \in \mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}$, tal, que vale $\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n = M$ e, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mu_1(E_n) = \mu_2(E_n) < \infty$. Defina $\tilde{E}_1 \doteq E_1$ e

$$\tilde{E}_n \doteq E_n \backslash [E_1 \cup \cdots \cup E_{n-1}] \in \sigma(\mathcal{H}) \ , \quad n \in \mathbb{N} \ , \ n > 1 \ .$$

Por construção, $\tilde{E}_n$, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência *disjunta* tal, que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{E}_n = M$. Assim, para todo $E \in \sigma(\mathcal{H})$, tem-se

$$\mu_1(E) = \mu_1\left(\left[\sup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{E}_n\right] \cap E\right) = \mu_1\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \left[\tilde{E}_n \cap E\right]\right) \ .$$

Usando a σ-aditividade das medidas e o último corolário (recorde-se aqui que, por definição, semianéis são estáveis com relação à interseção), e observando que $E_n \cap \tilde{E}_n = \tilde{E}_n$, obtemos

$$\begin{aligned} \mu_1(E) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_1(\tilde{E}_n \cap E) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_1(E_n \cap \tilde{E}_n \cap E) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_2(E_n \cap \tilde{E}_n \cap E) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_2(\tilde{E}_n \cap E) \\ &= \mu_2\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} [\tilde{E}_n \cap E]\right) = \mu_2\left(\left[\sup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{E}_n\right] \cap E\right) = \mu_2(E) \ . \end{aligned}$$

■

Corolário 106 *Seja $\mathcal{H}$ um semianel sobre M e $\mu : \mathcal{H} \to [0, \infty]$ uma pré-medida σ-finita. Existe no máximo uma extensão de μ para uma medida na σ-álgebra $\sigma(\mathcal{H})$.*

A seguir usaremos o resultado acima para mostrar que invariâncias e normalização podem definir unicamente uma medida. Para todo $x \in \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, definimos a operação de translação $\theta_x : 2^{\mathbb{R}^d} \to 2^{\mathbb{R}^d}$,

$$\theta_x(E) \doteq \{x + \tilde{x} \ : \ \tilde{x} \in E\} \ , \quad E \in 2^{\mathbb{R}^d} \ .$$

Note-se que θ_x, $x \in \mathbb{R}^d$, são movimentos em $\mathbb{R}^d$, no sentido usual.

Definição 107 (conteúdos invariantes à translação) *Seja $\mathcal{H}$ um semianel sobre $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, e $\mu : \mathcal{H} \to [0, \infty]$ um conteúdo. Dizemos que μ é "invariante à translação" se, para todo $E \in \mathcal{H}$ e todo $x \in \mathbb{R}^d$, vale*

$$\theta_x(E) \in \mathcal{H} \quad e \quad \mu(\theta_x(E)) = \mu(E) \ .$$

Recorde-se que, como já demonstrado, para todo $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $d \in \mathbb{N}$, e todo $x \in \mathbb{R}^d$, tem-se $\theta_x(E) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, pois θ_x é um movimento e a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ é invariante com relação a qualquer movimento em $\mathbb{R}^d$. Note-se que uma medida μ em $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $d \in \mathbb{N}$, é invariante à translação no sentido da definição acima se, e somente se, para todo $x \in \mathbb{R}^d$, vale:

$$\theta_{x*}(\mu) = \mu \ ,$$

isto é, se, para todo $x \in \mathbb{R}^d$, for invariante com relação à transformação mensurável $\theta_x : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, no sentido da Definição 100.

Exercício 108 *Mostre que se μ é um conteúdo invariante à translação na σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $d \in \mathbb{N}$, tal, que $\mu((0,1]^d) = 1$ então, para todo $a_1, b_1, \ldots, a_d, b_d \in \mathbb{Q}$, $a_k < b_k$, $k = 1, \ldots, d$, tem-se*

$$\mu((a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d]) = (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d) \ .$$

Note-se que o exercício acima implica, em particular, que todo conteúdo invariante à translação na σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tal, que $\mu((0,1]^d) = 1$ é necessariamente σ-finito. O exercício também implica que dois conteúdos invariantes à translação μ_1 e μ_2 nesta σ-álgebra tais, que

$$\mu_1((0,1]^d) = \mu_2((0,1]^d) = 1$$

necessariamente coincidem no semianel $\mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}}$. Como este último gera a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, concluímos que:

Corolário 109 *Para todo $d \in \mathbb{N}$, existe no máximo uma medida invariante à translação $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$ tal, que $\mu((0,1]^d) = 1$.*

No parágrafo a seguir será discutido o problema da existência de medidas que estendem pré-medidas.

1.9 Medidas exteriores e existência de medidas que estendem pré-medidas

Recorde-se que pré-medidas μ, e, portanto, medidas, possuem sempre as propriedades de monotonicidade e de σ-subaditividade. Além destas duas propriedades, também vale $\mu(\emptyset) = 0$. Utilizaremos estas três propriedades para introduzir a noção de medida exterior:

Definição 110 (medidas exteriores) *Seja M um conjunto qualquer. Dizemos que a função $\eta : 2^M \to [0, \infty]$ é uma "medida exterior" se as seguintes propriedades são verdadeiras:*

i.) $\eta(\emptyset) = 0$.

ii.) Para todo $E, E' \in 2^M$, $E' \subseteq E$, *vale* $\eta(E') \leq \eta(E)$.

iii.) Para toda sequência $E_n \in 2^M$, $n \in \mathbb{N}$, *tem-se*

$$\eta\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \eta(E_n) \ .$$

Note-se que medidas na σ-álgebra 2^M são um caso especial de medida exterior.

Esta definição foi proposta por Constantin Carathéodory em 1914. Para demonstrar a existência de medidas que estendem pré-medidas μ em semianéis $\mathcal{H}$, adotaremos a estratégia usada por ele. Esta consiste em construir uma medida exterior μ^* que estende a pré-medida dada e em mostrar que a restrição de μ^* à σ-álgebra $\sigma(\mathcal{H})$ é uma medida. Neste procedimento a seguinte definição, também proposta por Carathéodory em 1914, é central:

Definição 111 (conjuntos η-mensuráveis) *Seja* $\eta : 2^M \to [0, \infty]$ *uma medida exterior. Dizemos que o subconjunto* E *de* M *é "η-mensurável" se, para todo* $\tilde{E} \in 2^M$, *vale*

$$\begin{aligned} \eta(\tilde{E}) &\geq \eta(\tilde{E} \cap E) + \eta(\tilde{E} \cap E^c) \\ &= \eta(\tilde{E} \cap E) + \eta(\tilde{E} \backslash E) \ . \end{aligned}$$

$\mathcal{M}_\eta \subseteq 2^M$ *denota a família de todos os subconjuntos η-mensuráveis de* M.

Note-se que se $\tilde{E} \in 2^M$ é tal, que $\eta(\tilde{E}) = \infty$ a desigualdade acima é trivialmente satisfeita. Portanto, $E \in 2^M$ é η-mensurável se, para todo $\tilde{E} \in 2^M$ com $\eta(\tilde{E}) < \infty$, tal desigualdade é satisfeita. Observe-se também que, pela (σ-)subaditividade das medidas exteriores, para todo $E, \tilde{E} \in 2^M$, vale a desigualdade

$$\eta(\tilde{E}) \leq \eta(\tilde{E} \cap E) + \eta(\tilde{E} \cap E^c) \ .$$

Logo, $E \in 2^M$ é η-mensurável se e, somente se, para todo $\tilde{E} \in 2^M$, $\eta(\tilde{E}) < \infty$, tem-se que

$$\eta(\tilde{E}) = \eta(\tilde{E} \cap E) + \eta(\tilde{E} \cap E^c) = \eta(\tilde{E} \cap E) + \eta(\tilde{E} \backslash E) \ .$$

Com isto, os elementos da família $\mathcal{M}_\eta$ são exatamente os subconjuntos E de M que definem partições $\tilde{E} \cap E$, $\tilde{E} \backslash E$ disjuntas de todo outro subconjunto $\tilde{E}$ de M, cuja medida exterior é *finita*, com relação às quais η se comporta de modo *aditivo*.

Um tipo importante de subconjunto η-mensurável é o dos subconjuntos de medida exterior nula:

Lema 112 *Seja* $\eta : 2^M \to [0, \infty]$ *uma medida exterior. Todo* $E \in 2^M$ *tal, que* $\eta(E) = 0$ *ou* $\eta(E^c) = 0$ *é η-mensurável. Em particular,* $\emptyset, M \in \mathcal{M}_\eta$ *e a família* $\mathcal{M}_\eta$ *nunca é vazia.*

Demonstração: Suponha que $E \in 2^M$ seja tal, que $\eta(E) = 0$. Então, pela monotonicidade de η, para todo $\tilde{E} \in 2^M$, vale

$$\begin{aligned} \eta(\tilde{E} \cap E) + \eta(\tilde{E} \cap E^c) &\leq \eta(E) + \eta(\tilde{E} \cap E^c) \\ &= \eta(\tilde{E} \cap E^c) \leq \eta(\tilde{E}) \ . \end{aligned}$$

Um argumento semelhante mostra que $E \in 2^M$ é η-mensurável se $\eta(E^c) = 0$. ■

O seguinte resultado é central para o problema da extensão de pré-medidas para σ-álgebras:

Teorema 113 (Carathéodory) *Seja $\eta : 2^M \to [0, \infty]$ uma medida exterior qualquer e $\mathcal{M}_\eta \subseteq 2^M$ a família de todos os subconjuntos η-mensuráveis. $\mathcal{M}_\eta$ é uma σ-álgebra e a restrição de η a $\mathcal{M}_\eta$ é uma medida.*

Demonstração:

1. Tome um $E \in \mathcal{M}_\eta$ qualquer. Então, pela definição de subconjunto η-mensurável, para todo $\tilde{E} \in 2^M$, vale

$$\begin{aligned}\eta(\tilde{E}) &\geq \eta(\tilde{E} \cap E) + \eta(\tilde{E} \cap E^c) \\ &= \eta(\tilde{E} \cap E^c) + \eta(\tilde{E} \cap [E^c]^c) \; .\end{aligned}$$

   Assim, também E^c é η-mensurável.

2. Sejam agora dois subconjuntos η-mensuráveis $E, E' \in \mathcal{M}_\eta$. Pela definição de $\mathcal{M}_\eta$ e propriedades que definem medidas exteriores, obtemos, para todo $\tilde{E} \in 2^M$, que

$$\begin{aligned}\eta(\tilde{E}) &\geq \eta(\tilde{E} \cap E) + \eta(\tilde{E} \cap E^c) \\ &\geq \eta(\tilde{E} \cap E) + \eta([\tilde{E} \cap E^c] \cap E') + \eta([\tilde{E} \cap E^c] \cap E'^c) \\ &\geq \eta([\tilde{E} \cap E] \cup [\tilde{E} \cap [E^c \cap E']]) + \eta(\tilde{E} \cap [E \cup E']^c) \\ &= \eta(\tilde{E} \cap [E \cup E']) + \eta(\tilde{E} \cap [E \cup E']^c) \; .\end{aligned}$$

   Para demonstrar a última igualdade, usamos a identidade

$$\begin{aligned}[\tilde{E} \cap E] \cup [\tilde{E} \cap [E^c \cap E']] &= \tilde{E} \cap [E \cup (E^c \cap E')] \\ &= \tilde{E} \cap [(E \cup E^c) \cap (E \cup E')] \\ &= \tilde{E} \cap [E \cup E'] \; .\end{aligned}$$

   Com isso, vale $E \cup E' \in \mathcal{M}_\eta$ e, portanto, $\mathcal{M}_\eta$ é uma álgebra.

3. Sejam $E, E' \in \mathcal{M}_\eta$ *disjuntos*. Para todo $\tilde{E} \in 2^M$, pela σ-subaditividade de η, vale

$$\eta(\tilde{E} \cap [E \cup E']) \leq \eta(\tilde{E} \cap E) + \eta(\tilde{E} \cap E') \; .$$

   Por outro lado, pela definição de $\mathcal{M}_\eta$, como E, E' são disjuntos, vale

$$\begin{aligned}\eta(\tilde{E} \cap [E \cup E']) &\geq \eta(\tilde{E} \cap [E \cup E'] \cap E) + \eta(\tilde{E} \cap [E \cup E'] \cap E^c) \\ &= \eta(\tilde{E} \cap E) + \eta(\tilde{E} \cap E') \; .\end{aligned}$$

   Isto é, vale que

$$\eta(\tilde{E} \cap [E \cup E']) = \eta(\tilde{E} \cap E) + \eta(\tilde{E} \cap E') \; .$$

   Iterando esta igualdade vemos que

$$\eta(\tilde{E} \cap [E_1 \cup \cdots \cup E_n]) = \eta(\tilde{E} \cap E_1) + \cdots + \eta(\tilde{E} \cap E_n)$$

   para toda sequência *finita disjunta* $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{M}_\eta$ de subconjuntos η-mensuráveis de M. Em particular, escolhendo $\tilde{E} = M$ obtemos que

$$\eta(E_1 \cup \cdots \cup E_n) = \eta(E_1) + \cdots + \eta(E_n) \; .$$

   Assim, a restrição de uma medida exterior η à álgebra $\mathcal{M}_\eta$ dos subconjuntos η-mensuráveis de M sempre define um conteúdo nesta álgebra.

4. Seja agora uma sequência *disjunta* $E_n \in \mathcal{M}_\eta$, $n \in \mathbb{N}$, e defina

$$E \doteq \sup_{n\in\mathbb{N}} E_n \ .$$

Então, para todo $\tilde{E} \in 2^M$ e todo $k \in \mathbb{N}$, pelo que acaba de ser demonstrado e pela monotonicidade de η, vale

$$\begin{aligned} \eta(\tilde{E}) &\geq \eta(\tilde{E} \cap [E_1 \cup \cdots \cup E_k]) + \eta(\tilde{E} \cap [E_1 \cup \cdots \cup E_k]^c) \\ &\geq \eta(\tilde{E} \cap E^c) + \eta(\tilde{E} \cap [E_1 \cup \cdots \cup E_k]) \\ &= \eta(\tilde{E} \cap E^c) + \sum_{l=1}^{k} \eta(\tilde{E} \cap E_l) \ . \end{aligned}$$

Portanto, tomando o limite $k \to \infty$, tem-se

$$\eta(\tilde{E}) \geq \eta(\tilde{E} \cap E^c) + \sum_{n=1}^{\infty} \eta(\tilde{E} \cap E_n) \ .$$

Pela σ-subaditividade da medida exterior η,

$$\eta(\tilde{E}) \geq \eta(\tilde{E} \cap E^c) + \eta(\tilde{E} \cap E) \ .$$

Com isso temos que $\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{M}_\eta$ e, portanto, a álgebra $\mathcal{M}_\eta$ é um sistema de Dynkin. Como sistemas de Dynkin estáveis com relação à interseção de seus elementos são automaticamente σ-álgebras, concluímos que $\mathcal{M}_\eta$ é uma σ-álgebra.

5. Provamos até aqui que $\mathcal{M}_\eta$ é uma σ-álgebra e que a restrição de η a $\mathcal{M}_\eta$ é um conteúdo. Como, por definição de medidas exteriores, este conteúdo é σ-subatitivo, pelo Corolário 66, ele é uma medida. ■

Para provar que pré-medidas μ em semianéis $\mathcal{H}$ podem ser estendidas para medidas em $\sigma(\mathcal{H})$, mostraremos que existe uma medida exterior μ^* que estende μ e cuja família $\mathcal{M}_\eta$ de subconjuntos mensuráveis contém $\mathcal{H}$. Neste caso, observe-se que, pelo teorema de Carathéodory, $\mathcal{M}_\eta$ é uma σ-álgebra que contém $\mathcal{H}$. Em particular, $\sigma(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{M}_\eta$. Também pelo teorema de Carathéodory, sabemos ainda que a restrição de μ^* a $\mathcal{M}_\eta$, e, portanto, também a $\sigma(\mathcal{H})$, é uma medida.

Definição 114 *Seja $\mathcal{H}$ um semianel sobre M e $\mu : \mathcal{H} \to [0, \infty]$ um conteúdo. Defina a função $\mu^* : 2^M \to [0, \infty]$ por*

$$\mu^*(E) \doteq \inf \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) \ : \ E_n \in \mathcal{H}, \ n \in \mathbb{N} \ , \ \textit{tal, que } E \subseteq \sup_{n\in\mathbb{N}} E_n \right\} \ .$$

Aqui utilizamos a convenção $\inf \emptyset \doteq \infty$. Isto é, se não existe sequência $E_n \in \mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}$, com $E \subseteq \sup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, então $\mu^*(E) \doteq \infty$.

A função $\mu^* : \mathcal{H} \to [0, \infty]$ tem as seguintes definições equivalentes:

Exercício 115 *Seja $\mathcal{H}$ um semianel sobre M e $\mu : \mathcal{H} \to [0, \infty]$ um conteúdo. Seja $\nu : \mathcal{R}(\mathcal{H}) \to [0, \infty]$ o único conteúdo que estende μ de $\mathcal{H}$ para $\mathcal{R}(\mathcal{H})$. Mostre, para todo $E \in 2^M$, as seguintes* *igualdades:*

$$\begin{aligned}
&\mu^*(E)\\
= \ & \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}}\nu(E_n) \ : \ E_n\in\mathcal{R}(\mathcal{H}), \ n\in\mathbb{N} \ , \textit{ tal, que } E\subseteq\sup_{n\in\mathbb{N}}E_n\right\}\\
= \ & \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}}\nu(E_n) \ : \ E_n\in\mathcal{R}(\mathcal{H}), \ n\in\mathbb{N} \ , \textit{ seq. disjunta tal, que } E\subseteq\sup_{n\in\mathbb{N}}E_n\right\}\\
= \ & \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(E_n) \ : \ E_n\in\mathcal{H}, \ n\in\mathbb{N} \ , \textit{ seq. disjunta tal, que } E\subseteq\sup_{n\in\mathbb{N}}E_n\right\} \ .
\end{aligned}$$

Proposição 116 *Seja $\mathcal{H}$ um semianel e μ um conteúdo qualquer em $\mathcal{H}$. Então μ^* é uma medida exterior e $\sigma(\mathcal{H})\subseteq\mathcal{M}_{\mu^*}$.*

Demonstração:

1. Sejam $E, E'\in 2^M$, $E'\subseteq E$. Como toda sequência $\tilde{E}_n\in\mathcal{H}$, $n\in\mathbb{N}$, que recobre E (isto é, vale $E\subseteq\sup_{n\in\mathbb{N}}\tilde{E}_n$) também recobre E', tem-se $\mu^*(E')\leq\mu^*(E)$. Portanto, $\mu^*:\mathcal{H}\to[0,\infty]$ é uma função monótona crescente.

2. Seja agora uma sequência $E_n\in 2^M$, $n\in\mathbb{N}$, qualquer e fixe $\varepsilon>0$. Suponha, num primeiro momento, que $\mu^*(E_n)<\infty$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Então, para todo $n\in\mathbb{N}$, existe uma sequência $E_k^{(n)}\in\mathcal{H}$, $k\in\mathbb{N}$, que recobre E_n tal, que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\mu(E_k^{(n)})\leq\mu^*(E_n)+\varepsilon 2^{-n} \ .$$

Observe-se que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}E_n\subseteq\cup\{E_k^{(n)} \ : \ k,n\in\mathbb{N}\} \ .$$

Portanto, como a família $E_k^{(n)}\in\mathcal{H}$, $k,n\in\mathbb{N}$, é enumerável, há uma sequência em $\mathcal{H}$ que recobre $\sup_{n\in\mathbb{N}}E_n$ e vale

$$\begin{aligned}
\mu^*\left(\sup_{n\in\mathbb{N}}E_n\right) \ &\leq \ \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{N}}\mu(E_k^{(n)})\\
&\leq \ \sum_{n\in\mathbb{N}}[\mu^*(E_n)+\varepsilon 2^{-n}]=\varepsilon+\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu^*(E_n) \ .
\end{aligned}$$

Como a desigualdade acima é valida para todo $\varepsilon>0$, para toda sequência $E_n\in 2^M$, $n\in\mathbb{N}$, tem-se que

$$\mu^*\left(\sup_{n\in\mathbb{N}}E_n\right)\leq\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu^*(E_n) \ .$$

A desigualdade acima é trivialmente satisfeita se $\mu^*(E_n)=\infty$ para algum $n\in\mathbb{N}$. Assim, $\mu^*:\mathcal{H}\to[0,\infty]$ é uma função σ-subaditiva.

3. $\mu^*(\emptyset)=0$, pois a sequência $E_n=\emptyset\in\mathcal{H}$, $n\in\mathbb{N}$, recobre o conjunto vazio e $\mu(\emptyset)=0$. Portanto, μ^* é uma medida exterior.

4. Seja $\tilde{E} \in 2^M$ tal, que $\mu^*(\tilde{E}) < \infty$. Então, para todo $\varepsilon > 0$, pelo último exercício, existe uma sequência $E_n^{(\varepsilon)} \in \mathcal{R}(\mathcal{H})$, $n \in \mathbb{N}$, tal, que

$$\tilde{E} \subseteq \sup_{n\in\mathbb{N}} E_n^{(\varepsilon)} \quad \text{e} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(E_n^{(\varepsilon)}) \le \mu^*(\tilde{E}) + \varepsilon \ ,$$

onde $\nu : \mathcal{R}(\mathcal{H}) \to [0,\infty]$ é a única extensão do conteúdo $\mu : \mathcal{H} \to [0,\infty]$ para um conteúdo em $\mathcal{R}(\mathcal{H})$. Para todo $E \in \mathcal{H} \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{H})$, pela aditividade do conteúdo ν e observando que $E_n^{(\varepsilon)} \cap E$, $E_n^{(\varepsilon)} \backslash E \in \mathcal{R}(\mathcal{H})$ (já que $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ é um anel), tem-se:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(E_n^{(\varepsilon)}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\nu(E_n^{(\varepsilon)} \cap E) + \nu(E_n^{(\varepsilon)} \backslash E)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(E_n^{(\varepsilon)} \cap E) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(E_n^{(\varepsilon)} \backslash E) \ .$$

Portanto, como $E_n^{(\varepsilon)} \cap E$, $E_n^{(\varepsilon)} \backslash E \in \mathcal{R}(\mathcal{H})$, $n \in \mathbb{N}$, são sequências que recobrem, respectivamente,

$$\tilde{E} \cap E \subseteq \left[\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n^{(\varepsilon)}\right] \cap E = \sup_{n\in\mathbb{N}} (E_n^{(\varepsilon)} \cap E) = \quad \text{e} \quad \tilde{E} \backslash E \subseteq \left[\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n^{(\varepsilon)}\right] \cap E^c = \sup_{n\in\mathbb{N}} (E_n^{(\varepsilon)} \backslash E) \ ,$$

tem-se, pelo mesmo exercício, que

$$\begin{aligned} \mu^*(\tilde{E}) + \varepsilon &\ge \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(E_n^{(\varepsilon)}) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(E_n^{(\varepsilon)} \cap E) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(E_n^{(\varepsilon)} \backslash E) \\ &\ge \mu^*(\tilde{E} \cap E) + \mu^*\left(\tilde{E} \cap E^c\right) \ . \end{aligned}$$

Como a desigualdade acima vale para todo $\varepsilon > 0$, vale, para todo $E \in \mathcal{H}$ e todo $\tilde{E} \in 2^M$, que

$$\mu^*(\tilde{E}) \ge \mu^*(\tilde{E} \cap E) + \mu^*\left(\tilde{E} \cap E^c\right)$$

Portanto, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$.

5. Por fim, como, pelo teorema de Carathéodory, $\mathcal{M}_{\mu^*}$ é σ-álgebra, vale $\sigma(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$.

■

O seguinte exercício mostra que μ^*, apesar de sempre definir uma medida em $\sigma(\mathcal{H})$, não é necessariamente uma extensão do conteúdo μ:

Exercício 117 *Mostre que se o conteúdo μ no semianel $\mathcal{H}$ não é uma pré-medida, então existe $E \in \mathcal{H}$ tal, que*

$$\mu^*(E) < \mu(E) \ .$$

Em particular, μ^* não estende μ para a σ-álgebra $\sigma(\mathcal{H})$.

Note-se que, pela definição de μ^*, para todo $E \in \mathcal{H}$, sempre vale

$$\mu^*(E) \le \mu(E) \ .$$

Teorema 118 (teorema de extensão de Carathéodory-Hahn-Kolmogorov) *Seja $\mathcal{H}$ um semianel sobre M e μ uma pré-medida em $\mathcal{H}$. Então μ^* é uma medida exterior que estende μ e $\sigma(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$. Em particular, a restrição de μ^* a $\sigma(\mathcal{H})$ é uma medida que estende a pré-medida μ.*

Demonstração: Já mostramos acima que μ^* é uma medida exterior tal, que $\sigma(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$. Seja $E \in \mathcal{H}$ arbitrário e $E_n \in \mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}$, qualquer sequência que recubra E. Então, pela σ-subaditividade da pré-medida μ,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) \geq \mu(E) .$$

A útima desigualdade implica que, para todo $E \in \mathcal{H}$,

$$\mu^*(E) \geq \mu(E) .$$

Como a desigualdade oposta sempre vale (pela própria definição de μ^*), segue que μ^* é extensão de μ. ■

Como mostraremos mais tarde, a σ-álgebra $\mathcal{M}_{\mu^*}$ dos subconjuntos μ^*-mensuráveis é em geral muito maior do que a σ-álgebra gerada por $\mathcal{H}$. Deste modo, surge a questão natural sobre a possibilidade de se estender μ a uma σ-álgebra ainda maior que $\mathcal{M}_{\mu^*}$. A seguir enunciamos dois lemas que esclarecem, ao menos parcialmente, tal questão. Com efeito, uma primeira observação é que o aumento da σ-álgebra sobre a qual se estende μ não é possível pela simples iteração do procedimento de Carathéodory descrito acima:

Lema 119 *Seja μ um conteúdo em $\mathcal{H}$ e $\tilde{\mu}$ a pré-medida obtida pela restrição de μ^* a qualquer semianel que contenha $\mathcal{H}$ e esteja contido em $\mathcal{M}_{\mu^*}$. Então $\tilde{\mu}^* = \mu^*$. Em particular vale $\mathcal{M}_{\tilde{\mu}^*} = \mathcal{M}_{\mu^*}$ e, para todo $E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$, $\tilde{\mu}^*(E) = \mu^*(E)$.*

Demonstração: Exercício.

O lema acima não implica que $\mathcal{M}_{\mu^*}$ seja a maior σ-álgebra sobre a qual se possa estender μ:

Lema 120 *Seja $(M, \mathcal{E}, \mu)$ um espaço de medida e $E \in 2^M \setminus \mathcal{E}$. Então existe uma medida μ_E que estende a medida μ para a σ-álgebra gerada por $\{E\} \cup \mathcal{E}$ tal, que $\mu_E(E) = \mu^*(E)$.*

Demonstração: Exercício. *Sugestão*: Considere o semianel $\mathcal{H} \doteq \{E \cap \tilde{E},\, E^c \cap \tilde{E} : \tilde{E} \in \mathcal{E}\} \subseteq 2^M$ e use argumentos da demonstração do Teorema 113.

O último lema não é trivialmente válido no caso $(M, \mathcal{M}_{\mu^*}, \tilde{\mu})$, onde $\tilde{\mu}$ denota a restrição de μ^* a $\mathcal{M}_{\mu^*}$, pois, como veremos, $\mathcal{M}_{\mu^*}$ é em geral estritamente menor que o conjunto potência 2^M.

Combinando resultados precedentes, obtemos o resultado principal desta seção:

Corolário 121 (existência e unicidade da extensão de uma pré-medida) *Seja $\mathcal{H}$ um semianel e μ uma pré-medida σ-finita em $\mathcal{H}$. Então existe uma medida única em $\sigma(\mathcal{H})$ que estende a pré-medida μ. Tal extensão é a restrição da medida exterior μ^* à σ-álgebra $\sigma(\mathcal{H})$.*

Note-se aqui que, pelos resultados acima, uma pré-medida $\mu : \mathcal{H} \to [0, \infty]$ se estende até mesmo para uma medida em uma σ-álgebra (em geral estritamente) maior que $\sigma(\mathcal{H})$, a σ-álgebra $\mathcal{M}_{\mu^*}$, mas não podemos afirmar, por ora, que esta extensão é única, mesmo no caso em que μ seja σ-finita. Isto é assim, pois, a priori, não sabemos se tal extensão está unicamente definida numa família σ-finita de geradores de $\mathcal{M}_{\mu^*}$. Mostraremos mais adinte, no Corolário 131, que no caso σ-finito também a extensão de μ uma para uma medida em $\mathcal{M}_{\mu^*}$ é única.

Uma consequência direta, porém importante, do último corolário, é o seguinte critério de comparação de medidas:

Corolário 122 (comparação de medidas) *Se μ_1 e μ_2 são medidas na σ-álgebra $\sigma(\mathcal{H})$ gerada pelo semianel $\mathcal{H}$ e suas restrições a $\mathcal{H}$ são σ-finitas, então $\mu_1(E) \leq \mu_2(E)$ para todo $E \in \sigma(\mathcal{H})$ se, e somente se, $\mu_1(E) \leq \mu_2(E)$ para todo $E \in \mathcal{H}$.*

Demonstração: Sejam duas medidas μ_1 e μ_2 na σ-álgebra $\sigma(\mathcal{H})$ gerada pelo semianel $\mathcal{H}$ e sejam $\tilde{\mu}_1$ e $\tilde{\mu}_2$ suas respectivas restrições a $\mathcal{H}$. Se as pré-medidas $\tilde{\mu}_1$ e $\tilde{\mu}_2$ forem σ-finitas, pelo último corolário, tem-se, para todo para todo $E \in \sigma(\mathcal{H})$, que

$$\mu_1(E) = \tilde{\mu}_1^*(E) \quad \text{e} \quad \mu_2(E) = \tilde{\mu}_2^*(E) \ .$$

Pela definição das medidas exteriores $\tilde{\mu}_1^*$ e $\tilde{\mu}_2^*$, tem-se $\tilde{\mu}_1^*(E) \leq \tilde{\mu}_2^*(E)$ para todo $E \in \sigma(\mathcal{H}) \subseteq 2^M$ se, para todo $E \in \mathcal{H}$, valer que $\mu_1(E) \leq \mu_2(E)$. ■

Finalmente, os resultados discutidos acima nos permitem definir as medidas de Lebesgue-Borel e de Stieltjes-Borel nas σ-álgebras de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $d \in \mathbb{N}$:

Definição 123 (medidas de Lebesgue-Borel) *Chamaremos de "medida de Lebesgue-Borel em d dimensões", $d \in \mathbb{N}$, a extensão única da pré-medida $\lambda^{(d)}$ de Lebesgue em $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}^d$ para a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Esta medida também será denotada por $\lambda^{(d)}$.*

De modo análogo, definiremos medidas de Stieltjes-Borel como extensões únicas de pré-medidas de Stieltjes:

Definição 124 (medidas de Stieltjes-Borel) *Seja $d \in \mathbb{N}$ e $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ uma função contínua a direita tal, que, para todo $a, b \in \mathbb{R}^d$, $a \leq b$, vale $\Delta_{(a,b)}F \geq 0$. Chamaremos de "medida de Stieltjes-Borel associada a F" a extensão única da pré-medida μ_F de Stieltjes em $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}^d$ para a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Esta medida também será denotada por μ_F.*

Exercício 125 *Dizemos que uma medida μ na σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $d \in \mathbb{N}$, é "finita em compactos" se, para todo subconjunto compacto $E \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ vale $\mu(E) < \infty$. Mostre que uma medida em $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ é finita em compactos se, e somente, se for uma medida de Stieltjes-Borel.*

Pela construção de Carathéodory descrita acima, podemos estender as medidas de Lebesgue-Borel e Stieltjes-Borel para as respectivas σ-álgebras de subconjuntos mensuráveis (que são maiores que a σ-álgebra de Borel):

Definição 126 (medidas de Lebesgue e Stieltjes-Lebesgue) *Seja $\tilde{\lambda}^{(d)}$, $d \in \mathbb{N}$, a restrição da medida exterior $\lambda^{(d)*}$ à σ-álgebra do subconjuntos $\lambda^{(d)*}$-mensuráveis, $\mathcal{M}_{\lambda^{(d)*}}$. Chamamos $\tilde{\lambda}^{(d)}$ "medida de Lebesgue em d dimensões" e $\mathcal{M}_{\lambda^{(d)*}}$ "σ-álgebra dos subconjuntos Lebesgue-mensuráveis". De modo análogo, para toda pré-medida de Stieltjes-Borel μ_F, a medida $\tilde{\mu}_F$ obtida pela restrição de μ_F^* à σ-álgebra $\mathcal{M}_{\mu_F^*}$ será chamada "medida de Stieltjes-Lebesgue".*

No seguinte parágrafo discutiremos as σ-ágebras de conjuntos mensuráveis com respeito à uma medida exterior, com relação à uma noção de completeza para espaços de medida. Neste contexto, mostraremos, em particular, que a σ-ágebra $\mathcal{M}_{\mu^*}$ associada à medida exterior μ^* relativa a uma medida μ em uma σ-ágebra qualquer $\mathcal{E}$ é gerada pela união de $\mathcal{E}$ com a família dos conjuntos cuja medida exterior associada é nula.

1.9.1 Espaços de medida completos

Definição 127 (subconjuntos μ-nulos e espaços de medida completos) *Seja $(M, \mathcal{E}, \mu)$ um espaço de medida. Dizemos que $E \in 2^M$ é um "subconjunto μ-nulo" se existir $\tilde{E} \in \mathcal{E}$ tal, que $E \subseteq \tilde{E}$ e $\mu(\tilde{E}) = 0$. Denotar-se-á por $\mathcal{N}_\mu \subseteq 2^M$ a família de todos os subconjuntos μ-nulos de M. Dizemos que o espaço de medida $(M, \mathcal{E}, \mu)$ é "completo" se todo subconjunto μ-nulo for elemento da σ-álgebra $\mathcal{E}$, ou seja, se vale $\mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{E}$.*

Exercício 128 *Seja $(M, \mathcal{E}, \mu)$ um espaço de medida qualquer. Mostre que*

$$\mathcal{N}_\mu = \{E \in 2^M \ : \ \mu^*(E) = 0\} = \mathcal{N}_{\mu^*} \ ,$$

onde μ^* é a medida exterior associada à medida μ vista como medida em $\mathcal{M}_{\mu^*}$, e que $\mathcal{E} \cup \mathcal{N}_\mu \subseteq 2^M$ é um semianel.

A seguinte proposição dá um exemplo importante de espaço de medida completo:

Proposição 129 *Seja $(M, \mathcal{E}, \mu)$ um espaço de medida qualquer. Então $(M, \mathcal{M}_{\mu^*}, \mu^*)$ é um espaço de medida completo e $\mathcal{M}_{\mu^*} = \mathcal{E}$ somente se $(M, \mathcal{E}, \mu)$ for completo.*

Demonstração: Pelo Lema 112, tem-se que

$$\{E \in 2^M \ : \ \mu^*(E) = 0\} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*} \ .$$

Logo, pelo último exercício, $\mathcal{N}_{\mu^*} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$ e, portanto, $(M, \mathcal{M}_{\mu^*}, \mu^*)$ é completo. A segunda parte da proposição segue da primeira, pelo Lema 119. ■

Da última proposição segue, em particular, que os espaços de medida de Stieltjes-Lebesgue $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_{\mu_F^*}, \mu_F^*)$, $d \in \mathbb{N}$, referentes à Definição 126, são completos.

Em um certo sentido, em espaços de medida σ-finitos vale a recíproca da última proposição:

Proposição 130 *Seja $(M, \mathcal{E}, \mu)$ um espaço de medida σ-finito qualquer. Então vale $\mathcal{M}_{\mu^*} = \sigma(\mathcal{E} \cup \mathcal{N}_\mu)$. Em particular, o espaço de medida é completo se, e somente se, $\mathcal{M}_{\mu^*} = \mathcal{E}$.*

Demonstração:

1. Observe que, por resultados precedentes (Proposição 116 e Lema 112), sempre vale a inclusão $\sigma(\mathcal{E} \cup \mathcal{N}_\mu) \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$. Seja o espaço de medida $(M, \mathcal{E}, \mu)$ σ-finito. Tome uma sequência qualquer $E_n \in \mathcal{E}$, $n \in \mathbb{N}$, tal, que $\mu(E_n) < \infty$ e $\sup_{n \in \mathbb{N}} E_n = M$, a qual existe pela hipótese de σ-finitude. Seja $E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ qualquer e defina a sequência $E'_n \doteq E_n \cap E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$, $n \in \mathbb{N}$. Recorde-se que $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$ e que $\mathcal{M}_{\mu^*}$ é uma σ-álgebra. Pela definição da medida exterior μ^* e o fato de $\mathcal{E}$ ser σ-álgebra, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $k \in \mathbb{N}$, existe um $E'_{n,k} \in \mathcal{E}$ tal, que $E'_{n,k} \supseteq E'_n$ e $\mu^*(E'_n) + 1/k \geq \mu(E'_{n,k})$. Seja, para todo $n \in \mathbb{N}$, $E'_{n,\infty} \doteq \inf_{k \in \mathbb{N}} E'_{n,k} \in \mathcal{E}$. Por construção, $E'_{n,\infty} \supseteq E'_n$ e $\mu^*(E'_n) = \mu(E'_{n,\infty})$. Como $\mu^*(E'_n) = \mu(E'_{n,\infty})$ é finita, segue (por aditividade de μ^* em $\mathcal{M}_{\mu^*}$) que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mu^*(E'_{n,\infty} \backslash E'_n) = 0$. Isto é, $E'_{n,\infty} \backslash E'_n \in \mathcal{N}_\mu$. Portanto, $E'_n = E'_{n,\infty} \backslash (E'_{n,\infty} \backslash E'_n) \in \sigma(\mathcal{E} \cup \mathcal{N}_\mu)$. Disto segue que $E = \sup_{n \in \mathbb{N}} E'_n \in \sigma(\mathcal{E} \cup \mathcal{N}_\mu)$.

2. Se $(M, \mathcal{E}, \mu)$, além de σ-finito, é completo, vale então

$$\mathcal{M}_{\mu^*} = \sigma(\mathcal{E} \cup \mathcal{N}_\mu) = \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{E}.$$

   Finalmente, note que já foi demonstrado na última proposição que $\mathcal{M}_{\mu^*} = \mathcal{E}$ somente se $(M, \mathcal{E}, \mu)$.

■

Da última proposição segue, entre outras coisas, que, no caso σ-finito, a construção de Carathéodory corresponde a uma extensão única de (pré-)medida para a σ-álgebra correspondente de conjuntos mensuráveis:

Corolário 131 *Seja $(M, \mathcal{E}, \mu)$ um espaço de medida σ-finito qualquer. Então existe uma medida única em $\mathcal{M}_{\mu^*}$ que estende a medida original μ.*

Demonstração: Seja $\tilde{\mu}$ uma medida em $\mathcal{M}_{\mu^*} = \sigma(\mathcal{E} \cup \mathcal{N}_\mu)$ que extende μ. Sabemos, pela construção de Carathéodory, que existem ao menos uma tal medida. Pela definição de conjunto μ-nulo e a monotonicidade de medidas deve valer que $\tilde{\mu}(E)$ para todo $E \in \mathcal{N}_\mu$. Pelo exercício 128, $\mathcal{E} \cup \mathcal{N}_\mu$ seminanel, e a restrição de $\tilde{\mu}$ é σ-finita, já que esta medida estende μ e esta última é σ-finita, por hipótese. Assim, pelo Corolário 121, a extensão $\tilde{\mu}$ é única. ■

Veremos a seguir que todo espaço de medida pode ser estendido para um novo espaço de medida, o qual é completo e minimal num sendido adequado:

Definição 132 (completamento de um espaço de medida) *Seja $(M, \mathcal{E}, \mu)$ um espaço de medida qualquer. Dizemos que um segundo espaço de medida $(M, \tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mu})$ é uma "extensão" do primeiro, se $\mathcal{E} \subseteq \tilde{\mathcal{E}}$ e a medida $\tilde{\mu}$ for uma extensão da medida μ. Se tal espaço de medida $(M, \tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mu})$ for completo dizemos que este é uma "extensão completa" de $(M, \mathcal{E}, \mu)$. Finalmente, dizemos que uma extensão completa $(M, \tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mu})$ do espaço de medida $(M, \mathcal{E}, \mu)$ é um "completamento" deste, se esta for uma extensão completa "minimal" de $(M, \mathcal{E}, \mu)$, isto é, se $(M, \tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mu})$ não é extensão completa de uma outra extensão completa de $(M, \mathcal{E}, \mu)$, a não ser de si mesma.*

Veremos logo a seguir que os espaços de medida de Stieltjes-Lebesgue $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_{\mu_F^*}, \mu_F^*)$, $d \in \mathbb{N}$, são, repectivamente, os únicos completamentos dos espaços de medida de Stieltjes-Borel $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu_F)$, $d \in \mathbb{N}$, correspondentes (ver Definição 124), estes últimos sendo, em geral, não completos.

Exercício 133 *Seja $(M, \mathcal{E}, \mu)$ um espaço de medida qualquer. Mostre que, para toda extensão completa $(M, \tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mu})$ de $(M, \mathcal{E}, \mu)$, vale*

$$\sigma(\mathcal{E} \cup \mathcal{N}_\mu) \subseteq \tilde{\mathcal{E}} \ .$$

Mostre também que se $(M, \tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mu})$ é um completamento de $(M, \mathcal{E}, \mu)$ então

$$\tilde{\mathcal{E}} = \sigma(\mathcal{E} \cup \mathcal{N}_{\tilde{\mu}}) \ .$$

A seguir mostraremos que todo espaço de medida possui um completamento tal, que $\tilde{\mathcal{E}} = \sigma(\mathcal{E} \cup \mathcal{N}_\mu)$. Para tanto, nos serviremos mais uma vez de medidas exteriores de Carathédory:

Proposição 134 *Todo espaço de medida $(M, \mathcal{E}, \mu)$ possui um completamento $(M, \tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mu})$, onde $\tilde{\mathcal{E}} = \sigma(\mathcal{E} \cup \mathcal{N}_\mu)$. Se a medida μ é σ-finita então o completamento de $(M, \mathcal{E}, \mu)$ é único e coincide com $(M, \mathcal{M}_{\mu^*}, \mu^*)$.*

Demonstração:

1. Seja μ^* a medida exterior associada à medida μ, $\mathcal{M}_{\mu^*}$ a σ-álgebra dos subconjuntos μ^*-mensuráveis e recorde-se que $(M, \mathcal{M}_{\mu^*}, \mu^*)$ é um espaço de medida, pelo teorema de Carathéodory. Recorde-se que (pela Proposição 116 e Lema 112) $\tilde{\mathcal{E}} \doteq \sigma(\mathcal{E} \cup \mathcal{N}_\mu) \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$. Seja $\tilde{\mu}$ a restrição de μ^* a $\tilde{\mathcal{E}}$. Pelo Exercício 128, vale
$$\mathcal{N}_{\tilde{\mu}} \subseteq \mathcal{N}_{\mu^*} = \mathcal{N}_\mu \subseteq \tilde{\mathcal{E}}$$
e, portanto, $(M, \tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mu})$ é completo.

2. Pelo teorema de extensão de Carathéodory-Hahn-Kolmogorov, $(M, \tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mu})$ é uma extensão (completa) de $(M, \mathcal{E}, \mu)$. Para mostrar que esta extensão é minimal, considere uma extensão completa qualquer $(M, \tilde{\mathcal{E}}_0, \tilde{\mu}_0)$ de $(M, \mathcal{E}, \mu)$, que seja estendida por $(M, \tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mu})$. Pelo último exercício, vale $\tilde{\mathcal{E}} = \sigma(\mathcal{E} \cup \mathcal{N}_\mu) \subseteq \tilde{\mathcal{E}}_0$. Como, por hipótese, vale $\tilde{\mathcal{E}}_0 \subseteq \tilde{\mathcal{E}}$, concluímos que $\tilde{\mathcal{E}}_0 = \tilde{\mathcal{E}}$. Pela mesma hipótese, $\tilde{\mu}$ estende $\tilde{\mu}_0$. Portanto, vale também que $\tilde{\mu}_0 = \tilde{\mu}$. Deste modo fica mostrado que $(M, \tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mu})$ é uma extensão completa minimal de $(M, \mathcal{E}, \mu)$, isto é, um completamento de $(M, \mathcal{E}, \mu)$.

3. Suponha agora que o espaço de medida $(M, \mathcal{E}, \mu)$ seja σ-finito e seja $(M, \tilde{\mathcal{E}}_1, \tilde{\mu}_1)$ um completamento de $(M, \mathcal{E}, \mu)$. Em particular, pelo último exercício, tem-se que $\tilde{\mathcal{E}} = \sigma(\mathcal{E} \cup \mathcal{N}_\mu) \subseteq \tilde{\mathcal{E}}_1$. Pela Proposição 130, $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{M}_{\mu^*}$ e, pelo Corolário 131, $\tilde{\mu}$ é a extensão única de μ para uma medida em $\tilde{\mathcal{E}}$. Logo, a restrição de $\tilde{\mu}_1$ a $\tilde{\mathcal{E}}$ é exatamente esta extensão única. Mas isto implica que $(M, \tilde{\mathcal{E}}_1, \tilde{\mu}_1)$ é uma extensão completa de $(M, \tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mu})$. Recorde-se que $(M, \tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mu})$ é completo, pelo ponto 2. Como $(M, \tilde{\mathcal{E}}_1, \tilde{\mu}_1)$ é um completamento, isto é, uma extensão completa minimal, vale $(M, \tilde{\mathcal{E}}_1, \tilde{\mu}_1) = (M, \tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mu})$. O espaço de medida $(M, \tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mu}) = (M, \mathcal{M}_{\mu^*}, \mu^*)$ é, portanto, o único completamento de $(M, \mathcal{E}, \mu)$ se μ for uma medida σ-finita.

■

Pela última proposição, os espaços de medida de Stieltjes-Borel $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu_F)$, já que são sempre σ-finitos, possuem completamentos únicos, os quais são os espaços de medida de Stieltjes-Lebesgue $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_{\mu_F^*}, \mu_F^*)$, $d \in \mathbb{N}$, correspondentes.

1.10 As medidas de (Stielties-)Lebesgue

1.10.1 As medidas de Lebesgue-Borel como medidas normalizadas invariantes à translação

Vimos acima que se μ é uma medida invariante à translação na σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $d \in \mathbb{N}$, tal, que $\mu((0,1]^d) = 1$ então, para todo $E \in \mathcal{I}_{\mathbb{Q}}^d$, vale $\mu(E) = \lambda^{(d)}(E)$. Em particular a restrição de μ ao semianel $\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}^d$ é σ-finita. Como este gera a σ-álgebra de Borel, concluímos, pelos resultados da última seção, que $\mu = \lambda^{(d)}$. Note-se, porém, que isto não prova a existência de uma medida invariante à translação em $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, mas somente que a única "candidata" a tal é a medida de Lebesgue-Borel. No presente parágrafo mostraremos que $\lambda^{(d)}$ é, de fato, invariante à translação. Como consequência disso, podemos *definir* a medida Lebesgue-Borel $\lambda^{(d)}$ como sendo a única medida em $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ que é invariante à translação e normalizada nos cubos unitários (isto é, vale $\lambda^{(d)}((0,1]^d) = 1$). Note-se aqui que a definição de medidas por invariância (com respeito a uma operação de grupo[2]) e normalização é explorada na teoria das "medidas de Haar".

Proposição 135 *A medida de Lebesgue-Borel $\lambda^{(d)}$, $d \in \mathbb{N}$, é a única medida μ em $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ invariante à translação tal, que $\mu((0,1]^d) = 1$.*

Demonstração: Recorde-se que a Lebesgue-Borel $\lambda^{(d)}$ ser invariante à translação corresponde a que, para todo $x \in \mathbb{R}^d$, valha

$$\theta_{x*}(\lambda^{(d)}) = \lambda^{(d)} .$$

Ambas medidas nesta última igualdade são σ-finitas em $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}^d$. Como este semianel gera $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, basta então mostrar que, para todo $E \in \mathcal{I}_{\mathbb{R}}^d$, vale

$$[\theta_{x*}(\lambda^{(d)})](E) = \lambda^{(d)}(E) .$$

Mas temos que

$$[\theta_{x*}(\lambda^{(d)})](E) = \lambda^{(d)}(\theta_{-x}(E))$$

e, para $E \in \mathcal{I}_{\mathbb{R}}^d$,

$$\lambda^{(d)}(\theta_{-x}(E)) = \lambda^{(d)}(E)$$

segue da definição das translações de subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ e da definição da pré-medida de Lebesgue: Note-se que o paralelepípedo $E \in \mathcal{I}_{\mathbb{R}}^d$ tem lados com comprimentos idênticos aos comprimentos dos lados do paralelepípedo transladado $\theta_{-x}(E) \in \mathcal{I}_{\mathbb{R}}^d$. Assim, a medida de Lebesgue-Borel é invariante à translação. Pelo Corolário 109 esta é a unica medida μ invariante à translação em $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tal, que $\mu((0,1]^d) = 1$. ■

[2] O grupo abeliano $\mathbb{R}^d$, no caso da medida de Lebesgue-Borel.

Corolário 136 *Se μ é uma medida invariante à translação em $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $d \in \mathbb{N}$, tal, que $\mu((0,1]^d) < \infty$, então tem-se*

$$\mu = \mu((0,1]^d)\lambda^{(d)} .$$

Demonstração: Seja uma medida μ em $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ invariante à translação. Se $\mu((0,1]^d) = 0$ é fácil ver que $\mu(\mathbb{R}^d) = 0$. Portanto, neste caso especial, esta medida é identicamente nula e o corolário segue trivialmente. Se $\mu((0,1]^d) \in (0,\infty)$, então

$$\tilde{\mu} \doteq \mu((0,1]^d)^{-1}\mu$$

define uma nova medida em $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ invariante à translação. Por construção, tem-se

$$\tilde{\mu}((0,1]^d) = 1 .$$

Logo, pela última proposição, vale $\tilde{\mu} = \lambda^{(d)}$. ■

Veremos no parágrafo a seguir que a unicidade e invariância à translação da medida de Lebesgue-Borel já implicam a invariância desta com respeito a qualquer outro movimento (ou seja, transformação que preserva distâncias Euclidianas).

1.10.2 Forma geral de um movimento e invariância das medidas de Lebesgue-Borel com respeito a movimentos.

A seguir mostraremos a invariância da medida de Lebesgue-Borel $\lambda^{(d)}$, $d \in \mathbb{N}$, com relação a movimentos arbitrários (e não somente com relação a translações). Para tanto, determinaremos de modo mais explícito a forma geral de um movimento $\beta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. Consideraremos primeiro o caso especial de um movimento β tal, que $\beta(0) = 0$. Neste caso, note-se em particular que, para todo $x \in \mathbb{R}^d$, vale

$$\|\beta(x)\|_{\mathrm{e}} = \|\beta(x) - \beta(0)\|_{\mathrm{e}} = \|x - 0\|_{\mathrm{e}} = \|x\|_{\mathrm{e}} .$$

Definição 137 (produto escalar) *Para todo $x, x' \in \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, defina*

$$\langle x, x' \rangle \doteq x_1 x_1' + \cdots + x_d x_d' .$$

A quantidade $\langle x, x' \rangle \in \mathbb{R}$ é chamada "produto escalar Euclidiano" dos vetores x, x'.

Note-se que, para todo $x, x' \in \mathbb{R}^d$ fixo, as funções $\tilde{x} \mapsto \langle \tilde{x}, x' \rangle$ e $\tilde{x} \mapsto \langle x, \tilde{x} \rangle$, de $\mathbb{R}^d$ em $\mathbb{R}$, são lineares. Observe-se também que

$$\|x\|_{\mathrm{e}}^2 = \langle x, x \rangle$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$. Note-se ainda que, para todo $x, x' \in \mathbb{R}^d$, vale

$$\langle x, x' \rangle = \frac{1}{4}\|x + x'\|_{\mathrm{e}}^2 - \frac{1}{4}\|x - x'\|_{\mathrm{e}}^2 .$$

Esta última identidade é conhecida como "identidade da polarização" do produto escalar Euclidiano.

Lema 138 *Seja $\beta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, um movimento tal, que $\beta(0) = 0$. Então, para todo $x, x' \in \mathbb{R}^d$, vale*

$$\langle \beta(x), \beta(x') \rangle = \langle x, x' \rangle .$$

Demonstração: Pela hipótese do lema e definição do produto escalar, para todo $x, x' \in \mathbb{R}^d$, tem-se:

$$\begin{aligned} \|\beta(x) - \beta(x')\|_{\mathrm{e}}^2 &= \langle \beta(x) - \beta(x'), \beta(x) - \beta(x') \rangle \\ &= \langle \beta(x), \beta(x) \rangle - 2 \langle \beta(x), \beta(x') \rangle + \langle \beta(x'), \beta(x') \rangle \\ &= \|\beta(x)\|_{\mathrm{e}}^2 + \|\beta(x')\|_{\mathrm{e}}^2 - 2 \langle \beta(x), \beta(x') \rangle \ . \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \langle \beta(x), \beta(x') \rangle &= \frac{1}{2} \left[\|\beta(x)\|_{\mathrm{e}}^2 + \|\beta(x')\|_{\mathrm{e}}^2 - \|\beta(x) - \beta(x')\|_{\mathrm{e}}^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\|x\|_{\mathrm{e}}^2 + \|x'\|_{\mathrm{e}}^2 - \|x - x'\|_{\mathrm{e}}^2 \right] = \langle x, x' \rangle \ . \end{aligned}$$

Note-se aqui que a igualdade $\|\beta(x) - \beta(x')\|_{\mathrm{e}}^2 = \|x - x'\|_{\mathrm{e}}^2$, usada para obter a equação acima, corresponde à definição de movimento. ■

Observe-se que o último lema não segue diretamente da identidade da polarização. Isto seria o caso se soubéssemos que β é linear, pois em particular teríamos

$$\|\beta(x) + \beta(x')\|_{\mathrm{e}}^2 = \|\beta(x + x')\|_{\mathrm{e}}^2 = \|x + x'\|_{\mathrm{e}}^2 \ .$$

Mostramos no próximo corolário que movimentos que preservam a origem de $\mathbb{R}^d$ são de fato lineares:

Corolário 139 *Seja $\beta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, um movimento tal, que $\beta(0) = 0$. Então β é uma função linear.*

Demonstração: Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x, x' \in \mathbb{R}^d$ arbitrários Então, pelo último lema, tem-se

$$\begin{aligned} & \|\alpha\beta(x) + \beta(x') - \beta(\alpha x + x')\|_{\mathrm{e}}^2 \\ = \ & \langle \alpha\beta(x) + \beta(x') - \beta(\alpha x + x'), \alpha\beta(x) + \beta(x') - \beta(\alpha x + x') \rangle \\ = \ & \alpha^2 \langle \beta(x), \beta(x) \rangle + \alpha \langle \beta(x), \beta(x') \rangle - \alpha \langle \beta(x), \beta(\alpha x + x') \rangle \\ & + \alpha \langle \beta(x'), \beta(x) \rangle + \langle \beta(x'), \beta(x') \rangle - \langle \beta(x'), \beta(\alpha x + x') \rangle \\ & - \alpha \langle \beta(\alpha x + x'), \beta(x) \rangle - \langle \beta(\alpha x + x'), \beta(x') \rangle + \langle \beta(\alpha x + x'), \beta(\alpha x + x') \rangle \\ = \ & \alpha^2 \langle x, x \rangle + \alpha \langle x, x' \rangle - \alpha \langle x, \alpha x + x' \rangle \\ & + \alpha \langle x', x \rangle + \langle x', x' \rangle - \langle x', \alpha x + x' \rangle \\ & - \alpha \langle \alpha x + x', x \rangle - \langle \alpha x + x', x' \rangle + \langle \alpha x + x', \alpha x + x' \rangle \\ = \ & \langle \alpha x + x' - (\alpha x + x'), \alpha x + x' - (\alpha x + x') \rangle \\ = \ & \|\alpha x + x' - (\alpha x + x')\|_{\mathrm{e}}^2 = 0 \ . \end{aligned}$$

Isto é, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x, x' \in \mathbb{R}^d$, tem-se

$$\alpha\beta(x) + \beta(x') = \beta(\alpha x + x') \ .$$

No caso especial $\alpha = 1$, a igualdade acima diz que β é aditiva:

$$\beta(x) + \beta(x') = \beta(x + x') \ , \quad x, x' \in \mathbb{R}^d \ .$$

Como $\beta(0) = 0$, por hipótese, vale no caso especial $x' = 0$,

$$\beta(\alpha x) = \alpha\beta(x) \ , \qquad x \in \mathbb{R}^d, \ \alpha \in \mathbb{R} \ .$$

As duas últimas igualdades correspondem à linearidade de β. ■

Funções lineares $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, que preservam a norma euclidiana $\|\cdot\|_{\mathrm{e}}$ são chamadas "transformações ortogonais". Assim, movimentos β em $\mathbb{R}^d$ tais, que $\beta(0) = 0$ são sempre transformações ortogonais. Com o último corolário obtemos a seguinte caracterização de movimentos genéricos:

Proposição 140 (forma geral de um movimento) *Seja β um movimento arbitrário (isto é, $\beta(0)$ não é necessariamente igual a 0) em $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Então existe uma transformação ortogonal $O_\beta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ única tal, que*

$$\beta = \theta_{\beta(0)} \circ O_\beta \ .$$

Demonstração: Seja agora β um movimento qualquer em $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, e defina $\tilde{\beta} \doteq \theta_{-\beta(0)} \circ \beta$. Por construção, $\tilde{\beta}$ é um movimento tal, que $\tilde{\beta}(0) = 0$ e é, portanto, uma transformação ortogonal tal, que

$$\beta = \theta_{\beta(0)} \circ \tilde{\beta} \ .$$

Note-se aqui que $\theta_{\beta(0)} \circ \theta_{-\beta(0)}$ é a função identidade em $\mathbb{R}^d$. Seja $O_\beta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ uma (supostamente outra) transformação ortogonal tal, que $\beta = \theta_{\beta(0)} \circ O_\beta$. Então vale

$$\theta_{\beta(0)} \circ O_\beta = \theta_{\beta(0)} \circ \tilde{\beta} \ .$$

Como $\theta_{\beta(0)}$ é função injetora, segue que $O_\beta = \tilde{\beta}$. ■

Uma consequência importante da caracterização acima de movimentos é a seguinte:

Exercício 141 *Mostre que, para todo movimento β em $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, e todo vetor $x \in \mathbb{R}^d$, existe um segundo vetor $\tilde{x} \in \mathbb{R}^d$ tal, que*

$$\beta \circ \theta_x = \theta_{\tilde{x}} \circ \beta \ .$$

Proposição 142 *Seja $d \in \mathbb{N}$ qualquer. Para todo movimento β em $\mathbb{R}^d$ tem-se que $\beta_*(\lambda^{(d)}) = \lambda^{(d)}$, ou seja, a medida de Lebesgue-Borel em d dimensões é invariante com relação a qualquer movimento.*

Demonstração: Seja β um movimento qualquer em $\mathbb{R}^d$.

1. Pela definição de β_*, para todo $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ e todo $x \in \mathbb{R}^d$, tem-se

   $$[\beta_*(\lambda^{(d)})](\theta_x(E)) = \lambda^{(d)}(\beta^{-1} \circ \theta_x(E)).$$

   Observando que a inversa β^{-1} de um movimento β é necessariamente também um movimento, pelo último exercício, para todo $x \in \mathbb{R}^d$, existe $\tilde{x} \in \mathbb{R}^d$ tal, que, para todo $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

   $$\begin{aligned} [\beta_*(\lambda^{(d)})](\theta_x(E)) &= \lambda^{(d)}(\theta_{\tilde{x}} \circ \beta^{-1}(E)) = [\theta_{-\tilde{x}*}(\lambda^{(d)})](\beta^{-1}(E)) \\ &= \lambda^{(d)}(\beta^{-1}(E)) = [\beta_*(\lambda^{(d)})](E) \ . \end{aligned}$$

   Assim, $\beta_*(\lambda^{(d)})$ é medida invariante por translação. Observe-se que na terceira igualdade da equação acima usamos a invariância à translação da medida de Lebesgue-Borel $\lambda^{(d)}$.

2. Para todo movimento β em $\mathbb{R}^d$, existe $E_\beta \in \mathcal{I}^d_{\mathbb{R}}$ tal, que $\beta^{-1}((0,1]^d) \subseteq E_\beta$. Com isso, tem-se $[\beta_*(\lambda^{(d)})]((0,1]^d) < \infty$. Em particular, para todo movimento β em $\mathbb{R}^d$, existe uma constante $\alpha_\beta \in [0,\infty)$ tal, que

   $$\beta_*(\lambda^{(d)}) = \alpha_\beta \lambda^{(d)} \ .$$

3. Para mostrar que $\alpha_\beta = 1$ aplicaremos a medida $\beta_*(\lambda^{(d)})$ sobre o Boreliano

   $$\overline{B}_1(0) \doteq \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ \|x\|_{\mathrm{e}} \leq 1\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \ .$$

   Este subconjunto é Boreliano, pois é fechado. Como mostrado acima, para todo movimento β em $\mathbb{R}^d$, existe uma transformação ortogonal O_β tal, que $\beta = \theta_{\beta(0)} \circ O_\beta$. Deste modo, tem-se

   $$\begin{aligned} [\beta_*(\lambda^{(d)})](\overline{B}_1(0)) &= [(\theta_{\beta(0)} \circ O_\beta)_*(\lambda^{(d)})](\overline{B}_1(0)) = \lambda^{(d)}\left(\left(\theta_{\beta(0)} \circ O_\beta\right)^{-1}(\overline{B}_1(0))\right) \\ &= \lambda^{(d)}(O_\beta^{-1} \circ \theta_{-\beta(0)}(\overline{B}_1(0))) = [O_{\beta*}(\lambda^{(d)})](\theta_{-\beta(0)}(\overline{B}_1(0))) \\ &= [O_{\beta*}(\lambda^{(d)})](\overline{B}_1(0)) \ . \end{aligned}$$

A última igualdade segue do fato de $O_{\beta *}(\lambda^{(d)})$ ser medida invariante por translação, já que O_β é um movimento. Note-se que a função inversa de uma transformação ortogonal é, ela mesma, também uma transformação ortogonal.

4. Observe-se, por fim, que o subconjunto $\overline{B}_1(0)$ (bola fechada de raio unitário centrada na origem de $\mathbb{R}^d$) é invariante com relação a transformações ortogonais. Portanto, tem-se

$$\begin{aligned}[\beta_*(\lambda^{(d)})](\overline{B}_1(0)) &= [O_{\beta *}(\lambda^{(d)})](\overline{B}_1(0)) = \lambda^{(d)}(O_\beta^{-1}(\overline{B}_1(0))) \\ &= \lambda^{(d)}(\overline{B}_1(0)) \ .\end{aligned}$$

Note-se que $\lambda^{(d)}(\overline{B}_1(0)) \in [2^d\sqrt{d^{-d}}, 2^d] \subseteq (0, \infty)$, pois $\overline{B}_1(0)$ contém um cubo de lado $2\sqrt{d^{-1}}$ e está contido um cubo de lado $2 + \varepsilon$, para um $\varepsilon > 0$ qualquer. Deste modo, $\alpha_\beta = 1$ para todo movimento β em $\mathbb{R}^d$ a proposição segue.

■

Com os resultados deste parágrafo concluímos:

Corolário 143 *Para toda dimensão $d \in \mathbb{N}$, o "problema da medida" enunciado da seção 1.1 tem solução única na σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.*

1.10.3 O comportamento das medidas de Lebesgue-Borel com respeito a transformações lineares

Neste parágrafo estudaremos o comportamento da medida de Lebesgue-Borel $\lambda^{(d)}$, $d \in \mathbb{N}$, com respeito a transformações lineares inversíveis gerais $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. Note-se que estas transformações são sempre mensuráveis, pois são contínuas. As transformações ortogonais consideradas no último parágrafo são um caso especial de transformações lineares inversíveis. Neste caso particular, vimos que $L_*(\lambda^{(d)}) = \lambda^{(d)}$, já que transformações ortogonais são movimento. Obviamente, nem toda transformação linear é movimento (pois, em geral, não preserva distâncias). Porém, como será demonstrado, valerá a igualdade $L_*(\lambda^{(d)}) = \alpha_L \lambda^{(d)}$ para uma constante $\alpha_L \in [0, \infty)$ explicitamente definida em função de L.

Definição 144 (transformações lineares inversíveis elementares) *Seja $d \in \mathbb{N}$ arbitrário. Definimos as seguintes transformações lineares $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ inversíveis:*

i.) Permutação de coordenadas. *Para $d \geq 2$ e todo $k, l = 1, \ldots, d$, $k < l$, a transformação linear $P_{kl} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ é definida por:*

$$P_{kl}(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_l, \ldots, x_d) \doteq (x_1, \ldots, x_l, \ldots, x_k, \ldots, x_d) \ .$$

ii.) Mudança de escala na primeira coordenada. *Para toda constante $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, a transformação linear $S_\alpha : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ é definida por:*

$$S_\alpha(x_1, \ldots, x_d) \doteq (\alpha x_1, x_2, \ldots, x_d) \ .$$

iii.) Cisalhamento na primeira coordenada. *Para $d \geq 2$, as transformações lineares $C_\pm : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ são definidas por:*

$$C_\pm(x_1, \ldots, x_d) \doteq (x_1 \pm x_2, x_2, \ldots, x_d) \ .$$

Para $d = 1$, $C_\pm(x) = x$.

As transformações lineares definidas em i.), ii.) e iii.) são chamadas "transformações lineares inversíveis elementares".

Observe-se que i.) $P_{kl}^{-1} = P_{kl}$, $k, l = 1, \ldots, d$, $k < l$, ii.) $S_\alpha^{-1} = S_{\alpha^{-1}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, e $C_\pm^{-1} = C_\mp$.

O seguinte lema é bem conhecido em álgebra linear e se refere à teoria das formas normais de Jordan:

Lema 145 (estrutura geral de uma transformação linear inversível) *A transformação linear $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, é inversível se, e somente se, for uma composição de transformações lineares inversíveis elementares.*

Exercício 146 *Prove que para toda transformações lineares inversíveis elementares $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, vale*

$$[L_*(\lambda^{(d)})]((0,1]^d) = |\det(L)|^{-1},$$

onde $\det(L) \in \mathbb{R}$ *denota o determinante de L.*

Sugestão: No caso de cisalhamentos, prove primeiro a afirmação acima para o caso especial $d = 2$ usando recobrimentos do paralelogramo $L((0,1]^2)$ por quadrados de lado arbitrariamente pequeno. Em seguida, generalize esta prova para $d > 2$.

Proposição 147 *Seja $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, uma transformação linear inversível qualquer. Então vale*

$$L_*(\lambda^{(d)}) = |\det(L)|^{-1}\lambda^{(d)} .$$

Demonstração: A demonstração desta proposição é muito semelhante à da Proposição 142. Omitiremos, portanto, argumentos já explicados nesta última.

1. Pela definição de L_* e linearidade da inversa L^{-1}, para todo $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ e todo $x \in \mathbb{R}^d$, tem-se

$$\begin{aligned} [L_*(\lambda^{(d)})](\theta_x(E)) &= \lambda^{(d)}(L^{-1} \circ \theta_x(E)) = \lambda^{(d)}(\theta_{L^{-1}(x)} \circ L^{-1}(E)) \\ &= [\theta_{-L^{-1}(x)*}(\lambda^{(d)})](L^{-1}(E)) = \lambda^{(d)}(L^{-1}(E)) \\ &= [L_*(\lambda^{(d)})](E) . \end{aligned}$$

   Assim, $L_*(\lambda^{(d)})$ é medida invariante por translação. Na quarta igualdade da equação acima usamos a invariância à translação da medida de Lebesgue-Borel $\lambda^{(d)}$.

2. Note-se que existe $E_L \in \mathcal{I}_{\mathbb{R}}^d$ tal, que $L^{-1}((0,1]^d) \subseteq E_L$ e, portanto, tem-se que $[L_*(\lambda^{(d)})]((0,1]^d) < \infty$. Em particular, existe uma constante $\alpha_L \in [0, \infty)$ tal, que

$$L_*(\lambda^{(d)}) = \alpha_L \lambda^{(d)} .$$

   Como $\lambda^{(d)}((0,1]^d) = 1$, vale

$$\alpha_L = [L_*(\lambda^{(d)})]((0,1]^d) .$$

   Recorde-se que se $L_1, \ldots, L_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, são transformações lineares então vale

$$\det(L_1 \circ \cdots \circ L_n) = \det(L_1) \cdots \det(L_n) .$$

3. Recorde-se também, que, pelo Exercício 99, tem-se

$$(L_1 \circ \cdots \circ L_n)_* = L_{1*} \circ \cdots \circ L_{n*} \ .$$

Com estas duas igualdades basta provar que

$$[L_*(\lambda^{(d)})]((0,1]^d) = |\det(L)|^{-1}$$

para qualquer transformação linear inversível elementar, o que já foi feito no último exercício.

■

Corolário 148 *Seja $O : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, uma transformação ortogonal. Então $|\det(O)| = 1$.*

Obviamente, existem formas muito mais diretas para demonstrar que

$$|\det(O)| = 1$$

se O é uma transformação ortogonal. O corolário acima foi somente enunciado para ilustrar o fato de que podem existir relações interessantes e úteis entre temas aparentemente muito distintos em matemática (neste caso, a teoria de medidas e a álgebra linear).

Definição 149 (conjunto de Cantor) *O "conjunto de Cantor" é o subconjunto de $\mathbb{R}$ definido por:*

$$\mathfrak{C} \doteq [0,1] \backslash \sup_{n\in\mathbb{N}} \left[\bigcup_{k=0}^{3^{n-1}-1} \left(\frac{3k+1}{3^n}, \frac{3k+2}{3^n}\right) \right] \subseteq \mathbb{R} \ .$$

Alternativamente, $\mathfrak{C}$ pode ser definido pela seguinte interseção infinita:

$$\mathfrak{C} \doteq \inf_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{C}_n \subseteq \mathbb{R} \ ,$$

onde $\mathfrak{C}_1 \doteq [0,1]$ e, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathfrak{C}_{n+1} \doteq \frac{1}{3}\mathfrak{C}_n \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\mathfrak{C}_n\right) \ .$$

A seguir ilustrarmos o uso da última proposição determinando a medida de Lebegue do conjunto de Cantor pela propriedade de "autosimilitude" deste conjunto.

O conjunto de Cantor é um exemplo de subconjunto Boreliano dos reais, pois é fechado. Note-se que ele é não vazio: por exemplo, $0 \in \mathfrak{C}$. Com efeito, o conjunto de Cantor é um conjunto infinito, pois todo limite do tipo

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k 3^{-k} \in [0,1] \ ,$$

é um ponto em $\mathfrak{C}$, onde $a_k \in \{0,2\}$, $k \in \mathbb{N}$. Vê-se facilmente que há infinitos destes limites. O conjunto $\mathfrak{C}_n \subseteq [0,1]$ é, para um $n \in \mathbb{N}$ fixo, o conjunto de todos os limites acima com $a_k \in \{0,2\}$ se $k = 1,2,\ldots,n-1$ e $a_k = \{0,1,2\}$ se $k \geq n$. Para se convencer disto, considere, por exemplo, a representação em base 3 dos números reais.

Seja a função (de Cantor) $c : 2^{\mathbb{N}} \to \mathfrak{C}$, por

$$c(E) \doteq 2 \sum_{k\in E} 3^{-k} \in \mathfrak{C} \ , \quad E \in 2^{\mathbb{N}} \ .$$

Esta função é bijetora. Em particular $\mathfrak{C}$ tem a mesma cardinalidade de $2^{\mathbb{N}}$ (ou seja, já uma bijeção entre estes dois conjuntos). Note-se que, para todo conjunto M, não há bijeção entre M e 2^M. Em particular, o conjunto de Cantor não é enumerável[3].

É facil ver que subconjuntos enumeráveis de $\mathbb{R}$ são Borelianos e têm medida de Lebesgue nula. Isto é uma consequência da σ-subaditividade de medidas e do fato de subconjuntos de $\mathbb{R}$ que contém um só ponto terem medida de Lebesgue nula. Surge então a questão se estes são os únicos Borelianos de $\mathbb{R}$ com medida de Lebesgue nula. Mostraremos a seguir que este não é o caso, pois o conjunto de Cantor tem medida de Lebesgue nula. Em dimensão superior a 1 a existência de Borelianos não enumeráveis com medida de Lebesgue nula é trivial, pois, por exemplo, o subconjunto

$$(-1,1) \times \{0\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

tem medida de Lebesgue nula e é claramente não enumerável: Note-se que $\tanh : \mathbb{R} \to (-1,1)$ é uma bijeção e, portanto, $(-1,1)$ (e, logo, também $(-1,1) \times \{0\}$) tem a mesma cardinalidade de $\mathbb{R}$, que não é enumerável.

Observe-se também que, como discutiremos mais adiante, a existência de Borelianos não enumeráveis com medida de Lebesgue nula está fortemente relacionado ao fato de existirem subconjuntos Lebesgue-mensuráveis que não são Borelianos.

Corolário 150 $\lambda^{(1)}(\mathfrak{C}) = 0$.

Demonstração: Observe-se que, como a sequência $\mathfrak{C}_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, é decrescente

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C} &= \inf_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{C}_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{C}_{n+1} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{C}_2 \cap \mathfrak{C}_{n+1} \\
&= \inf_{n\in\mathbb{N}} ([0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1]) \cap \mathfrak{C}_{n+1} \\
&= \inf_{n\in\mathbb{N}} ([0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1]) \cap (\frac{1}{3}\mathfrak{C}_n \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\mathfrak{C}_n)) \\
&= \inf_{n\in\mathbb{N}} ([0,\frac{1}{3}] \cap \frac{1}{3}\mathfrak{C}_n) \cup ([\frac{2}{3},1] \cap (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\mathfrak{C}_n)) \ .
\end{aligned}$$

Como $[0,\frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3},1]$ são disjuntos, obtemos que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C} &= \inf_{n\in\mathbb{N}} ([0,\frac{1}{3}] \cap \frac{1}{3}\mathfrak{C}_n) \cup \inf_{n\in\mathbb{N}} ([\frac{2}{3},1] \cap (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\mathfrak{C}_n)) \\
&= \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{3}([0,1] \cap \mathfrak{C}_n) \cup \inf_{n\in\mathbb{N}} (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}[0,1]) \cap (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\mathfrak{C}_n) \\
&= \frac{1}{3} \inf_{n\in\mathbb{N}} ([0,1] \cap \mathfrak{C}_n) \cup \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \inf_{n\in\mathbb{N}} ([0,1] \cap \mathfrak{C}_n)\right] \\
&= \frac{1}{3} \inf_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{C}_n \cup \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \inf_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{C}_n\right] = \frac{1}{3}\mathfrak{C} \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\mathfrak{C}) \ .
\end{aligned}$$

Disto concluímos, pela invariância à translação e subaditividade de $\lambda^{(1)}$, que vale

$$\lambda^{(1)}(\mathfrak{C}) \leq 2\lambda^{(1)}(\frac{1}{3}\mathfrak{C}) = 2[L_*(\lambda^{(1)})](\mathfrak{C}) \ ,$$

onde $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a transformação linear $x \mapsto 3x$. Pela última proposição, segue então que

$$\lambda^{(1)}(\mathfrak{C}) \leq \frac{2}{3}\lambda^{(1)}(\mathfrak{C}) \ .$$

[3]Este é o argumento usado por Cantor para provar que os reais possuem um subconjuntos não enumerável e, portanto, não são enumeráveis.

Como $0 \leq \lambda^{(1)}(\mathfrak{C}) \leq \lambda^{(1)}([0,1]) = 1$, tem-se $\lambda^{(1)}(\mathfrak{C}) = 0$. ■

Como anunciado acima, exploramos, a título de ilustração do uso da última proposição, a autosimilitude do conjunto de Cantor, isto é, a identidade

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{3}\mathfrak{C} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\mathfrak{C}\right) ,$$

para provar que $\lambda^{(1)}(\mathfrak{C}) = 0$. Note-se, porém, que há outras maneiras mais contrutivas de provar tal fato. Por exemplo, pela monotonicidade das medidas, observando-se que $\lambda^{(1)}(\mathfrak{C}_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ e $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{C}_n$, $n \in \mathbb{N}$, também conclui-se rapidamente que $\lambda^{(1)}(\mathfrak{C}) = 0$.

1.10.4 As medidas de Stieltjes-Lebesgue como medidas regulares

No presente parágrafo discutiremos alguns resultados sobre a aproximação de conjuntos mensuráveis com respeito a medidas de Stieltjes-Lebesgue por subconjuntos abertos ou fechados. Tais resultados se referem à dita "regularidade" destas medidas, propriedade importante de certas medidas que será discutida em um âmbito geral mais adiante.

Proposição 151 (regularidade exterior das medidas de Stieltjes-Lebesgue) *Seja* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_{\mu_F^*}, \mu_F^*)$, $d \in \mathbb{N}$, *um espaço de medida de Stieltjes-Lebesgue qualquer. Para todo* $E \in \mathcal{M}_{\mu_F^*}$ *e todo* $\varepsilon > 0$, *existe um aberto* $O^{(\varepsilon)} \in \tau_{\mathbb{R}^d} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, *tal, que* $E \subseteq O^{(\varepsilon)}$ *e* $\tilde{\lambda}^{(d)}(O^{(\varepsilon)} \setminus E) \leq \varepsilon$.

Demonstração:

1. Seja primeiro um $E \in \mathcal{M}_{\mu_F^*}$ qualquer tal, que $\mu_F^*(E) < \infty$. Então, pela definição da medida de Stieltjes-Lebesgue μ_F^*, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma sequência $E_k^{(\varepsilon)} \in \mathcal{I}_{\mathbb{R}}^d$, $k \in \mathbb{N}$, tal, que $E \subseteq \sup_{k\in\mathbb{N}} E_k^{(\varepsilon)}$ e
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_F(E_k^{(\varepsilon)}) \leq \mu_F^*(E) + \frac{\varepsilon}{2} .$$

2. Seja, para todo $k \in \mathbb{N}$, $\tilde{E}_k^{(\varepsilon)} \in \mathcal{I}_{\mathbb{R}}^d$ tal, que $E_k^{(\varepsilon)} \subseteq \tilde{E}_k^{(\varepsilon)\circ}$ e $\mu_F(\tilde{E}_k^{(\varepsilon)}) \leq \mu_F(E_k^{(\varepsilon)}) + \varepsilon 2^{-k-1}$. Observe-se que tais $\tilde{E}_k^{(\varepsilon)}$, $k \in \mathbb{N}$, existem, pela continuidade à direita a função F que define a pré-medida μ_F. Recorde-se aqui que $\tilde{E}_k^{(\varepsilon)\circ}$ denota o interior de $\tilde{E}_k^{(\varepsilon)}$ (isto é, o maior aberto contido em $E_k^{(\varepsilon)}$). De modo mais explícito, para $E = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d]$, tem-se $E^\circ = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_d, b_d)$.

3. Defina o subconjunto aberto
$$O^{(\varepsilon)} \doteq \sup_{k\in\mathbb{N}} \tilde{E}_k^{(\varepsilon)\circ} .$$

   Por construção, vale $E \subseteq O^{(\varepsilon)}$ e
$$\begin{aligned} \mu_F^*(O^{(\varepsilon)}) &\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \left[\mu_F(E_k^{(\varepsilon)}) + \varepsilon 2^{-k-1}\right] = \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_F(E_k^{(\varepsilon)}) \\ &\leq \varepsilon + \mu_F^*(E) . \end{aligned}$$

   Assim, para todo subconjunto Lebesgue-mensurável $E \in \mathcal{M}_{\mu_F^*}$ tal, que $\mu_F^*(E) < \infty$ e todo $\varepsilon > 0$, existe um aberto $O^{(\varepsilon)} \subseteq \mathbb{R}^d$ tal, que $E \subseteq O^{(\varepsilon)}$ e $\mu_F^*(O^{(\varepsilon)} \setminus E) \leq \varepsilon$.

4. Seja agora $E \in \mathcal{M}_{\mu_F^*}$ qualquer (isto é, não necessariamente vale $\mu_F^*(E) < \infty$). Pelo resultado anterior, para todo $\varepsilon > 0$ e todo $k \in \mathbb{N}$, existe um aberto $O^{(\varepsilon,k)} \subseteq \mathbb{R}^d$ tal, que $E \cap [-k,k]^d \subseteq O^{(\varepsilon,k)}$ e
$$\mu_F^*(O^{(\varepsilon,k)} \backslash (E \cap [-k,k]^d)) \leq \varepsilon 2^{-k} .$$
Seja o aberto $O^{(\varepsilon)} \doteq \sup_{k\in\mathbb{N}} O^{(\varepsilon,k)}$. Obviamente vale $E \subseteq O^{(\varepsilon)}$ e
$$\begin{aligned}
\mu_F^*(O^{(\varepsilon)} \backslash E) &= \mu_F^*\left(\left[\sup_{k\in\mathbb{N}} O^{(\varepsilon,k)}\right] \backslash \left[\sup_{\tilde{k}\in\mathbb{N}}(E \cap [-\tilde{k},\tilde{k}]^d)\right]\right) \\
&= \mu_F^*\left(\sup_{k\in\mathbb{N}}\left[O^{(\varepsilon,k)} \backslash \left[\sup_{\tilde{k}\in\mathbb{N}}(E \cap [-\tilde{k},\tilde{k}]^d)\right]\right]\right) \\
&\leq \mu_F^*\left(\sup_{k\in\mathbb{N}}\left[O^{(\varepsilon,k)} \backslash (E \cap [-k,k]^d)\right]\right) \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_F^*(O^{(\varepsilon,k)} \backslash (E \cap [-k,k]^d)) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon 2^{-k} = \varepsilon .
\end{aligned}$$

■

A proposição acima diz que podemos aproximar com precisão arbitrária, no sentido da medida de Stieltjes-Lebesgue μ_F^*, um subconjunto qualquer em $\mathcal{M}_{\mu_F^*}$, mesmo se este tem conteúdo infinito, por um subconjunto aberto que o contenha. A seguir mostraremos que uma propriedade análoga é válida para subconjuntos fechados contidos em subconjuntos em $\mathcal{M}_{\mu_F^*}$:

Proposição 152 (regularidade interior das medidas de Stieltjes-Lebesgue) *Seja* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_{\mu_F^*}, \mu_F^*)$*,* $d \in \mathbb{N}$*, um espaço de medida de Stieltjes-Lebesgue qualquer. Para todo* $E \in \mathcal{M}_{\mu_F^*}$ *e todo* $\varepsilon > 0$*, existe um fechado* $C^{(\varepsilon)} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ *tal, que* $C^{(\varepsilon)} \subseteq E$ *e* $\mu_F^*(E \backslash C^{(\varepsilon)}) \leq \varepsilon$*.*

Demonstração: Seja $E \in \mathcal{M}_{\mu_F^*}$ e $\varepsilon > 0$. Então, pela última proposição, existe um aberto $O^{(\varepsilon)} \in \tau_{\mathbb{R}^d}$ tal, que $E^c \subseteq O^{(\varepsilon)}$ e $\mu_F^*(O^{(\varepsilon)} \backslash E^c) \leq \varepsilon$. Com isso, usando a identidade $E \backslash B = B^c \backslash E^c$, concluímos que o fechado $C^{(\varepsilon)} \doteq O^{(\varepsilon)c}$ está contido em E e vale $\mu_F^*(E \backslash C^{(\varepsilon)}) \leq \varepsilon$. ■

Uma consequência direta das duas últimas proposições é a seguinte caracterização das medidas de Stieltjes-Lebesgue através das medidas de Stieltjes-Borel correspondentes:

Corolário 153 *Seja* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_{\mu_F^*}, \mu_F^*)$*,* $d \in \mathbb{N}$*, um espaço de medida de Stieltjes-Lebesgue qualquer. Para todo* $E \in \mathcal{M}_{\mu_F^*}$
$$\begin{aligned}
\mu_F^*(E) &= \inf\{\mu_F(O) \ : \ O \in \tau_{\mathbb{R}^d} , \ E \subseteq O\} \\
&= \sup\{\mu_F(C) \ : \ C \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d) , \ C \subseteq E\} .
\end{aligned}$$

A primeira igualdade no último corolário se refere à "regularidade exterior" de uma medida, e a segunda igualdade à "regularidade interior". Medidas que satisfazem às duas igualdades do corolário acima são chamadas "normais". Estudaremos mais adiante propriedades importantes das medidas gerais com tais propriedades em σ-álgebras de Borel.

Também é possível representar as medidas de Stieltjes-Lebesgue através do supremo de medidas de Stieltjes-Borel de compactos:

Exercício 154 *Seja* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_{\mu_F^*}, \mu_F^*)$*,* $d \in \mathbb{N}$*, um espaço de medida de Stieltjes-Lebesgue qualquer. Mostre que, para todo* $E \in \mathcal{M}_{\mu_F^*}$*, tem-se*
$$\mu_F^*(E) = \sup\{\mu_F(K) \ : \ K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d) , \ K \subseteq E\} .$$

Recorde-se que $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ denota a família dos subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^d$. Medidas regulares que satisfazem à igualdade no exercício acima são chamadas "tight". Note-se aqui que alguns autores não distiguem entre as noções "regularidade interior" e "tightness" e somente consideram o caso de medidas "tight", dando a estas o nome de medidas "interiormente regulares". De fato, este é o caso mais relevante.

1.10.5 Os conjuntos Lebesgue-mensuráveis

Neste parágrafo determinaremos a forma geral de um conjunto mensurável em um espaço de medida de Stieltjes-Lebesgue qualquer. Em particular serão considerados os conjuntos Lebesgue-mensuráveis em qualquer dimensão. Neste caso específico, mostraremos ainda que a σ-álgebra correspondente é invariante com relação à movimentos, assim como a respectiva medida de Lebesgue. Isto segue da forma geral de conjuntos Lebesgue-mensuraveis derivada abaixo e implica, entre outras coisas, como será discutido a seguir, que o problema da medida clássico (como descrito na Seção **??**) tem solução única também em nas σ-álgebras $\mathcal{M}_{\lambda^{(d)*}} \subseteq 2^{\mathbb{R}^d}$, $d \in \mathbb{N}$, de conjuntos Lebesgue-mensuráveis.

Com efeito, recorde-se que, para todo $d \in \mathbb{N}$, existe um subconjunto Lebesgue-mensurável de medida de Lebesgue nula, cuja cardinalidade é a mesma dos reais. Por exemplo, para $d = 1$ o conjunto de Cantor tem esta propriedade e, em dimensão $d \geq 2$, o subconjunto

$$\{(x, 0, \ldots, 0) \ : \ x \in (-1, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^d \, .$$

Isto implica que $\mathcal{N}_{\bar{\lambda}^{(d)}}$, e, portanto, também $\mathcal{M}_{\lambda^{(d)*}}$, tem no mínimo a cardinalidade de $2^{\mathbb{R}}$, que é estritamente superior à de $\mathbb{R}$. Mais precisamente, $\mathcal{M}_{\lambda^{(d)*}}$ tem exatamente a mesma cardinalidade de $2^{\mathbb{R}}$, pois $\mathcal{M}_{\lambda^{(d)*}} \subseteq 2^{\mathbb{R}^d}$ tem no máximo a cardinalidade de $2^{\mathbb{R}^d}$ e esta última não depende de $d \in \mathbb{N}$. Em particular, há uma bijeção entre $\mathcal{M}_{\lambda^{(d)*}}$ e $2^{\mathbb{R}^d}$. Dito de outra maneira, até uma transformação bijetiva, $\mathcal{M}_{\lambda^{(d)*}}$ é "tão grande quanto" a σ-álgebra maximal $2^{\mathbb{R}^d}$. Por outro lado, também se sabe[4] que a σ-álgebra dos Borelianos $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tem exatamente a mesma cardinalidade de $\mathbb{R}$. Como não existe bijeção entre $\mathbb{R}$ e seu conjunto potência $2^{\mathbb{R}}$, concluímos que existem muitíssimos subconjuntos Lebesgue-mensuráveis que não são Borelianos e cabe então investigar a forma geral destes novos conjuntos. O mesmo é verdadeiro para qualquer espaço de medida de Stieltjes-Lebesgue $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_{\mu_F^*}, \mu_F^*)$, $d \in \mathbb{N}$. Ademias, mais adiante também demonstraremos que nem todo subconjunto de $\mathbb{R}^d$ é Lebesgue-mensurável (Proposição 166 e Corolário 167), mesmo $\mathcal{M}_{\lambda^{(d)*}}$ tendo a mesma cardinalidade de $2^{\mathbb{R}^d}$.

Mostraremos na seguinte proposição que um conjunto arbritário em $\mathcal{M}_{\mu_F^*}$, onde $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_{\mu_F^*}, \mu_F^*)$, $d \in \mathbb{N}$, é um espaço de medida de Stieltjes-Lebesgue qualquer, é do tipo G_δ e do tipo F_σ (ver Definição 48), até algum conjunto μ_F-nulo. Ou seja, conjuntos μ_F-nulos são os únicos "acréscimos" ou "decréscimos" a serem feitos aos de tipo G_δ e F_σ para se obter os todos outros os conjuntos em $\mathcal{M}_{\mu_F^*}$:

Proposição 155 *Seja $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_{\mu_F^*}, \mu_F^*)$, $d \in \mathbb{N}$, um espaço de medida de Stieltjes-Lebesgue qualquer. Para todo $E \in \mathcal{M}_{\mu_F^*}$, existe um subconjunto de tipo G_δ, $G(E) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, e um de tipo F_σ, $F(E) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, tais, que vale $F(E) \subseteq E \subseteq G(E)$ e*

$$\mu_F(F(E)) = \mu_F(G(E)) = \mu_F^*(E) \quad \textit{com} \quad \mu_F^*(G(E) \backslash E) = \mu_F^*(E \backslash F(E)) = 0 \, .$$

Demonstração: Seja $E \in \mathcal{M}_{\mu_F^*}$ e, para todo $k \in \mathbb{N}$, seja $O^{(1/k)} \in \tau_{\mathbb{R}^d}$ um aberto e $C^{(1/k)} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ um fechado tais, que vale

$$C^{(1/k)} \subseteq E \subseteq O^{(1/k)} \quad \text{e} \quad \mu_F^*(E \backslash C^{(1/k)}), \mu_F^*(O^{(1/k)} \backslash E) \leq \frac{1}{k} \, .$$

[4] A prova deste fato faz uso de indução "transfinita" e está fora do escopo do presente curso.

Observe-se que a existência de tais conjuntos já foi demonstrada acima. Defina o subconjunto G_δ

$$G(E) \doteq \inf_{k\in\mathbb{N}} O^{(1/k)},$$

assim como o subconjunto F_σ

$$F(E) \doteq \sup_{k\in\mathbb{N}} C^{(1/k)} .$$

Por construção, tem-se que $F(E) \subseteq E \subseteq G(E)$. Note-se também que, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\mu_F^*(E\backslash F(E)), \mu_F^*(G(E)\backslash E) \leq \frac{1}{k} .$$

Portanto, vale

$$\mu_F^*(E\backslash F(E)), \mu_F^*(G(E)\backslash E) = 0 .$$

Em particular, tem-se

$$\mu_F(F(E)) = \mu_F(G(E)) = \mu_F^*(E) .$$

■

Note-se que, pela última proposição, todo conjunto em $\mathcal{M}_{\mu_F^*}$ é a união disjunta de um subconjunto F_σ e um subconjunto μ_F-nulo. Como subconjuntos μ_F-nulos e subconjuntos F_σ são casos especias de subconjuntos em $\mathcal{M}_{\mu_F^*}$, toda união disjunta deste tipo é um elemento de em $\mathcal{M}_{\mu_F^*}$. Assim temos a seguinte caracterização da mensurabilidade com respeito à medida exterior μ_F^*, para $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_{\mu_F^*}, \mu_F^*)$, $d \in \mathbb{N}$, um espaço de medida de Stieltjes-Lebesgue qualquer:

Corolário 156 *Seja $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_{\mu_F^*}, \mu_F^*)$, $d \in \mathbb{N}$, um espaço de medida de Stieltjes-Lebesgue qualquer. $E \in 2^{\mathbb{R}^d}$ é um elemento da σ-álgebra $\mathcal{M}_{\mu_F^*}$ de conjuntos μ_F^*-mensuráveis se, e somente se, for a união disjunta de um conjunto μ_F-nulo e um conjunto F_σ.*

Observe-se ainda que, pela Proposição 130, já sabiamos que $\mathcal{M}_{\mu_F^*} = \sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \cup \mathcal{N}_{\mu_F})$. O último corolário representa uma versão mais forte desta propriedade da σ-álgebra $\mathcal{M}_{\mu_F^*}$.

Uma outra consequência importante da última proposição é a invariância por movimentos da σ-álgebra $\mathcal{M}_{\lambda^{(d)*}}$, $d \in \mathbb{N}$, assim como da medida de Lebesgue $\tilde{\lambda}^{(d)}$ correspondente:

Proposição 157 (invariância da medida de Lebesgue com respeito a movimentos) *Para todo $E \in \mathcal{M}_{\lambda^{(d)*}}$, $d \in \mathbb{N}$, e todo movimento β em $\mathbb{R}^d$, vale $\beta(E) \in \mathcal{M}_{\tilde{\lambda}^{(d)*}}$ e $\tilde{\lambda}^{(d)}(\beta(E)) = \tilde{\lambda}^{(d)}(E)$. Em particular, todo movimento β em $\mathbb{R}^d$ é uma transformação $\mathcal{M}_{\lambda^{(d)*}}$-$\mathcal{M}_{\lambda^{(d)*}}$-mensurável para a qual $\beta_*(\tilde{\lambda}^{(d)}) = \tilde{\lambda}^{(d)}$.*

Demonstração:

1. Para um $E \in \mathcal{M}_{\lambda^{(d)*}}$ arbitrário, sejam $G(E) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ e $F(E) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ como na Proposição 155. Para todo movimento β em $\mathbb{R}^d$, os subconjuntos $\beta(G(E))$ e $\beta(F(E))$ são Borelianos, pois subconjuntos do tipo G_δ e F_σ são casos especias de Borelianos e a σ-álgebra de Borel é invariante por movimentos. Obviamente, valem as seguintes inclusões:

$$\beta(F(E)) \subseteq \beta(E) \subseteq \beta(G(E)) .$$

Como a medida de Lebesgue-Borel é invariante por movimentos, tem-se que

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}^{(d)}(E) &= \lambda^{(d)}(F(E)) = \lambda^{(d)}(\beta(F(E))) = \lambda^{(d)*}(\beta(F(E))) \\ &\leq \lambda^{(d)*}(\beta(E)) \leq \lambda^{(d)*}(\beta(G(E))) = \lambda^{(d)}(\beta(G(E))) \\ &= \lambda^{(d)}(G(E)) = \tilde{\lambda}^{(d)}(E) . \end{aligned}$$

Deste modo, pela $\lambda^{(d)*}$-mensurabilidade de $\beta(F(E))$ (que é Boreliano), segue que

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}^{(d)}(E) &= \lambda^{(d)*}(\beta(E)) \geq \lambda^{(d)*}(\beta(F(E))) + \lambda^{(d)*}(\beta(E)\backslash\beta(F(E))) \\ &= \tilde{\lambda}^{(d)}(E) + \lambda^{(d)*}(\beta(E)\backslash\beta(F(E))) \ .\end{aligned}$$

2. Logo, se $\tilde{\lambda}^{(d)}(E) < \infty$ então tem-se que

$$\lambda^{(d)*}(\beta(E)\backslash\beta(F(E))) = 0 \ .$$

e, portanto, neste caso, $\beta(E)$ é a união disjunta do Boreliano $\beta(F(E))$ e do subconjunto $\lambda^{(d)}$-nulo $\beta(E)\backslash\beta(F(E))$. Em particular, $\beta(E)$ é Lebesgue-mensurável. Deste argumento também concluímos que

$$\tilde{\lambda}^{(d)}(\beta(E)) \doteq \lambda^{(d)*}(\beta(E)) = \tilde{\lambda}^{(d)}(E) \ .$$

3. Seja, por fim, um $E \in \mathcal{M}_{\lambda^{(d)*}}$ tal, que $\tilde{\lambda}^{(d)}(E) = \infty$. Observando que

$$E = \sup_{n\in\mathbb{N}}(E \cap [-n, n]^d)$$

e que

$$\tilde{\lambda}^{(d)}(E \cap [-n, n]^d) < \infty \ , \quad n \in \mathbb{N} \ ,$$

deduzimos do caso anterior ($\tilde{\lambda}^{(d)}(E) < \infty$) que

$$\beta(E) = \beta\left(\sup_{n\in\mathbb{N}}(E \cap [-n, n]^d)\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \beta(E \cap [-n, n]^d) \in \mathcal{M}_{\lambda^{(d)*}}$$

Pela σ-normalidade de medidas obtemos também que

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}^{(d)}(\beta(E)) &= \lim_{n\to\infty} \tilde{\lambda}^{(d)}(\beta(E \cap [-n, n]^d)) = \lim_{n\to\infty} \tilde{\lambda}^{(d)}(E \cap [-n, n]^d) \\ &= \tilde{\lambda}^{(d)}(E) = \infty \ .\end{aligned}$$

■

A última proposição nos permite definir a medida de Lebesgue como medida normalizada invariante à translação, de modo análogo ao feito para a medida de Lebesgue-Borel:

Corolário 158 (medida de Lebesgue como medida invariante à translação) *Para todo $d \in \mathbb{N}$, a medida de Lebesgue $\tilde{\lambda}^{(d)}$ é a única medida invariante à translação em $\mathcal{M}_{\lambda^{(d)*}}$ tal, que $\tilde{\lambda}^{(d)}((0, 1]^d) =$ 1.*

Demonstração:

1. Seja μ uma medida invariante à translação em $\mathcal{M}_{\lambda^{(d)*}}$ tal, que $\mu((0, 1]^d) = 1$. Então a restrição de μ à σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ é a medida de Lebesgue-Borel $\lambda^{(d)}$, já que esta última é a única medida invariante à translação em $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ que atribui conteúdo unitário ao cubo $(0, 1]^d \in \mathcal{I}^d_{\mathbb{R}}$. Logo, μ é uma medida que estende $\lambda^{(d)}$ de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ para $\mathcal{M}_{\lambda^{(d)*}}$. Como, pelo Corolário 131, a medida de Lebesgue $\tilde{\lambda}^{(d)}$ é a única medida em $\mathcal{M}_{\lambda^{(d)*}}$ que estende $\lambda^{(d)}$, segue a unicidade da medida invariante e normalizada em $\mathcal{M}_{\lambda^{(d)*}}$.

2. Por definição da medida de Lebesgue vale $\tilde{\lambda}^{(d)}((0, 1]^d) = 1$ e, pela última proposição, $\tilde{\lambda}^{(d)}$ é invariante à translação. Portanto, $\tilde{\lambda}^{(d)}$ é a única medida em $\mathcal{M}_{\lambda^{(d)*}}$ com estas duas propriedades.

■

Finalmente, com os resultados deste parágrafo concluímos:

Corolário 159 *Para toda dimensão $d \in \mathbb{N}$, o "problema da medida" enunciado na seção 1.1 tem solução única na σ-álgebra $\mathcal{M}_{\lambda^{(d)*}}$ dos subconjuntos Lebesgue-mensuráveis.*

1.10.6 O teorema de Steinhaus e a existência de conjuntos não Lebesgue-mensuráveis

A seguir discutiremos uma propriedade de subconjuntos Lebesgue-mensuráveis não nulos, o teorema de Steinhaus, assim como uma consequência importante desta propriedade, a existência de subconjuntos de $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, que não são Lebesgue-mensuráveis.

Exercício 160 *Seja $K \subseteq \mathbb{R}^d$ um compacto e $C \subseteq \mathbb{R}^d$ um fechado, $d \in \mathbb{N}$, tais, que $K \cap C = \emptyset$. Mostre que*

$$\inf\{\|x - x'\|_{\mathrm{e}} \ : \ x \in K, \ x' \in C\} > 0 \ .$$

Teorema 161 (Steinhaus) *Seja $E \in \mathcal{M}_{\lambda^{(d)*}}$, $d \in \mathbb{N}$, $\tilde{\lambda}^{(d)}(E) > 0$. Então existe $\delta > 0$ tal, que*

$$B_\delta(0) \subseteq E - E \doteq \{x - x' \ : \ x, x' \in E\} \subseteq \mathbb{R}^d \ .$$

Demonstração:

1. Observe-se primeiro que, pelos resultados acima sobre a aproximação de subconjuntos Lebesgue-mensuráveis, para um compacto qualquer $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$, $\lambda^{(d)}(K) > 0$, existe um aberto $O_K \in \tau_{\mathbb{R}^d}$, $K \subseteq O_K$, tal, que $\lambda^{(d)}(O_K) < 2\lambda^{(d)}(K)$. Pelo último exercício, existe um número positivo $\delta > 0$ tal, que
$$\|x - x'\|_{\mathrm{e}} > \delta$$
para todo $x \in K$, $x' \in O_K^c$.

2. Sejam $x \in K$ e $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $\|x_0\|_{\mathrm{e}} < \delta$. Então, $x + x_0 \in O_K$. Deste modo, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $\|x_0\|_{\mathrm{e}} < \delta$, tem-se que
$$K \cup \theta_{x_0}(K) \subseteq O_K \ .$$
Note-se que $\theta_{x_0}(K)$ é sempre um Boreliano, pois K é Boreliano e θ_{x_0} um movimento. (Com efeito, $\theta_{x_0}(K)$ é um compacto, pois é imagem de um compacto por uma transformação contínua.) Além disso, vale
$$\lambda^{(d)}(\theta_{x_0}(K)) = \lambda^{(d)}(K) \ ,$$
pela invariância à translação da medida de Lebesgue-Borel. Com isto tem-se que a disigualdade
$$\lambda^{(d)}(K \cup \theta_{x_0}(K)) \leq \lambda^{(d)}(K) + \lambda^{(d)}(\theta_{x_0}(K)) = 2\lambda^{(d)}(K)$$
valeria com igualdade se K e $\theta_{x_0}(K)$ fossem disjuntos. Por outro lado, tem-se
$$\lambda^{(d)}(K \cup \theta_{x_0}(K)) \leq \lambda^{(d)}(O_K) < 2\lambda^{(d)}(K)$$
sempre que $\|x_0\|_{\mathrm{e}} < \delta$. Deste modo, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $\|x_0\|_{\mathrm{e}} < \delta$, vale $K \cap \theta_{x_0}(K) \neq \emptyset$.

3. Considere-se agora o subconjunto
$$K - K \doteq \{x - x' \ : \ x, x' \in K\} \subseteq \mathbb{R}^d.$$
Pela discussão acima tem-se
$$B_\delta(0) \subseteq K - K$$
para um $\delta > 0$. Com efeito, $K \cap \theta_{x_0}(K) \neq \emptyset$ implica
$$0 \in K - \theta_{x_0}(K)$$
e, portanto, aplicando a translação θ_{x_0} aos dois lados desta relação de pertença, vale, neste caso, que
$$x_0 \in K - K \ .$$

4. Finalmente, lembrando que a medida de Lebesgue de um subconjunto Lebesgue-mensurável arbitrário é o supremo da medida de Lebesgue dos compactos contidos neste subconjunto (isto é, que a medida de Lebesgue é "tight"), obtemos o teorema.

■

Observe-se que a recíproca do teorema de Steinhaus não é verdadeira: Seja $d = 2$ e

$$E \doteq \{(x, 0) \ : \ |x| \leq 1\} \cup \{(0, x) \ : \ |x| \leq 1\} \in \mathcal{M}_{\lambda^{(d)*}} \ .$$

Então $\tilde{\lambda}^{(d)}(E) = 0$, mas

$$B_1(0) \subseteq E - E \ .$$

Note-se também que se $E \in \mathcal{M}_{\lambda^{(d)*}}$ é tal, que $\tilde{\lambda}^{(d)}(E) > 0$, não necessariamente vale $B_\delta(x) \subseteq E$ para um $\delta > 0$ e um $x \in E$: Seja, por exemplo,

$$E \doteq (0, 1) \backslash \mathbb{Q} \in \mathcal{M}_{\lambda^{(1)*}} \ .$$

Então $\tilde{\lambda}^{(1)}(E) = 1$, mas E não contém nenhuma bola aberta.

Uma aplicação importante do teorema de Steinhaus é uma demonstração relativamente simples da existência de subconjuntos de $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, que não são Lebesgue-Mensuráveis:

Definição 162 *Dizemos que os vetores $x, x' \in \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, são "$\mathbb{Q}$-equivalentes" se $x - x' \in \mathbb{Q}^d$. Para todo $x \in \mathbb{R}^d$, o subconjunto*

$$[x]_{\mathbb{Q}} \doteq \{x' \in \mathbb{R}^d \ : \ x' \ \mathbb{Q}\text{-equivalente a } x\} = \{x + x' \ : \ x' \in \mathbb{Q}^d\} \subseteq \mathbb{R}^d$$

é chamado "classe de $\mathbb{Q}$-equivalência" de x.

Exercício 163 *Mostre que, para todo $x, x' \in \mathbb{R}^d$,*

$$[x]_{\mathbb{Q}} = [x']_{\mathbb{Q}} \quad \textit{ou} \quad [x]_{\mathbb{Q}} \cap [x']_{\mathbb{Q}} = \emptyset \ .$$

Em particular, como, para todo $x \in \mathbb{R}^d$, vale $x \in [x]_{\mathbb{Q}}$, $\mathbb{R}^d$ é união disjunta das classes de equivalência definidas acima.

Definição 164 *Dizemos que $R \subseteq \mathbb{R}^d$ é um conjunto de "representantes das classes de $\mathbb{Q}$-equivalência" de $\mathbb{R}^d$ se, para todo $x \in \mathbb{R}^d$, vale que $R \cap [x]_{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{R}^d$ contém exatamente um elemento.*

Dito de outro modo, $R \subseteq \mathbb{R}^d$ é um conjunto de representantes das classes de $\mathbb{Q}$-quivalência de $\mathbb{R}^d$ se este contém exatamente um elemento de cada classe de $\mathbb{Q}$-equivalência de $\mathbb{R}^d$. Note que se $R \subseteq \mathbb{R}^d$ é um conjunto de representantes das classes de $\mathbb{Q}$-equivalência de $\mathbb{R}^d$, então, para todo $x, x' \in R$, vale

$$x = x' \quad \text{ou} \quad x - x' \notin \mathbb{Q}^d \ .$$

Exercício 165 *Mostre que se $R \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, é um conjunto de representantes das classes de $\mathbb{Q}$-equivalência de $\mathbb{R}^d$, então tem-se que*

$$\mathbb{R}^d = \sup_{x \in \mathbb{Q}^d} \theta_x(R)$$

com $\theta_x(R) \cap \theta_{x'}(R) = \emptyset$ para todo $x, x' \in \mathbb{Q}^d$, $x \neq x'$.

Proposição 166 *Se $R \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, é um conjunto de representantes das classes de $\mathbb{Q}$-equivalência de $\mathbb{R}^d$ então $R \notin \mathcal{M}_{\lambda^{(d)*}}$.*

Demonstração: Recorde-se que $\mathbb{Q}^d$, $d \in \mathbb{N}$, é um conjunto enumerável. Portanto, pelo exercício acima, todo conjunto $R \subseteq \mathbb{R}^d$ de representantes das classes de $\mathbb{Q}$-equivalência de $\mathbb{R}^d$ não pode ser $\lambda^{(d)}$-nulo, pois, caso contrário, $\mathbb{R}^d$ teria medida de Lebesgue nula, o que é falso: Observe-se que já provamos acima que subconjuntos $\lambda^{(d)}$-nulos são Lebesgue-mensuráveis e movimentos destes subconjuntos são igualmente conjuntos $\lambda^{(d)}$-nulos. Portanto, se R for Lebesgue-mensurável é necessário que $\tilde{\lambda}^{(d)}(R) > 0$. Porém, se este fosse o caso, concluiríamos, pelo teorema de Steinhaus, que $R - R$ contém uma bola aberta de raio positivo, centrada em 0. Em particular $R - R$ teria que conter um elemento não nulo de $\mathbb{Q}^d$. Mas isso implicaria que existem dois elementos em R distintos e $\mathbb{Q}$-equivalentes. Tal fato contradiria a definição de R e, portanto, a proposição segue. ∎

Note-se que o axioma da escolha implica a existência de ao menos um conjunto de representantes das classes de $\mathbb{Q}$-equivalência de $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Logo tem-se que:

Corolário 167 *Existem subconjuntos de $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, que não são Lebesgue-mensuráveis.*

Vale ainda a seguinte generalização da última proposição:

Proposição 168 *Seja $(\mathbb{R}^d, \mathcal{E}, \mu)$, $d \in \mathbb{N}$, um espaço de medida, onde μ é uma medida* invariante à translação não nula tal, que $\mu((0,1]^d) < \infty$, *e $\mathcal{E}$ uma σ-álgebra sobre $\mathbb{R}^d$ (também invariante à translação) que contém todos os subconjuntos mensuráveis de Lebesgue (isto é, $\mathcal{E} \supseteq \mathcal{M}_{\lambda^{(d)*}}$). Se $R \subseteq \mathbb{R}^d$ é um conjunto de representantes das classes de $\mathbb{Q}$-equivalência de $\mathbb{R}^d$, então tem-se que $R \notin \mathcal{E}$.*

Demonstração:

1. Note-se que se μ é não nula e invariante à translação então $\mu((0,1]^d) > 0$. Em particular, até uma contante não nula, a restrição de μ a $\mathcal{M}_{\lambda^{(d)*}}$ é a medida de Lebesgue $\tilde{\lambda}^{(d)}$.

2. Seja $R \subseteq \mathbb{R}^d$ é um conjunto de representantes das classes de $\mathbb{Q}$-equivalência de $\mathbb{R}^d$. Observe-se que é possível construir, a partir deste, $S \subseteq (0,1]^d$, um segundo conjunto de representantes das classes de $\mathbb{Q}$-equivalência de $\mathbb{R}^d$ contido em $(0,1]^d$:
$$S \doteq \bigcup_{z \in \mathbb{Z}^d} \left((z + (0,1]^d) \cap R - z \right) .$$

3. Suponha-se, por absurdo, que $R \in \mathcal{E}$. Então também $S \in \mathcal{E}$, já que $(0,1]^d \in \mathcal{M}_{\lambda^{(d)*}} \subseteq \mathcal{E}$, a σ-álgebra $\mathcal{E}$ é invariante à translação e a união acima é enumerável. Note-se que, neste caso, $\mu(S) > 0$, pois $\mathbb{R}^d$ é união contável de translações de S, S sendo um conjunto de representantes das classes de $\mathbb{Q}$-equivalência de $\mathbb{R}^d$, como já discutido acima.

4. Por outro lado,
$$\sum_{x \in \mathbb{Q}^d \cap (0,1]^d} \mu(S) = \sum_{x \in \mathbb{Q}^d \cap (0,1]^d} \mu(\theta_x(S)) \leq \mu((0,2]^d) = c\tilde{\lambda}^{(d)}((0,2]^d) < \infty ,$$
onde $c \in (0, \infty)$. Recorde-se que $\theta_x(S) \cap \theta_{x'}(S) = \emptyset$ sempre que $x \neq x'$, $x, x' \in \mathbb{Q}^d$. Como $\mathbb{Q}^d \cap (0,1]^d$ é um conjunto infinito enumerável, ter-se-ia que $\mu(S) = 0$ (que contradiz $\mu(S) > 0$ do ponto 3.).

■

Esta última proposição implica o teorema de Vitali: Suponha que exista uma medida μ invariante à translação em $2^{\mathbb{R}^d}$ com $\mu((0,1]^d) = 1$. Então, pela última proposição, não pode existir um conjunto $R \subseteq \mathbb{R}^d$ de representantes das classes de $\mathbb{Q}$-equivalência de $\mathbb{R}^d$ (pois a σ-álgebra $2^{\mathbb{R}^d}$ contém todos os subconjuntos de $\mathbb{R}^d$). Mas isso contradiria o axioma da escolha, como vimos acima. Assim:

Teorema 169 (Vitali) *Para toda dimensão $d \in \mathbb{N}$, o "problema da medida" enunciado na seção 1.1* não *tem solução na σ-álgebra $2^{\mathbb{R}^d}$ de todas as partes de $\mathbb{R}^d$.*

1.11 Medidas regulares

Discutiremos nesta seção a noção de regularidade de medidas em σ-álgebras de Borel e suas consequências. Serão introduzidos três tipos importantes de espaços métricos, os "σ-compactos", os "poloneses" e os "localmente compactos", e serão discutidas propriedades especiais destas classes de espaços métricos, no que diz respeito à regularidade de medidas. Os espaços normados de dimensão finita são exemplos simples de espaços pertencentes a estas três classes. Veremos, entre outras coisas, que medidas finitas ou, de modo mais geral, finitas em compactos (como as medidas de Stieltjes-Borel já estudadas em detalhe), nas σ-álgebras de Borel de espaços métricos destas classes sempre apresentam regularidade.

Definição 170 (conteúdos regulares) *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer e μ um conteúdo numa álgebra de conjuntos $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ que contenha os abertos de M, i.e., $\tau_d \subseteq \mathcal{A}$.*

i.) Dizemos que este conteúdo é "exteriormente regular" se, para todo $E \in \mathcal{A}$, vale

$$\mu(E) = \inf\{\mu(O) \ : \ O \in \tau_d \ , \ E \subseteq O\} \ .$$

ii.) μ é dito ser "interiormente regular" se, para todo $E \in \mathcal{A}$, tem-se que

$$\mu(E) = \sup\{\mu(C) \ : \ C \in \mathcal{C}(M, d) \ , \ C \subseteq E\} \ .$$

iii.) Dizemos que o conteudo μ é "normal" se for simultaneamente interiormente e exteriormente regular.

iv.) μ é "tight" se, para todo $E \in \mathcal{A}$, vale

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) \ : \ K \in \mathcal{K}(M, d) \ , \ K \subseteq E\} \ .$$

Recorde-se que $\mathcal{K}(M, d)$ denota a família dos subconjuntos compactos do espaço métrico (M, d). Em particualr, se μ é "tight", então é interiormente regular (já que todo compacto em um espaço métrico é fechado).

v.) O conteúdo é dito "regular" se for simultaneamente exteriormente regular, tight e finito em compactos (isto é, $\mu(K) < \infty$ para todo $K \in \mathcal{K}(M, d)$.) Em particular, se μ é regular, então é normal.

A definição acima se refere a conteúdos em álgebras de conjuntos, e não em anéis ou seminanéis mais gerais, porque é necessário que a família de conjuntos considerada contenha tanto os abertos quanto os fechados de um dado espaço métrico. Os exemplos mais impotantes para tais álgebras são a álgebra gerada pelos abertos do espaço métrico (M, d) e σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(M, d)$.

Observe-se que nem todo conteúdo em $\mathcal{B}(M, d)$ tem as propriedades de regularidade dadas na última definição: Por exemplo, em geral, a medida de contagem (do Exemplo 61) $\mu(E) \doteq |E|$, onde $|E| \in [0, \infty]$ é o número de pontos em $E \in \mathcal{B}(M, d)$, não é exteriormente regular, pois, para um ponto qualquer $p \in M$, tem-se $\mu(\{p\}) = 1$, mas, geralmente, para todo aberto $O \in \tau_d$, $p \in O$, vale $\mu(O) = \infty$. Note-se também que, pelos resultados do Parágrafo 1.10.4, toda medida de Stieltjes-Lebesgue μ_F^*, assim como as correspondentes restrições às σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $d \in \mathbb{N}$, isto é as medidas de Stieltjes-Borel μ_F, são regulares. Reciprocamente, toda medida regular em $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $d \in \mathbb{N}$, é uma medida de Stieltjes-Borel, pois, por definição é finita em compactos.

Na próxima proposição mostraremos que, no caso de conteúdos *finitos*, a normalidade é uma propriedade mais forte que a σ-aditividade:

Proposição 171 *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer e μ um conteúdo finito numa álgebra de conjuntos $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ para a qual $\tau_d \subseteq \mathcal{A}$. Se μ é "tight" então é uma pré-medida.*

Demonstração: Seja $E_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência monótona decrescente qualquer, para a qual $\inf_{n\in\mathbb{N}} E_n = \emptyset$. Pela Proposição 75, basta provar que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0 .$$

Como o conteúdo μ é "tight" e finito, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma sequência $K_n \in \mathcal{K}(M, d)$, $n \in \mathbb{N}$, de compactos tal, que

$$K_n \subseteq E_n \quad \text{e} \quad \mu(E_n) \leq \mu(K_n) + \varepsilon 2^{-n} , \quad n \in \mathbb{N} .$$

Note-se, em particular, que $\inf_{n\in\mathbb{N}} E_n = \emptyset$ implica que também $\inf_{n\in\mathbb{N}} K_n = \emptyset$, já que $\inf_{n\in\mathbb{N}} K_n \subseteq \inf_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Observe-se que, como a sequência $E_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, é decrescente, para todo $n \in \mathbb{N}$, vale

$$\begin{aligned}
(E_1 \cap \cdots \cap E_n) \backslash (K_1 \cap \cdots \cap K_n) &= E_n \cap (K_1 \cap \cdots \cap K_n)^c \\
&= E_n \cap (K_1^c \cup \cdots \cup K_n^c) \\
&= (E_n \backslash K_1) \cup \cdots \cup (E_n \backslash K_n) \\
&\subseteq (E_1 \backslash K_1) \cup \cdots \cup (E_n \backslash K_n) .
\end{aligned}$$

Pelo Lema 359 (aplicado a K_1 visto como (sub)espaço métrico *compacto* e à sequência de fehados $K_1 \cap K_n$, $n \in \mathbb{N}$), para $n \in \mathbb{N}$ grande o suficiente tem-se $K_1 \cap \cdots \cap K_n = \emptyset$ e, neste caso, vale então

$$E_n \subseteq (E_1 \backslash K_1) \cup \cdots \cup (E_n \backslash K_n) .$$

Assim, por subadividade de μ, para todo $\varepsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ grande o suficiente, vale

$$\mu(E_n) \leq \varepsilon 2^{-1} + \cdots + \varepsilon 2^{-n} \leq \varepsilon .$$

Consequentemente, a sequência (numérica) $\mu(E_n) \in (0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$, tende para zero. ■

A última proposição sugere, entre outras coisas, que a regularidade de conteúdos possa ser explorada na construção (por extensão) de medidas a partir de conteúdos. Os detalhes desta construção serão apresentados no próximo parágrafo.

No caso de conteúdos *finitos*, a regularidade exterior e a interior são propriedades equivalentes:

Lema 172 *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer e μ um conteúdo finito numa álgebra de conjuntos $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ para a qual $\tau_d \subseteq \mathcal{A}$. O conteúdo μ é exteriormente regular se, e somente se, for inferiormente regular. Em particular, μ é regular se, e somente se, for "tight".*

Demonstração: Suponha-se que μ seja um conteúdo finito e interiormente regular. Então, para todo $E \in \mathcal{A}$, vale

$$\begin{aligned}
\mu(M) - \mu(E) &= \mu(E^c) = \sup\{\mu(C) \ : \ C \in \mathcal{C}(M,d) \ , \ C \subseteq E^c\} \\
&= \sup\{\mu(M) - \mu(C^c) \ : \ C \in \mathcal{C}(M,d) \ , \ C \subseteq E^c\} \\
&= \sup\{\mu(M) - \mu(O) \ : \ O \in \tau_d \ , \ E \subseteq O\} \\
&= \mu(M) + \sup\{-\mu(O) \ : \ O \in \tau_d \ , \ E \subseteq O\} \\
&= \mu(M) - \inf\{\mu(O) \ : \ O \in \tau_d \ , \ E \subseteq O\} \ .
\end{aligned}$$

Logo, para todo $E \in \mathcal{A}$, tem-se

$$\mu(E) = \inf\{\mu(O) \ : \ O \in \tau_d \ , \ E \subseteq O\}$$

e segue que μ é também exteriormente regular. A prova da recíproca é dada por uma adaptação simples deste mesmo argumento. ■

Demostraremos na seguinte proposição que medidas finitas em σ-álgebras de Borel são sempre normais. Para tanto, o seguinte resultado preliminar será útil:

Lema 173 *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer. Todo aberto $O \in \tau_d$ é um subconjunto F_σ, isto é, é uma união contável de subconjuntos fechados.*

Demonstração: Para todo $E \in 2^M$ e todo $n \in \mathbb{N}$, defina

$$\begin{aligned}
C_n(E) &\doteq \{p \in M \ : \ d(p,p') \geq n^{-1} \text{ para todo } p' \in E^c\} \\
&= \{p \in M \ : \ d(p,p') < n^{-1} \text{ para um } p' \in E^c\}^c.
\end{aligned}$$

Pela primeira igualde vê-se que

$$C_n(E) \subseteq (E^c)^c = E$$

e, pela segunda, que $C_n(E)$ é fechado (sendo o complemento de um aberto). Se $E \in 2^M$ for aberto, então, por definição de subconjunto aberto, para todo $p \in E$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal, que $B_{n^{-1}}(p) \subseteq E$. Em particular, para todo $p' \in E^c$, vale $d(p,p') \geq n^{-1}$ e, portanto, $p \in C_n(E)$. Deste modo, para todo $O \in \tau_d$, tem-se que

$$O = \sup_{n \in \mathbb{N}} C_n(E) \ .$$

Logo, todo aberto de (M, d) é um subconjunto F_σ. ■

Proposição 174 (medidas finitas são normais) *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer. Toda medida finita em $\mathcal{B}(M, d)$ é normal.*

Demonstração: Seja μ uma medida finita em $\mathcal{B}(M, d)$ e defina a seguinte família de Borelianos de M:

$$\mathcal{R}_\mu \doteq \{E \in \mathcal{B}(M,d) \ : \ \inf\{\mu(O) : O \in \tau_d, E \subseteq O\} = \sup\{\mu(C) : C \in \mathcal{C}(M,d), C \subseteq E\} = \mu(E)\} \ .$$

Ou seja, $\mathcal{R}_\mu$ é a família de todos os Borelianos que são simultaneamente interiormente e exteriormente regulares em relação à medida μ.

1. Pela σ-normalidade de medidas, o último lema implica que $\tau_d \subseteq \mathcal{R}_\mu$.

2. Como μ é uma medida finita, tem-se

$$\mathcal{R}_\mu \doteq \{E \in \mathcal{B}(M,d) \ : \ \inf\{\mu(O\backslash E) : O \in \tau_d, E \subseteq O\} = \inf\{\mu(E\backslash C) : C \in \mathcal{C}(M,d), C \subseteq E\} = 0\} \ .$$

Usando a identidade $E\backslash E' = E'^c\backslash E^c$, $E, E' \subseteq M$, concluímos então que, para todo $E \in \mathcal{R}_\mu$, vale $E^c \in \mathcal{R}_\mu$. Isto é, a família é estável com relação à operaçao de complemento.

3. Seja $E_n \in \mathcal{R}_\mu$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência qualquer em $\mathcal{R}_\mu$. Para todo $\varepsilon > 0$, tome uma sequência $C_n^{(\varepsilon)} \in \mathcal{C}(M,d)$, $C_n^{(\varepsilon)} \subseteq E_n$, $n \in \mathbb{N}$, e uma sequência $O_n^{(\varepsilon)} \in \tau_d$, $E_n \subseteq O_n^{(\varepsilon)}$, $n \in \mathbb{N}$, tais, que

$$\mu(O_n^{(\varepsilon)}\backslash E_n), \mu(E_n\backslash C_n^{(\varepsilon)}) \leq \varepsilon 2^{-n-1}.$$

Obviamente, para $O^{(\varepsilon)} \doteq \sup_{n\in\mathbb{N}} O_n^{(\varepsilon)}$ vale $\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n \subseteq O^{(\varepsilon)}$.

$$\begin{aligned} \mu\left(O^{(\varepsilon)}\backslash \sup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) &= \mu\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} O_n^{(\varepsilon)}\backslash \sup_{\tilde{n}\in\mathbb{N}} E_{\tilde{n}}\right) \\ &= \mu\left(\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(O_n^{(\varepsilon)}\backslash \sup_{\tilde{n}\in\mathbb{N}} E_{\tilde{n}}\right)\right) \leq \mu\left(\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(O_n^{(\varepsilon)}\backslash E_n\right)\right) \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(O_n^{(\varepsilon)}\backslash E_n\right) \leq \frac{\varepsilon}{2} \ . \end{aligned}$$

4. De modo análogo, vemos que, para todo $N \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\mu\left((E_1 \cup \cdots \cup E_N)\backslash(C_1^{(\varepsilon)} \cup \cdots \cup C_N^{(\varepsilon)})\right) < \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Pela σ-normalidade de medidas, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal, que

$$\mu\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) - \mu\left(E_1 \cup \cdots \cup E_{N_\varepsilon}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Em particular, para o fechado $C_1^{(\varepsilon)} \cup \cdots \cup C_{N_\varepsilon}^{(\varepsilon)}$ vale

$$\mu\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n\backslash(C_1^{(\varepsilon)} \cup \cdots \cup C_{N_\varepsilon}^{(\varepsilon)})\right) \leq \varepsilon \ .$$

Com isto concluímos que $\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{R}_\mu$. Portanto, $\mathcal{R}_\mu \subseteq \mathcal{B}(M,d)$ é uma σ-álgebra. Como $\tau_d \subseteq \mathcal{R}_\mu$ e τ_d gera a σ-álgebra $\mathcal{B}(M,d)$, tem-se que $\mathcal{R}_\mu = \mathcal{B}(M,d)$.

■

Pela última proposição, em espaços métricos vale a seguinte versão da Proposição 155 para medidas finitas:

Proposição 175 *Seja (M,d) um espaço métrico qualquer e μ uma medida finita em $\mathcal{B}(M,d)$. Para todo $E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$, existe um subconjunto de tipo G_δ, $G(E) \in \mathcal{B}(M,d)$, e um de tipo F_σ, $F(E) \in \mathcal{B}(M,d)$, tais, que vale $F(E) \subseteq E \subseteq G(E)$ e*

$$\mu(F(E)) = \mu(G(E)) = \mu^*(E) \quad \textit{com} \quad \mu^*(G(E)\backslash E) = \mu^*(E\backslash F(E)) = 0 \ .$$

Em particular, todo $E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ é a união disjunta de um conjunto Boreliano (de tipo F_σ) e um conjunto μ-nulo.

Demonstração: Esta proposição se demonstra por uma adaptação simples da demonstração da Proposição 155. ■

Da última proposição combinada com resultados do Parágrafo 1.9.1 segue o seguinte corolário:

Corolário 176 *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer e μ uma medida finita em $\mathcal{B}(M, d)$. O completamento do espaço de medida $(M, \mathcal{B}(M, d), \mu)$ é o espaço de medida $(M, \mathcal{M}_{\mu^*}, \mu^*)$ obtido pela construção de Carathéodory.*

Demonstração: Exercício. ■

Para melhor visualização, reunimos na seguinte proposição os resultados obtidos até aqui a respeito de conteúdos finitos com propriedades de regularidade:

Proposição 177 (regularidade de conteúdos finitos) *Seja (M, d) um espço métrico qualquer e μ um conteúdo finito numa álgebra de conjuntos $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ para a qual $\tau_d \subseteq \mathcal{A}$.*

i.) Se μ é "tight" então μ é pré-medida (Proposição 171).

ii.) As três seguintes afirmações são equivalentes: a) μ é exteriormente regular, b) μ é interiormente regular, c) μ é normal. (Lema 172).

iii.) μ é "tight" se, e somente se, for regular. (Lema 172).

iv.) Se $\mathcal{A} = \mathcal{B}(M, d)$ e μ é medida então μ é normal. (Proposição 174).

v.) Se $\mathcal{A} = \mathcal{B}(M, d)$ e μ é medida então $(M, \mathcal{M}_{\mu^*}, \mu^*)$ (construção de Carathéodory) é o completamento do espaço de medida $(M, \mathcal{B}(M, d), \mu)$.

A seguinte classe de espaços métricos é relevante em diversas aplicações da teoria da medida. Nela, entre outras coisas, as noções de regularidade interior e de "tightness" são equivalentes no caso σ-aditivo. Em particular, pelo último lema, nesta classe, uma pré-medida finita ser regular é o mesmo que esta ser normal:

Definição 178 (espaços σ-compactos) *Dizemos que um espaço métrico (M, d) é "σ-compacto" se existe uma sequência de compactos $K_n \in \mathcal{K}(M, d)$, $n \in \mathbb{N}$, que recubra M, isto é, $\sup_{n \in \mathbb{N}} K_n = M$.*

Observe-se que todo espaço normado de dimensão finita é σ-compacto.

Lema 179 *Seja (M, d) um espaço métrico σ-compacto, e $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ uma algebra sobre M que contenha todos os subconjuntos abertos de M, isto é, $\tau_d \subseteq \mathcal{A}$. (Por exemplo, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(M, d)$.) Uma pré-medida μ em $\mathcal{A}$ é interiormente regular se, e somente se, for "tight".*

Demonstração:

1. Que um conteúdo "tight" seja interiormente regular é claro, pois todo compacto em um espaço métrico é fechado.

2. Suponha então que μ seja interiormente regular. Seja uma sequência $E_n \in \mathcal{K}(M, d)$, $n \in \mathbb{N}$, tal, que $\sup_{n \in \mathbb{N}} E_n = M$. Tal sequência existe, pois o espaço métrico (M, d) é σ-compacto. Fixe um $E \in \mathcal{A}$, $\mu(E) < \infty$, arbitrário. Então, por hipótese, para todo $\varepsilon > 0$, existe um fechado $C^{(\varepsilon)} \in \mathcal{C}(M, d) \subseteq \mathcal{A}$, $C^{(\varepsilon)} \subseteq E$, tal, que $\mu(E \setminus C^{(\varepsilon)}) \leq \varepsilon$. Note-se que, para todo $n \in \mathbb{N}$, vale $C^{(\varepsilon)} \cap (E_1 \cup \cdots \cup E_n) \in \mathcal{K}(M, d)$ e

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} (C^{(\varepsilon)} \cap (E_1 \cup \cdots \cup E_n)) = C^{(\varepsilon)} .$$

Em particular, pela σ-normalidade de pré-medidas, tem-se que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(C^{(\varepsilon)} \cap (E_1 \cup \cdots \cup E_n)) = \mu(C^{(\varepsilon)}) .$$

Isto implica que

$$\mu(E) \leq \varepsilon + \sup\{\mu(K) \ : \ K \in \mathcal{K}(M,d) \ , \ K \subseteq E\} \leq \varepsilon + \mu(E) .$$

Como, $\varepsilon > 0$ é arbitrário, para todo $E \in \mathcal{A}$, $\mu(E) < \infty$, vale que

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) \ : \ K \in \mathcal{K}(M,d) \ , \ K \subseteq E\} .$$

3. Se $E \in \mathcal{A}$ é tal, que $\mu(E) = \infty$, como μ é interiormente regular, para todo $N \in \mathbb{N}$, existe um fechado $C^{(N)} \in \mathcal{C}(M,d)$, $C^{(N)} \subseteq E$, tal, que $\mu(C^{(N)}) > N$. Pela σ-normalidade de pré-medidas, vale então que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(C^{(N)} \cap (E_1 \cup \cdots \cup E_n)) > N.$$

Disto segue que, para todo $N \in \mathbb{N}$, existe um compacto $K_N \in \mathcal{K}(M,d)$, $K_N \subseteq E$, tal, que $\mu(K_N) \geq N$. Note-se aqui que, para todo $N, n \in \mathbb{N}$, $C^{(N)} \cap (E_1 \cup \cdots \cup E_n) \in \mathcal{K}(M,d)$. Logo, para $E \in \mathcal{B}(M,d)$, $\mu(E) = \infty$, tem-se igualmente que

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) \ : \ K \in \mathcal{K}(M,d) \ , \ K \subseteq E\} = \infty .$$

■

É importante notar que, apesar desta equivalência entre "tightness" e regularidade interior não valer para as σ-álgebras de Borel de certos espaços métricos (não σ-compactos), alguns autores não distinguem entre as noções "regularidade interior" e "tightness" e somente consideram o caso de medidas "tight", dando a estas o nome de medidas "interiormente regulares".

Observe-se que do último lema segue que, para todo espaço normado de dimensão finita, toda medida na respectiva σ-álgebra de Borel é "tight" se, e somente se, for interiormente regular.

A Proposição 174 combinada com o Lema 179 implica o seguinte importante corolário:

Corolário 180 *Seja (M,d) um espaço métrico σ-compacto qualquer. Toda medida finita em $\mathcal{B}(M,d)$ é regular. Em particular, toda medida finita na σ-álgebra de Borel de um espaço normado de dimensão finita é regular.*

A seguir definimos a classe dos espaços métricos "localmente compactos" e mostraremos que nesta classe o Corolário 180 pode ser estendido para medidas que são finitas nos compactos destes espaços (mas não são necessariamente finitas).

Definição 181 (espaços localmente compactos) *Dizemos que um espaço métrico (M,d) é "localmente compacto" se, para todo $p \in M$, existe um $\varepsilon > 0$ tal, que a bola fechada $\overline{B}_\varepsilon(p) \subseteq M$ é compacta. Dizemos que (M,d) é "σ-localmente compacto" se for simultaneamente localmente compacto e σ-compacto.*

Observe-se que todo espaço normado de dimensão finita é σ-localmente compacto. Como efeito, é possível mostrar que um espaço normado tem dimensão finita se, e somente se, for localmente compacto.

Exercício 182 *Mostre que todo espaço métrico σ-compacto é separável.*

No caso de um espaço métrico σ-localmente compacto existe até mesmo uma métrica completa cuja topologia coincide com a original, ou seja, tais espaços são casos especias de espaços poloneses. Este resultado é também bem conhecido e omitimos sua demostração.

Exercício 183 *Seja (M, d) um espaço métrico localmente compacto, $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ uma álgebra sobre M contendo todos os abertos de M, e μ um conteúdo em $\mathcal{A}$ finito em compactos, isto é, $\mu(E) < \infty$ para todo $E \in \mathcal{K}(M, d) \subseteq \mathcal{A}$. Mostre que, para todo compacto $E \in \mathcal{K}(M, d) \subseteq \mathcal{A}$, existe um aberto $O_E \supseteq E$ tal, que $\mu(O_E) < \infty$.*

Corolário 184 *Seja (M, d) um espaço métrico σ-localmente compacto e μ uma medida em $\mathcal{B}(M, d)$ finita em compactos. Então μ é regular. Em particular, toda medida na σ-álgebra de Borel de um espaço normado de dimensão finita, que seja finita nos compactos, é regular.*

Demonstração:

1. Seja μ uma medida qualquer em $\mathcal{B}(M, d)$. Para todo $E_0 \in \mathcal{B}(M, d)$, definimos a função $\mu_{E_0} : \mathcal{B}(M, d) \to [0, \infty]$ por

$$\mu_{E_0}(E) \doteq \mu(E \cap E_0) \ , \quad E \in \mathcal{B}(M, d) \ .$$

   É fácil ver que tais funções também são medidas em $\mathcal{B}(M, d)$. Se a medida μ é finita em compactos então, para todo compacto $K \in \mathcal{K}(M, d) \subseteq \mathcal{B}(M, d)$, μ_K é uma medida finita. Como, para todo $E \in \mathcal{B}(M, d)$, $E \subseteq K$, vale $\mu_K(E) = \mu(E)$ concluímos, pela Proposição 174, que se μ é finita em compactos, então é "tight" em Borelianos que são subconjuntos de compactos. Recorde-se que subconjuntos fechados de compactos são compatos.

2. Como, pelo último exercício, todo Boreliano deste tipo está contido em um aberto de medida finita, por um argumento similar vemos que μ é também exteriormente regular em todo Boreliano que é subconjunto de um compacto.

3. Como M é uma união contável de compactos, concluímos do caso particular acima, com argumentos similares aos já acima usados nesta seção (em particular na demonstração do Lemma 179), que μ é exteriormente regular e "tight" em todo Boreliano. ■

Recorde-se que em $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $d \in \mathbb{N}$, as medidas finitas em compactos são exatamente as medidas de Stieltjes-Borel. Em particular, o último corolário implica que estas são exatamente as medidas regulares em $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, o que já haviamos demonstrado no Parágrafo 1.10.4.

Em espaços métricos σ-compactos vale ainda a seguinte generalização da Proposição 155:

Proposição 185 *Seja (M, d) um espaço métrico σ-compacto e μ uma medida em $\mathcal{B}(M, d)$. μ é finita em compactos e normal então, para todo $E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$, existe um subconjunto de tipo G_δ, $G(E) \in \mathcal{B}(M, d)$, e um de tipo F_σ, $F(E) \in \mathcal{B}(M, d)$, tais, que vale $F(E) \subseteq E \subseteq G(E)$ e*

$$\mu(F(E)) = \mu(G(E)) = \mu^*(E) \quad \textit{com} \quad \mu^*(G(E) \backslash E) = \mu^*(E \backslash F(E)) = 0 \ .$$

Em particular, todo $E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ é a união disjunta de um conjunto Boreliano (de tipo F_σ) e um conjunto μ-nulo.

Demonstração: Esta proposição se demonstra por uma adaptação simples da demonstração da Proposição 155. ■

Da última proposição combinada com resultados do Parágrafo 1.9.1 segue o seguinte corolário:

Corolário 186 *Seja (M, d) um espaço métrico σ-compacto e μ uma medida em $\mathcal{B}(M, d)$, que seja finita em compactos e normal. O completamento do espaço de medida $(M, \mathcal{B}(M, d), \mu)$ é o espaço de medida $(M, \mathcal{M}_{\mu^*}, \mu^*)$ obtido pela construção de Carathéodory.*

Demonstração: Exercício. ■

Recorde-se que o resultado acima já havia sido demonstrado (no Parágrafo 1.9.1) para o caso especial das medidas de Stieltjes-Borel em $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $d \in \mathbb{N}$.

Para melhor visualização, reunimos na seguinte proposição os resultos obtidos acima a respeito de medidas com propriedades de regularidade em σ-álgebras de Borel de espaços métricos σ-compactos:

Proposição 187 (regularidade de medidas em σ-álgebras de Borel de espaços σ-compactos) *Seja (M, d) um espaço métrico σ-compacto e μ uma medida em $\mathcal{B}(M, d)$.*

i.) *μ é interiormente regular se, e somente se, for "tight". (Lema 179.)*

ii.) *μ é regular se, e somente se, for normal e finita em compactos. (Lema 179.)*

iii.) *Se μ é uma medida finita então é regular. (Corolário 180.)*

iv.) *Se (M, d) é localmente compacto (e, portanto, σ-localmente compacto) e μ é uma medida finita em compactos então μ é regular. (Corolário 184).*

v.) *Se μ é uma medida finita em compactos e normal então $(M, \mathcal{M}_{\mu^*}, \mu^*)$ (construção de Carathéodory) é o completamento do espaço de medida $(M, \mathcal{B}(M, d), \mu)$. Em particular, se (M, d) é localmente compacto, (por iv.)) tal propriedade é verdadeira sempre que μ for finita em compactos.*

Não só em espaços σ-compactos todas as medidas finitas nas respectivas σ-álgebras de Borel são regulares. Esta propriedade também é verdadeira para espaços métricos separáveis completos:

Definição 188 (espaços métricos poloneses) *Um espaço métrico é dito ser "um espaço métrico polonês" (ingl.: "polish metric space") ser for separável (isto é, possui um subconjunto* enumerável *denso) e completo.*

De modo mais geral, um espaço métrico é dito ser polonês se este é um espaço métrico polonês no sentido acima para alguma métrica, cuja topologia associada seja a topologia original deste espaço. Por simplicidade e sem perda de generalidade usaremos a definição acima. Com relação a esta observação, indicamos as seguintes propriedades de espaços métricos poloneses:

Teorema 189 *Seja (M, d) um espaço métrico polonês e $\tilde{M} \subseteq M$ um subconjunto qualquer. Se $\tilde{M}$ é um G_δ (isto é, uma interseção enumerável de abertos), então existe uma métrica para $\tilde{M}$ com respeito a qual $\tilde{M}$ é igualmente polonês e cuja topologia associada coincide com a associada à restrição da métrica d original ao subconjunto $\tilde{M} \subseteq M$. Se (M, d) é um espaço σ-localmente compacto então existe uma métrica $\tilde{d}$ em M tal, que $(M, \tilde{d})$ é um espaço métrico polonês e $\tau_{\tilde{d}} = \tau_d$.*

O resultado acima é bem conhecido e omitimos a sua demonstração. Note-se neste teorema que, pelo Lema 173, fechados são casos especiais de conjuntos do tipo G_δ. Pela segunda parte do teorema, espaços σ-localmente compactos podem ser vistos como casos especias de espaços poloneses. Estes últimos são de grande importância, por exemplo, na teoria da medida e na teoria das probabilidades.

Proposição 190 *Seja (M, d) um espaço métrico polonês qualquer. Toda medida μ finita em $\mathcal{B}(M, d)$ é regular.*

Demonstração:

1. Note-se que, pelo Lema 172, basta provar que toda medida finita em $\mathcal{B}(M,d)$ é tight. Por simplicidade vamos supor que μ é normalizada, isto é, $\mu(M) = 1$.

2. Tome-se qualquer sequência $p_n \in M$, $n \in \mathbb{N}$, densa em M. Tal sequência sempre existe, pois M é polonês. Devido à densidade da sequência, para todo $k \in \mathbb{N}$, tem-se que

$$M = \cup\{\overline{B}_{1/k}(p_n) \ : \ n \in \mathbb{N}\} .$$

Para todo $\varepsilon \in (0,1)$ fixo e todo $k \in \mathbb{N}$, seja $n_k \in \mathbb{N}$ tal, que

$$\mu(M \backslash \cup \{\overline{B}_{1/k}(p_n) \ : \ n = 1, \ldots, n_k\}) < \varepsilon 2^{-k} .$$

Tais $n_k \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, existem devido à σ-normalidade de medidas. Seja

$$N \doteq \inf_{k \in \mathbb{N}} \cup\{\overline{B}_{1/k}(p_n) \ : \ n = 1, \ldots, n_k\} \in \mathcal{B}(M,d) .$$

Observe-se que N é, por construção, totalmente limitado (ver Definição 372). Logo, como (M,d) é completo, pelo Exercício 374, N é compacto.

3. Note-se também que

$$\begin{aligned}
1 - \mu(N) &= \mu(M \backslash N) = \mu(M \cap N^c) \\
&= \mu(M \cap \sup_{k \in \mathbb{N}} (\cup\{\overline{B}_{1/k}(p_n) \ : \ n = 1, \ldots, n_k\})^c) \\
&= \mu(\sup_{k \in \mathbb{N}} M \cap (\cup\{\overline{B}_{1/k}(p_n) \ : \ n = 1, \ldots, n_k\})^c) \\
&= \mu(\sup_{k \in \mathbb{N}} M \backslash \cup \{\overline{B}_{1/k}(p_n) \ : \ n = 1, \ldots, n_k\}) \\
&\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(M \backslash \cup \{\overline{B}_{1/k}(p_n) \ : \ n = 1, \ldots, n_k\}) < \sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon 2^{-k} = \varepsilon .
\end{aligned}$$

Portanto, $\mu(N) > 1 - \varepsilon$. Observando que, para todo fechado $C \subseteq M$, $C \cap N$ é compacto, pela normalidade de μ (Proposição 174), disto segue que, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\mu(E) \geq \sup\{\mu(K) \ : \ K \in \mathcal{K}(M,d) \ , \ K \subseteq E\} \geq \mu(E) - \varepsilon$$

e, logo, μ é "tight".

■

Na seguinte proposição mostramos que a regularidade de finitas medidas é preservada por "push-forwards" através de transformações contínuas:

Proposição 191 *Sejam (M_1, d_1) e (M_2, d_2) dois espaços métricos quaisquer, $f : M_1 \to M_2$ uma transformação* contínua *e μ_1 uma medida finita* regular *na σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(M_1, d_1)$. A medida (finita) $f_*(\mu)$ na σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(M_2, d_2)$ é também regular.*

Demonstração: Seja $E_2 \in \mathcal{B}(M_2, d_2)$ um Boreliano qualquer. Como μ é "tight", vale

$$f_*(\mu_1)(E_2) = \sup\{\mu_1(K_1) \ : \ K_1 \in \mathcal{K}(M_1, d_1) \ , \ K_1 \subseteq f^{-1}(E_2)\} .$$

Note-se que, para todo $K_1 \in \mathcal{K}(M_1, d_1)$, $K_1 \subseteq f^{-1}(E_2)$, vale

$$f(K_1) \subseteq f(f^{-1}(E_2)) \subseteq E_2 \quad \text{e} \quad K_1 \subseteq f^{-1}(f(K_1)) \subseteq f^{-1}(E_2) .$$

Portanto, para todo $K_1 \in \mathcal{K}(M_1, d_1)$, $K_1 \subseteq f^{-1}(E_2)$, vale

$$\mu_1(K_1) \leq \mu_1(f^{-1}(f(K_1))) \doteq f_*(\mu_1)(f(K_1)) \leq f_*(\mu_1)(E_2) \ .$$

Como $f(K_1) \in \mathcal{K}(M_2, d_2)$, pois f é contínua (Lema 368), tem-se

$$f_*(\mu_1)(E_2) = \sup\{f_*(\mu_1)(K_2) \ : \ K_2 \in \mathcal{K}(M_2, d_2) \ , \ K_2 \subseteq E_2\} \ .$$

Assim, $f_*(\mu_1)$ é uma medida "tight" em $\mathcal{B}(M_2, d_2)$. Como $f_*(\mu_1)$ é uma medida finita (pois μ_1 é finita), pelo Lema 172, $f_*(\mu_1)$ é uma medida regular. $\blacksquare$

Uma outra propriedade importante de medidas regulares é o fato de elas possuirem uma noção natural de "espectro" ou "suporte":

Definição 192 (espectro de uma medida) *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer e μ uma medida na σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(M, d)$. Definimos o "espectro" ou "suporte" desta por*

$$\begin{aligned} \mathrm{supp}(\mu) &\doteq \{p \in M \ : \ \exists_{r>0} \ \mu(B_r(p)) = 0\}^c \\ &= \{p \in M \ : \ \forall_{r>0} \ \mu(B_r(p)) > 0\} \ . \end{aligned}$$

Isto é, o espectro da medida μ é o conjunto dos pontos de M cujas vizinhanças abertas têm medida não nula. Note-se que isto não significa que os pontos no espectro tenham eles mesmos medida não nula: Por exemplo, $\mathrm{supp}(\lambda^{(d)}) = \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, mas, para todo ponto $x \in \mathbb{R}^d$, vale $\lambda^{(d)}(\{x\}) = 0$. Pontos com medida não nula são somente parte do espectro desta. Estes formam o chamado espectro "puro ponto" da medida, que será denotado por $\mathrm{supp}_{pp}(\mu) \subseteq \mathrm{supp}(\mu)$. Por exemplo, $\mathrm{supp}_{pp}(\lambda^{(d)}) = \emptyset$.

Exercício 193 *Mostre que o espectros de medidas, como definidos acima, são sempre subconjuntos fechados. Em particular, tais espectros são Borelianos. Mostre ainda que, para todo medida μ numa σ-álgebra de Borel vale a iguadade*

$$\mathrm{supp}(\mu) = \cap\{C \in \mathcal{C}(M, d) \ : \ \mu(C^c) = 0\} \in \mathcal{C}(M, d) \ .$$

Exercício 194 *Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona crescente contínua à direita. Mostre que o espectro da medida de Stieltjes μ_F associada é dado por*

$$\mathrm{supp}(\mu_F) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ F(x + \varepsilon) - F(x - \varepsilon) > 0 \, \textit{para todo} \ \varepsilon > 0\} \ .$$

Mostre também que $\mathrm{supp}_{pp}(\mu_F) = S_F$, isto é, o espectro puro ponto de μ_F é exatamente o conjunto de todos os pontos de salto da função F.

Mostraremos na seguinte proposição que se uma medida é "tight" então esta está concentrada em seu espectro:

Proposição 195 *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer e μ uma medida na σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(M, d)$. Se esta é "tight" então, para todo $E \in \mathcal{B}(M, d)$, $E \cap \mathrm{supp}(\mu) = \emptyset$, vale $\mu(E) = 0$. Em particular vale $\mu(\mathrm{supp}(\mu)^c) = 0$, já que $\mathrm{supp}(\mu) \in \mathcal{B}(M, d)$, sendo um fechado.*

Demonstração: Como μ é uma medida "tight", basta provar que $\mu(K) = 0$ para todo compacto $K \in \mathcal{K}(M, d) \subseteq \mathcal{B}(M, d)$ tal, que $K \cap \mathrm{supp}(\mu) = \emptyset$. Para todo $p \in M$, $p \notin \mathrm{supp}(\mu)$, seja $r_p > 0$ algum real positivo tal, que $\mu(B_{r_p}(x)) = 0$. Note-se que tal $r_p > 0$ sempre existe pela definição de $\mathrm{supp}(\mu)$. Como $K \cap \mathrm{supp}(\mu) = \emptyset$, tem-se que

$$K \subseteq \sup_{p \in K} B_{r_p}(p) \ .$$

Como K é *compacto* e $B_{r_p}(p)$, $p \in K$, é um recobrimento *aberto* de K, existe um subconjunto *finito* $\tilde{E} \subseteq K$ tal, que

$$K \subseteq \sup_{p \in \tilde{E}} B_{r_p}(p) \ .$$

Pela subaditividade de medidas concluímos que

$$\mu(K) \leq \mu\left(\sup_{p \in \tilde{E}} B_{r_p}(p)\right) \leq \sum_{p \in \tilde{E}} \mu(B_{r_p}(p)) = 0 \ .$$

■

Por causa da proposição acima e do Exercício 193, em certos casos o espectro de uma medida μ numa σ-álgebra de Borel pode ser visto como o menor conjunto fechado dentro do qual se concentra completamente esta medida. Como provado acima, isto é verdade no caso de medidas "tight". Observe-se, porém, que a proposição não é geralmente verdadeira no caso de medidas que não sejam "tight" (pois, por exemplo, entre os fechados com a referida propriedade pode não haver um ínfimo) e a interpretação mencionada pode conduzir a erros, neste caso.

Recorde-se que medidas finitas (finitas em compactos) em σ-álgebras de Borel de espaços métricos poloneses (σ-localmente compactos) são sempre regulares. Deste modo, pela última proposição, tem-se:

Corolário 196 *Seja (M, d) um espaço métrico polonês. Para toda medida μ finita em $\mathcal{B}(M, d)$ tem-se que $C = \operatorname{supp}(\mu)$ é o menor fechado $C \in \mathcal{C}(M, d)$ tal, que $\mu(C^c) = 0$. Se (M, d) não é somente polonês, mas também σ-localmente compacto, então o mesmo também vale para medidas finitas em compactos (não necessariamente finitas).*

No seguinte parágrafo desenvolveremos uma teoria de extensão de conteúdos adaptada ao caso das medidas regulares.

1.11.1 Medidas como extensões de conteúdos regulares para abertos

Seja μ uma medida em $\mathcal{B}(M, d)$ arbitrária, onde (M, d) é um espaço métrico qualquer. A restrição desta medida ao conjunto $\tau_d \subseteq \mathcal{B}(M, d)$ de abertos de (M, d) define uma função $\tau_d \to [0, \infty]$, também denotada por μ, com as seguintes propriedades:

i.) $\mu(\emptyset) = 0$.

ii.) *Subaditividade.* Para todo $O, O' \in \tau_d$, vale $\mu(O \cup O') \leq \mu(O) + \mu(O')$.

iii.) *Superaditividade disjunta.* Para todo $O, O' \in \tau_d$, $O \cap O' = \emptyset$, vale $\mu(O \cup O') \geq \mu(O) + \mu(O')$.

iv.) *Monotonicidade.* Para todo $O, O' \in \tau_d$, $O' \subseteq O$, vale $\mu(O') \leq \mu(O)$.

v.) *σ-subaditividade.* Para toda sequência $O_n \in \tau_d$, $n \in \mathbb{N}$, vale $\mu(\sup_{n \in \mathbb{N}} O_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(O_n)$. Note-se aqui que $\sup_{n \in \mathbb{N}} O_n \in \tau_d$, pois uniões arbitrárias de abertos são abertas.

Se a medida μ é finita em compactos, então tem-se:

vi.) Para todo $O \in \tau_d$, $\overline{O} \in \mathcal{K}(M, d)$, vale $\mu(O) < \infty$. Recorde-se que $\overline{O}$ denota o fecho de O, isto é, o menor fechado que contém O.

Se μ for uma medida "tight" então vale:

vii.) Para todo $O \in \tau_d$, tem-se

$$\mu(O) = \sup\{\mu(O') \ : \ O' \in \tau_d \ , \ \overline{O}' \subseteq O\} \ .$$

Note-se que as propriedades ii.) e iii) implicam a aditividade de μ: Para todo $O, O' \in \tau_d$, $O \cap O' = \emptyset$, vale $\mu(O \cup O') = \mu(O) + \mu(O')$. Observe-se também que i.) vale automaticamente se valerem ii.) e vi.), e que v.) implica ii.).

Exercício 197 *Prove que se μ é uma medida "tight" então vale vii.).*

As propriedades listadas acima motivam a seguinte definição:

Definição 198 (conteúdo para abertos) *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer. Uma função $\mu : \tau_d \to [0, \infty]$ é dita ser um "conteúdo para abertos" se satisfaz às propriedades i)-iv). Se vale também v.) então μ é dita ser uma "pré-medida para abertos". Dizemos que o conteúdo para abertos $\mu : \tau_d \to [0, \infty]$ é "finito em compactos" se valer vi.), que é "normal" se satisfizer à propriedade vii.), e que é "regular" se satisfizer a vi.) e vii.) simultaneamente.*

Note-se que no caso dos conteúdos em semianéis ambas as propriedades ii.) e iv.) são consequências da aditividade destes conteúdos. Como a topologia τ_{τ_d} em geral não constitui um semianel, estas propriedades precisam ser independentemente postuladas.

Discutiremos a seguir o problema da extensão de um conteúdo para abertos para uma medida em na σ-álgebra Borel correspondente. O tratamento da questão da unicidade de tal extensão será idêntico ao do problema análogo para conteúdos em semianéis. Quanto ao problema da existência da extensão, adaptaremos o método de Carathéodory, já discutido em detalhes no caso de semianeis. Em particular, introduziremos, para qualquer conteúdo para abertos, uma medida exterior adequada.

Proposição 199 *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer e $\mu : \tau_d \to [0, \infty]$ um conteúdo para abertos σ-finito (isto é, existe uma sequência $O_n \in \tau_d$, $\mu(O_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, tal, que $\sup_{n \in \mathbb{N}} O_n = M$). Se existe uma medida em $\mathcal{B}(M, d)$ que estende μ então esta é única.*

Demonstração: Seja $\mu : \tau_d \to [0, \infty]$ um conteúdo para abertos e sejam duas medidas μ_1, μ_2 em $\mathcal{B}(M, d)$ que estendam o conteúdo μ. Como a topogia $\tau_d \subseteq 2^M$ é uma família de subconjuntos estável com relação à interseção, pelo Corolário 103, para todo $O \in \tau_d$, $\mu(O) < \infty$, e todo $E \in \mathcal{B}(M, d) = \sigma(\tau_d)$, vale

$$\mu_1(E \cap O) = \mu_2(E \cap O) \ .$$

Como μ é σ-finito, existe uma sequência $O_n \in \tau_d$, $\mu(O_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, tal, que $\sup_{n \in \mathbb{N}} O_n = M$. Pela σ-normalidade de medidas, para todo $E \in \mathcal{B}(M, d)$, tem-se:

$$\begin{aligned} \mu_1(E) &= \lim_{n \to \infty} \mu_1(E \cap O_n) \\ &= \lim_{n \to \infty} \mu_2(E \cap O_n) = \mu_2(E) \ . \end{aligned}$$

■

O seguinte exercício mostra que a última proposição sempre se aplica a conteúdos para abertos de espaços espaço métricos σ-localmente compactos, que sejam finitos em compactos:

Exercício 200 *Seja (M, d) um espaço métrico σ-localmente compacto. Prove que todo conteúdo para abertos $\mu : \tau_d \to [0, \infty]$ finito em compactos é σ-finito.*

É fácil ver que se um conteúdo para abertos não é pré-medida para aberto, isto é, se não vale a propriedade v.) de conteúdos para abertos, então este não pode ser estendido para uma medida. Para estudar a existência de medidas na σ-álgebra de Borel que estendem pré-medidas para abertos, introduzimos as seguintes medidas exteriores:

Definição 201 *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer e $\mu : \tau_d \to [0, \infty]$ um conteúdo para abertos. Defina $\mu^* : 2^M \to [0, \infty]$ por*

$$\mu^*(E) \doteq \inf\{\mu(O) \ : \ O \in \tau_d, \ E \subseteq O\} \ , \quad E \in 2^M \ .$$

Note-se que, pela monotonicidade de conteúdos para abertos, μ^* estende μ, ou seja, para todo aberto $O \in \tau_d$, tem-se $\mu^*(E) = \mu(E)$. Observe-se ainda que, em contraste com o caso dos conteúdos em semianeis, para um conteúdo para abertos μ genérico, μ^* pode não ser uma medida exterior. Isto não ocorre se μ for σ-subaditivo:

Lema 202 *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer. Para toda pré-medida para abertos $\mu : \tau_d \to [0, \infty]$, $\mu^* : 2^M \to [0, \infty]$ é uma medida exterior.*

Demonstração:

1. Note-se que a igualdade $\mu^*(\emptyset) = 0$ e a monotonicidade de μ^* seguem diretamente destas mesmas propriedades para μ (propriedades i.) e iv.) de conteúdos para abertos).

2. Para mostrar a σ-subaditividade de μ^* considere uma sequência arbitrária $E_n \in 2^M$, $n \in \mathbb{N}$. Se $\mu^*(E_n) = \infty$ para algum $n \in \mathbb{N}$ a σ-subaditividade vale trivialmente. Suporemos então que, para todo $n \in \mathbb{N}$, vale $\mu^*(E_n) < \infty$. Para todo $\varepsilon > 0$, seja uma sequência de abertos $O_n^{(\varepsilon)} \in \tau_d$, $E_n \subseteq O_n^{(\varepsilon)}$, $n \in \mathbb{N}$, tal, que

$$\mu^*(E_n) + \varepsilon 2^{-n} \geq \mu(O_n^{(\varepsilon)}) \ , \quad n \in \mathbb{N} \ .$$

Tal sequência existe pela definição de μ^*. Obviamente, vale $\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n \subseteq \sup_{n\in\mathbb{N}} O_n^{(\varepsilon)}$. Como $\sup_{n\in\mathbb{N}} O_n^{(\varepsilon)} \in \tau_d$, concluímos, pela σ-subaditividade de pré-medidas (propriedade v.) de conteúdos para abertos), que

$$\begin{aligned} \mu^*\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) &\leq \mu\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} O_n^{(\varepsilon)}\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(O_n^{(\varepsilon)}\right) \\ &\leq \varepsilon + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*\left(E_n\right) \ . \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, tem-se

$$\mu^*\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*\left(E_n\right) \ .$$

■

O seguinte fato será explorado mais adiante para mostrar casos em que tais medias exteriores são regulares nas σ-ágebras de Borel correspondentes:

Exercício 203 *Seja (M, d) um espaço métrico localmente compacto qualquer. Mostre que se a pré-medida para abertos $\mu : \tau_d \to [0, \infty]$ for finita em compactos então também a medida exterior μ^* é finita em compactos (no sentido habitual, isto é, $\mu^*(E) < \infty$ se $E \in \mathcal{K}(M, d)$).*

Não se deve concluir do último lema que abertos sejam μ^*-mensuráveis, já que μ^* estende μ. Na proposição seguinte mostramos que a normalidade da medida para abertos é condição suficiente para que estes sejam mensuráveis em relação à medida exterior correspondente:

Proposição 204 *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer. Se a pré-medida para abertos $\mu : \tau_d \to [0, \infty]$ é normal então todo aberto é μ^*-mensurável. Em particular, neste caso, $\mathcal{B}(M, d) \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$ e a restrição de μ^* a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(M, d)$ define uma medida exteriormente regular.*

Demonstração: Seja uma pré-medida para abertos $\mu : \tau_d \to [0, \infty]$ normal e seja $O \in \tau_d$ arbitrário. Recorde-se que a μ^*-mensurabilidade de O se refere à desigualdade

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap O) + \mu^*(E \backslash O) , \quad E \in 2^M .$$

Se $\mu^*(E) = \infty$ não há nada a demonstrar. Portanto, fixe um $E \in 2^M$, $\mu^*(E) < \infty$, arbitrário.

1. Para todo $\varepsilon > 0$, seja um $O_E^{(\varepsilon)} \in \tau_d$ tal, que $E \subseteq O_E^{(\varepsilon)}$ e $\mu^*(E) + \varepsilon \geq \mu(O_E^{(\varepsilon)})$. Tal aberto sempre existe, pela definição de μ^*. Como μ é normal, existe ainda um outro aberto $\tilde{O}_E^{(\varepsilon)} \in \tau_d$, cujo fecho $\overline{\tilde{O}_E^{(\varepsilon)}}$ é tal, que vale $\overline{\tilde{O}_E^{(\varepsilon)}} \subseteq O_E^{(\varepsilon)} \cap O$ e
$$\mu(\tilde{O}_E^{(\varepsilon)}) + \varepsilon \geq \mu(O_E^{(\varepsilon)} \cap O) .$$

2. Note-se que $\tilde{O}_E^{(\varepsilon)}$ e $O_E^{(\varepsilon)} \backslash \overline{\tilde{O}_E^{(\varepsilon)}}$ são subconjuntos abertos disjuntos e condidos em $O_E^{(\varepsilon)}$. Logo, pela monotonicidade e aditividade de conteúdos para abertos, vale que
$$\mu(O_E^{(\varepsilon)}) \geq \mu\left(\tilde{O}_E^{(\varepsilon)} \cup (O_E^{(\varepsilon)} \backslash \overline{\tilde{O}_E^{(\varepsilon)}})\right) = \mu(\tilde{O}_E^{(\varepsilon)}) + \mu\left(O_E^{(\varepsilon)} \backslash \overline{\tilde{O}_E^{(\varepsilon)}}\right) .$$

3. Como $O_E^{(\varepsilon)} \backslash O \subseteq O_E^{(\varepsilon)} \backslash \overline{\tilde{O}_E^{(\varepsilon)}}$, já que $\overline{\tilde{O}_E^{(\varepsilon)}} \subseteq O_E^{(\varepsilon)} \cap O \subseteq O$, tem-se, pela definição de μ^* e monotonicidade de medidas exteriores, que
$$\begin{aligned} \mu^*(E) + \varepsilon &\geq \mu(O_E^{(\varepsilon)}) \geq \mu(\tilde{O}_E^{(\varepsilon)}) + \mu\left(O_E^{(\varepsilon)} \backslash \overline{\tilde{O}_E^{(\varepsilon)}}\right) \\ &\geq \mu(\tilde{O}_E^{(\varepsilon)}) + \mu^*\left(O_E^{(\varepsilon)} \backslash O\right) \\ &\geq \mu(O_E^{(\varepsilon)} \cap O) + \mu^*\left(O_E^{(\varepsilon)} \backslash O\right) - \varepsilon \\ &\geq \mu^*(E \cap O) + \mu^*\left(E \backslash O\right) - \varepsilon . \end{aligned}$$
Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, tem-se, para todo $O \in \tau_d$ fixo que, para todo $E \in 2^M$, vale
$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap O) + \mu^*\left(E \backslash O\right) ,$$
isto é, $\tau_d \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$.

4. Pelo teorema de Carathéodory, $\mathcal{M}_{\mu^*}$ é uma σ-álgebra e a restrição de μ^* a esta é uma medida. Portanto, vale $\mathcal{B}(M, d) = \sigma(\tau_d) \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$ e a restrição de μ^* a $\mathcal{B}(M, d)$ é uma medida.

5. O fato de esta medida ser exteriormente regular decorre imediatamente da definição da medida exterior μ^*, notando que esta estende μ.

■

Corolário 205 *Seja (M,d) um espaço métrico σ-localmente compacto. Se a pré-medida para abertos $\mu : \tau_d \to [0,\infty]$ é regular então a restrição de μ^* a σ-álgebra $\mathcal{B}(M,d)$ define uma medida regular.*

Demonstração: Se a pré-medida para abertos μ é regular, pela última proposição, a restrição de μ^* a $\mathcal{B}(M,d)$ define uma medida. Como, por definição de pré-medida para abertos regular, μ é finita em compactos então, pelo Exercício 203, μ^* e, portanto, sua restrição a $\mathcal{B}(M,d)$ são também finitas em compactos. Logo, pelo Corolário 184, tal medida é regular. ■

Combinando o corolário acima com a Proposição 199, obtemos a seguinte proposição, que reune todos os resultados importantes demonstrados neste parágrafo:

Proposição 206 (existência e unicidade de medida que estende pré-medida para abertos) *Seja (M,d) um espaço métrico σ-localmente compacto. Se a pré-medida para abertos $\mu : \tau_d \to [0,\infty]$ é regular então esta possui uma extensão única para σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(M,d)$. Tal extensão é uma medida regular.*

Recorde-se que espaços normados de dimensão finita são exemplos de espaços métricos σ-localmente compacto e, portanto, a proposição acima sempre vale neste caso.

No seguinte parágrafo discutiremos um procedimento para associar funcionais positivos em espaço de funções contínuas a pré-medidas para abertos. As medidas obtidas por extensão destas últimas para as σ-álgebras de Borel correspondentes são conhecidas como "medidas de Radon".

1.11.2 Medidas de Radon

Definição 207 (funcionais positivos) *Seja M um conjunto não vazio qualquer e $\mathfrak{F}$ um espaço vetorial real, cujos elementos são funções $M \to \mathbb{R}$. Isto é, $\mathfrak{F}$ é uma coleção de tais funções que é estável com respeito à adição e à multiplicação por escalar real. Dizemos que um funcional linear $\Phi : \mathfrak{F} \to \mathbb{R}$ é "positivo" se, para toda função positiva f (isto é, $f(p) \geq 0$, par todo $p \in M$), valer $\Phi(f) \geq 0$.*

A seguir veremos que tais funcionais positivos Φ definem naturalmente funções $\xi_\Phi : 2^M \to [0,\infty]$ que são monótonas, superaditivas em subconjuntos disjuntos e satisfazem $\xi_\Phi(\emptyset) = 0$ (propriedades i.), iii.) e iv.) de conteúdos para abertos). Mostraremos que no caso do espaço de funções contínuas com suporte compacto estas definem pré-medidas para abertos que são regulares e finitas em compactos. Em particular, sob condições discutidas no parágrafo anterior, existe uma única medida na σ-álgebra Borel que coincide com ξ_Φ em abertos, e tal medida é regular.

Definição 208 (suporte de uma função) *Seja (M,d) um espaço métrico e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função qualquer. O conjunto fechado*

$$\mathrm{supp}(f) \doteq \overline{\{p \in M \ : \ f(p) \neq 0\}} = \overline{f^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\})} \in \mathcal{C}(M,d)$$

é chamado o "suporte" da função f. De modo equivalente, $\mathrm{supp}(f)$ *é o menor fechado fora do qual a função f é nula.*

Lema 209 *Seja (M,d) um espaço métrico qualquer, $\mathfrak{F}$ um espaço vetorial de funções $M \to \mathbb{R}$ e $\Phi : \mathfrak{F} \to \mathbb{R}$ um funcional linear positivo. Seja a função $\xi_\Phi : 2^M \to [0,\infty]$ definida por*

$$\xi_\Phi(E) \doteq \sup\{\Phi(f) \ : \ f \in \mathfrak{F} \text{ tal, que } \mathrm{supp}(f) \subseteq E \text{ e } f(M) \subseteq [0,1]\} \ , \quad E \in 2^M \ .$$

Esta tem as seguintes propriedades:

i.) $\xi_\Phi(\emptyset) = 0$.

ii.) Monotonicidade. *Para todo $E, E' \in 2^M$, $E' \subseteq E$, vale $\xi_\Phi(E') \leq \xi_\Phi(E)$.*

iii.) Superaditividade disjunta. *Para todo $E, E' \in 2^M$, $E \cap E' = \emptyset$, vale $\xi_\Phi(E' \cup E) \geq \xi_\Phi(E') + \xi_\Phi(E)$.*

Demonstração: Exercício.

Definição 210 (espaço de funções contínuas com suporte compacto) *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer. Denota-se por $C_c(M, d)$ o espaço vetorial das funções $M \to \mathbb{R}$ contínuas com suporte compacto, isto é,*

$$C_c(M, d) \doteq \{f : M \to \mathbb{R} \ : \ f \textit{ é contínua e } \mathrm{supp}(f) \in \mathcal{K}(M, d)\} .$$

Recorde-se que a topologia de um espaço normado X de dimensão finita é independende da escolha específica da norma $\|\cdot\|$ deste. Neste caso, portanto, usaremos a notação mais curta $C_c(X)$ para $C_c(X, d_{\|\cdot\|})$.

Demonstraremos a seguir que, para funcionais lineares positivos $\Phi : C_c(M, d) \to \mathbb{R}$, a restrição de ξ_Φ à topologia τ_d é sempre uma pré-medida para abertos. Para tanto, nos serviremos dos dois resultados seguintes, bem conhecidos em Análise:

Lema 211 *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer. Sejam um compacto $K \in \mathcal{K}(M, d)$ e um aberto $O \in \tau_d$ tais, que $K \subseteq O$. Existe uma função* contínua *$f_{K,O} : M \to \mathbb{R}$ tal, que i) para todo $p \in M$, $f_{K,O}(p) \in [0, 1]$, ii) $f_{K,O}(p) = 1$ se, e somente se, $p \in K$, e iii.) $\mathrm{supp}(f_{K,O}) \subseteq O$. Em particular, $f_{K,O}(p) = 0$ sempre que $p \notin O$.*

Demonstração: Para todo subconjunto não vazio $E \in 2^M$ defina a função $d_E : M \to [0, \infty)$ por

$$d_E(p) \doteq \inf\{d(p, p') \ : \ p' \in E\} , \quad p \in M .$$

Para toda constante positiva $\delta > 0$ defina a função $\chi_\delta : \mathbb{R} \to [0, 1]$ por

$$\chi_\delta(\alpha) \doteq \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \alpha \leq \frac{\delta}{2} \\ \frac{2\alpha}{\delta} - 1 & \text{se} \quad \frac{\delta}{2} < \alpha \leq \delta \\ 1 & \text{se} \quad \alpha > \delta \end{cases} .$$

É fácil ver que estas funções são contínuas. Note-se que como O^c é fechado (pois O é aberto), K é compacto e $O^c \cap K = \emptyset$, vale, pelo Exercício 160, que

$$\begin{aligned} \inf\{d_K(p) \quad &: \quad p \in O^c\} = \inf\{d_{O^c}(p) \ : \ p \in K\} \\ &= \quad \inf\{d(p, p') \ : \ p \in K \ , \ p' \in O^c\} \doteq \delta_{K,O} > 0 . \end{aligned}$$

Defina, por fim, a função contínua $f_{K,O} : M \to [0, 1]$ por

$$f_{K,O}(p) \doteq \frac{\chi_{\delta_{K,O}}(d_{O^c}(p))}{1 + d_K(p)} , \quad p \in M .$$

Por construção, vale $\mathrm{supp}(f_{K,O}) \subseteq O$, pois $f_{K,O}(p) = 0$ quando $d_{O^c}(p) \leq \frac{\delta_{K,O}}{2} > 0$. Se $p \in K$, vale $d_K(p) = 0$ e $d_{O^c}(p) \geq \delta_{K,O} > 0$. Portanto, neste caso $f_{K,O}(p) = 1$. Finalmente, se $p \notin K$ então, novamente pelo Exercício 160, notando que $\{p\} \subseteq M$ é um subconjunto fechado,

$$d_K(p) = \inf\{d(p', p'') \ : \ p' \in K \ , \ p'' \in \{p\}\} > 0 .$$

$\blacksquare$

Proposição 212 (existência de partições da unidade subordinadas) *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer, seja um compacto não vazio $K \in \mathcal{K}(M, d)$ arbitrário e sejam (finitos) abertos $O_1, \ldots, O_n \in \tau_d$ tais, que $K \subseteq O_1 \cup \cdots \cup O_n$. Existem funções contínuas $f_1, \ldots, f_n : M \to [0, 1]$ tais, que $\mathrm{supp}(f_k) \subseteq O_k$, $k = 1, \ldots, n$, e, para todo $p \in K$, vale*

$$f_1(p) + \cdots + f_n(p) = 1 \; .$$

Uma demonstração da última proposição pode ser encontrada, por exemplo, no livro "Real and Complex Analysis" de Walter Rudin.

Proposição 213 *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer e $\Phi : C_c(M, d) \to \mathbb{R}$ um funcional linear positivo. A restrição de ξ_Φ a τ_d é uma pré-medida para abertos.*

Demonstração: Seja $\Phi : C_c(M, d) \to \mathbb{R}$ um funcional linear positivo e denote μ_Φ a restrição de ξ_Φ a τ_d. Pelo Lema 209, já sabemos que $\mu_\Phi(\emptyset) = 0$, e que μ_Φ é monótono crescente e superaditivo para subconjuntos disjuntos.

Para provar a σ-subaditividade de μ_Φ (propriedade v.) de conteúdos para abertos) considere uma sequência arbitrária $O_n \in \tau_d$, $n \in \mathbb{N}$, e defina $O \doteq \sup_{n \in \mathbb{N}} O_n \in \tau_d$. Seja qualquer $f \in C_c(M, d)$ tal, que $\mathrm{supp}(f) \subseteq O$ e $f(M) \subseteq [0, 1]$. Como $\mathrm{supp}(f)$ é compacto, existe um $N_f \in \mathbb{N}$ tal, que

$$\mathrm{supp}(f) \subseteq O_1 \cup \cdots \cup O_{N_f} \; .$$

Sejam funções contínuas $f_1, \ldots, f_{N_f} : M \to [0, 1]$ tais, que $\mathrm{supp}(f_k) \subseteq O_k$, $k = 1, \ldots, N_f$, e, para todo $p \in \mathrm{supp}(f)$, vale

$$f_1(p) + \cdots + f_{N_f}(p) = 1 \; .$$

Tais funções existem pela última proposição. Em particular, para as funções contínuas $\tilde{f}_k \doteq f_k \cdot f$, $1, \ldots, N_f$, tem-se que $\mathrm{supp}(\tilde{f}_k) \subseteq O_k \cap \mathrm{supp}(f)$ (em particular, $\mathrm{supp}(\tilde{f}_k)$ é compacto), $\tilde{f}_k(M) \subseteq [0, 1]$, $k = 1, \ldots, N_f$, e

$$f = \tilde{f}_1 + \cdots + \tilde{f}_{N_f} \; .$$

Pela linearidade de Φ vale

$$\begin{aligned} \Phi(f) &= \Phi(\tilde{f}_1) + \cdots + \Phi(\tilde{f}_{N_f}) \\ &\leq \mu_\Phi(O_1) + \cdots + \mu_\Phi(O_{N_f}) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_\Phi(O_n) \; . \end{aligned}$$

e, portanto, tomando o supremo em relação a f, concluímos que

$$\mu_\Phi\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} O_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_\Phi(O_n).$$

■

Mostraremos a seguir que no caso de espaços localmente compactos as pré-medidas para abertos da última proposição são regulares:

Proposição 214 *Seja (M, d) um espaço métrico localmente compacto e $\Phi : C_c(M, d) \to \mathbb{R}$ um funcional linear positivo. A restrição de ξ_Φ a τ_d é uma pré-medida para abertos que regular.*

Demonstração: Já sabemos, pela última proposição, que a restrição de ξ_Φ a τ_d é uma pré-medida para abertos.

1. Seja $O \in \tau_d$ tal, que $\overline{O} \in \mathcal{K}(M, d)$. Como $\overline{O}$ é compacto e o espaço (M, d) é localmente compacto, $\overline{O}$ está contido na união de finitas bolas abertas, cujos fechos são compactos. Seja $U \in \tau_d$ a união de tais bolas, e observe-se que $\overline{O} \subseteq U$ e $\overline{U} \in \mathcal{K}(M, d)$. Pelo último lema, existe uma função contínua $f_O : M \to [0, 1]$ tal, que $\mathrm{supp}(f_O) \subseteq U$ (em particular, $f_O \in C_c(M, d)$) e $f_O(p) = 1$ se $p \in \overline{O}$. Seja qualquer $f \in C_c(M, d)$ tal, que $\mathrm{supp}(f) \subseteq O$ e $f(M) \subseteq [0, 1]$. Por construção, a diferença $f_O - f \in C_c(M, d)$ é uma função positiva. Como Φ é um funcional linear positivo, tem-se que $\Phi(f_O) \geq \Phi(f)$. Deste modo, tomando o supremo em relação a f, vale
$$\mu_\Phi(O) \leq \Phi(f_O) < \infty$$
e, portanto, μ_Φ é um conteúdo para abertos finito em compactos (propriedade vi.) de conteúdos para abertos).

2. Seja $O \in \tau_d$ fixo e tome um $f \in C_c(M, d)$ qualquer tal, que $\mathrm{supp}(f) \subseteq O$ e $f(M) \subseteq [0, 1]$. Para todo $p \in O$, seja $r_p \in (0, \infty)$ tal, que $\overline{B}_{r_p}(p) \subseteq O$ e $\overline{B}_{r_p}(p) \in \mathcal{K}(M, d)$. Tais r_p existem, pois O é aberto e o espaço métrico (M, d) é localmente compacto. Como $\mathrm{supp}(f)$ é compacto, existe um subconjunto finito $\tilde{E} \subseteq \mathrm{supp}(f)$ tal, que
$$\mathrm{supp}(f) \subseteq O_f \doteq \sup_{p \in \tilde{E}} B_{r_p}(p) \subseteq \sup_{p \in \tilde{E}} \overline{B}_{r_p}(p) \subseteq O\ .$$
Recorde-se que $\overline{B}_r(p)$ denota a bola fechada de centro $p \in M$ e raio $r \in (0, \infty)$, enquanto $B_r(p)$ denota a bola aberta de mesmo centro e raio. Como $\sup_{p \in \tilde{E}} \overline{B}_{r_p}(p)$ é compacto, e portanto fechado, pois $\tilde{E}$ é finito, tem-se que
$$\overline{O}_f \subseteq \sup_{p \in \tilde{E}} \overline{B}_{r_p}(p) \subseteq O\ .$$
Note-se que $\overline{O}_f$ é compacto, pois é um subconjunto fechado de um compacto. Pelo último lema (aplicado a $\mathrm{supp}(f) \in \mathcal{K}(M, d)$ e $O_f \in \tau_d$), existe $\tilde{f} \in C_c(M, d)$ tal, que vale
$$\mathrm{supp}(\tilde{f}) \subseteq O_f \subseteq \overline{O}_f \subseteq O\ ,$$
$\tilde{f}(M) \subseteq [0, 1]$ e $\tilde{f}(p) = 1$ se $p \in \mathrm{supp}(f)$. Em particular, vale $\tilde{f} \geq f$. Note-se que o suporte de $\tilde{f}$ é compacto, pois está contido no compacto $\overline{O}_f$. Deste modo, tem-se que $\mu_\Phi(O_f) \geq \Phi(\tilde{f}) \geq \Phi(f)$ para um $O_f \in \tau_d$, $\overline{O}_f \subseteq O$. Tomando o supremo em relação a f concluímos que
$$\mu_\Phi(O) \leq \sup\{\mu_\Phi(O')\ :\ O' \in \tau_d\ ,\ \overline{O}' \subseteq O\} \leq \mu_\Phi(O)\ .$$
Isto prova a normalidade de μ_Φ (propriedade vii.) de conteúdos para abertos).

Logo, μ_Φ é regular. ■

Combinando a última proposição com a Proposição 206 obtemos o seguinte importante resultado:

Corolário 215 (existência e unicidade de medidas de Radon) *Seja (M, d) um espaço métrico σ-localmente compacto. Para todo funcional linear positivo $\Phi : C_c(M, d) \to \mathbb{R}$, existe uma medida μ_Φ em $\mathcal{B}(M, d)$ única tal, que, para todo $O \in \tau_d$, vale*
$$\mu_\Phi(O) = \sup\{\Phi(f)\ :\ \mathrm{supp}(f) \subseteq O \text{ e } f(M) \subseteq [0, 1]\}\ .$$
Tal medida μ_Φ é regular.

Note-se que não se deve concluir que a igualdade neste corolário vale para todo Boreliano $E \in \mathcal{B}(M, d)$, no lugar dos abertos $O \in \tau_d$ somente. Recorde-se que espaços normados de dimensão finita são sempre σ-localmente compactos e, portanto, o corolário sempre vale para estes espaços.

Medidas definidas por funcionais positivos, como no corolário, são chamadas "medidas de Radon". Provaremos mais adiante que, para espaços métricos (M, d) σ-localmente compactos, a função $\Phi \mapsto \mu_\Phi$ define uma bijeção entre funcionais lineares positivos $C_c(M, d) \to \mathbb{R}$ e medidas regulares na σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(M, d)$ (teorema de Riesz-Markov). Por esta razão, muitos autores, ao considerarem espaços localmente compactos, definem medidas de Radon como sendo medidas regulares e usam o mesmo símbolo (aqui Φ) para denotar tanto funcionais positivos, quanto as medidas associadas.

Como exemplo explícito importante de uma medida de Radon, propomos o seguinte exercício:

Exercício 216 *Para um $d \in \mathbb{N}$ arbitrario, defina o funcional linear positivo $\mathfrak{R} : C_c(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ por*

$$\mathfrak{R}(f) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_d) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_d \ , \quad f \in C_c(\mathbb{R}^d) \ .$$

Note-se que a integral de Riemann acima está sempre bem definida, pois f é contínua e tem suporte compacto. Mostre que a medida de Lebesgue-Borel $\lambda^{(d)}$ é a medida de Radon asssociada ao funcional (de Riemann) $\mathfrak{R}$.

Sugestão: Mostre que a medida de Radon $\mu_{\mathfrak{R}}$ é invariante à translação.

Neste parágrafo vimos que funcionais lineares positivos em espaços vetoriais de funções definem, sob certas condições, medidas únicas. Veremos no próximo capítulo que, analogamente, medidas (ou, mais geralmente, conteúdos) definem naturalmente funcionais lineares positivos em espaços de funções, por meio da noção de "integral".

2 A Integral de Lebesgue

2.1 Funções Mensuráveis

Antes de introduzirmos noção de integral com respeito a um conteúdo, neste parágrafo definiremos e discutiremos algumas propriedades importantes de funções mensuráveis com respeito a álgebras de conjuntos gerais. No parágrafo subsequente serão definidas e estudadas as integrais de tais funções.

Definição 217 (transformações mensuráveis com relação a álgebras de conjuntos) *Sejam M_1, M_2 dois conjuntos quaisquer não vazios e $\mathcal{A}_1 \subseteq 2^{M_1}$, $\mathcal{A}_2 \subseteq 2^{M_2}$* álgebras *arbitrárias sobre estes conjuntos. Dizemos que a função $f : M_1 \to M_2$ é "$\mathcal{A}_2$-$\mathcal{A}_1$-mensurável" se vale $f^{-1}(\mathcal{A}_2) \subseteq \mathcal{A}_1$. No caso especial $M_2 = \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}(\mathcal{I}_{\mathbb{R}}^d)$, dizemos que f é "$\mathcal{A}_1$-mensurável", se esta for $\mathcal{A}_2$-$\mathcal{A}_1$-mensurável. Diremos que $f : \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{R}^{d_2}$, $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$, é "mensurável" se esta for $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_1})$-mensurável, isto é, se esta for $\mathcal{A}(\mathcal{I}_{\mathbb{R}}^{d_2})$-$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_1})$-mensurável. Denotar-se-á por $\mathfrak{M}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ o conjunto de todas as funções $\mathcal{A}_2$-$\mathcal{A}_1$-mensuráveis. Utilizaremos a notação mais curta $\mathfrak{M}(\mathcal{A}_1)$ para $\mathfrak{M}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ no caso especial $M_2 = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}(\mathcal{I}_{\mathbb{R}}^1)$ das funções $\mathcal{A}_1$-mensuráveis com valores em $\mathbb{R}$.*

Recorde-se que $\mathcal{A}(\mathcal{I}_{\mathbb{R}}^d) \subseteq 2^{\mathbb{R}^d}$ denota a álgebra gerada por $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}^d \subseteq 2^{\mathbb{R}^d}$ e que a noção de "$\mathcal{A}_2$-$\mathcal{A}_1$-mensurabilidade" já foi introduzida na Definição 97 para o caso especial das álgebras $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ sendo σ-álgebras. Nesta mesma definição também haviam sido introduzidas as noções de "$\mathcal{A}_1$-mensurabilidade", $\mathcal{A}_1$ sendo uma σ-álgebra, e de "mensurabilidade", porém com as σ-álgebras de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $d \in \mathbb{N}$, no lugar das álgebras de conjuntos $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}(\mathcal{I}_{\mathbb{R}}^d) \subsetneq \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Logo, não é imediatamente claro que a última definição corresponda estas duas noções da Definição 97. Com efeito, o próximo corolário implica que a última definição é uma especificação da Definição 97.

Do Exercício 30 deduzimos imediatamente o seguinte critério de mensurabilidade:

Lema 218 *Seja $\mathcal{A}_1 \subseteq 2^{M_1}$ uma álgebra sobre o conjunto M_1 e $\mathcal{E}_2 \subseteq 2^{M_2}$ uma família qualquer de subconjuntos de M_2. Uma função $f : M_1 \to M_2$ é $\mathcal{A}(\mathcal{E}_2)$-$\mathcal{A}_1$-mensurável se, e somente se, vale $f^{-1}(\mathcal{E}_2) \subseteq \mathcal{A}_1$. Em particular, $f : M_1 \to \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, é $\mathcal{A}_1$-mensurável se, e somente se, $f^{-1}(\mathcal{I}^d_{\mathbb{R}}) \subseteq \mathcal{A}_1$, e $f : \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{R}^{d_2}$, $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$, é mensurável se, e somente se, $f^{-1}(\mathcal{I}^{d_2}_{\mathbb{R}}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. De modo análogo, se $\mathcal{A}_1$ é uma σ-álgebra então f é $\sigma(\mathcal{E}_2)$-$\mathcal{A}_1$-mensurável se, e somente se, vale $f^{-1}(\mathcal{E}_2) \subseteq \mathcal{A}_1$.*

O seguinte corolário é consequência direta do último lema:

Corolário 219 *Sejam $\mathcal{A}_1 \subseteq 2^{M_1}$ e $\mathcal{A}_2 \subseteq 2^{M_2}$ álgebras arbitrárias sobre dois conjuntos M_1 e M_2. Então tem-se a inclusão*

$$\mathfrak{M}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) \subseteq \mathfrak{M}(\sigma(\mathcal{A}_1), \sigma(\mathcal{A}_2)) \ .$$

Se $\mathcal{A}_1$ é uma σ-álgebra então vale

$$\mathfrak{M}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = \mathfrak{M}(\mathcal{A}_1, \sigma(\mathcal{A}_2)) \ .$$

O último corolário mostra que a Definição 217 especifica, de modo natural, a noção de mensurabilidade da Definição 97. Da segunda parte deste corolário, observando que

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathcal{I}^d_{\mathbb{R}}) = \sigma(\mathcal{A}(\mathcal{I}^d_{\mathbb{R}})) \ , \quad d \in \mathbb{N} \ ,$$

segue a equivalência das noções de "$\mathcal{A}_1$-mensurabilidade" e "mensurabilidade" da Definição 97 e as da Definição 217 para o caso especial em que $\mathcal{A}_1$ é uma σ-álgebra (e não somente álgebra de conjuntos).

Observe-se que se (M_1, d_1) e (M_2, d_2) são dois espaço métricos quaisquer então toda função contínua $f : M_1 \to M_2$ é $\mathcal{A}(\tau_{d_2})$-$\mathcal{A}(\tau_{d_1})$-mensurável.

Exercício 220 *Sejam conjuntos não vazios $M_0, \ldots, M_n$, $n \in \mathbb{N}$, álgebras*

$$\mathcal{A}_0 \subseteq 2^{M_0}, \ldots, \mathcal{A}_n \subseteq 2^{M_n}$$

e funções $f_k : M_{k-1} \to M_k$ $\mathcal{A}_k$-$\mathcal{A}_{k-1}$-mensuráveis, $k = 1, \ldots, n$. Mostre que a composição

$$f_n \circ \cdots \circ f_1 : M_0 \to M_n$$

é $\mathcal{A}_n$-$\mathcal{A}_0$-mensurável.

Exercício 221 *seja (M, d) um espaço métrico qualquer e $f : M \to \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, uma função contínua. Mostre que f é $\mathcal{A}(\tau_d)$-mensurável (isto é, $\mathcal{A}(\mathcal{I}^n_{\mathbb{R}})$-$\mathcal{A}(\tau_d)$-mensurável).*

A seguir introduzimos uma classe importante de funções mensuráveis, a das funções ditas "simples":

Definição 222 (função simples) *Seja M um conjunto não vazio e $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ uma álgebra sobre M. A função $f : M \to \mathbb{R}$ é "simples" com respeito a $\mathcal{A}$ se, para um $N \in \mathbb{N}$, existem constantes $c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{R}$ e elementos $E_1, \ldots, E_N \in \mathcal{A}$ tais, que*

$$f = \sum_{n=1}^{N} c_n \chi_{E_n} \ .$$

Recorde-se χ_{E_n} denota a função característica do subconjunto $E_n \subseteq M$. Denotar-se-á por $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ o conjunto de todas as funções simples com respeito a álgebra $\mathcal{A}$.

Se μ é um conteúdo em $\mathcal{A}$ dizemos que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é simples com respeito a $\mathcal{A}$ e μ se esta função é simples com respeito a $\mathcal{A}$ no sentido dado acima e existe representação como acima para f tal, que $\mu(E_n) < \infty$, $n = 1, \ldots, N$. Denotar-se-á por $\mathcal{S}(\mathcal{A}, \mu)$ o conjunto de todas as funções simples com respeito a $\mathcal{A}$ e μ.

Observação 223

i.) *A representação de uma função simples como combinação linear de funções características de elementos da álgebra em questão é, em geral, não única.*

ii.) *É sempre possível representar um função simples com relação a uma álgebra de cojuntos como combinação linear de funções características de elementos* disjuntos *desta álgebra. Dito de outra forma, f é função simples com respeito à álgebra $\mathcal{A}$ se existem finitos subconjuntos $E_1, \ldots, E_N \in \mathcal{A}$ tais, que f seja constante quando restrita a eles e nula fora da união destes.*

ii.) *Claramente, tem-se a inclusão $\mathcal{S}(\mathcal{A}, \mu) \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{A})$. Porém, em geral, $\mathcal{S}(\mathcal{A}, \mu) \neq \mathcal{S}(\mathcal{A})$: A função constante $f = 1$ é simples com respeito a toda álgebra $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ sobre M, pois é a função característica de M. Porém, para $M = \mathbb{R}$, esta função não é simples com respeito a $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ e à medida de Lebesgue-Borel $\lambda^{(1)}$, pois não há decomposição finita da reta real em Borelianos com medida de Lebesgue-Borel finita. Com efeito, $\mathcal{S}(\mathcal{A}, \mu) = \mathcal{S}(\mathcal{A})$ se, e somente se, μ é um conteúdo finito.*

As funções simples são importantes exemplos de funções mensuráveis:

Exercício 224 *Seja M um conjunto não vazio e $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ uma álgebra sobre M. Mostre que toda função simples $f \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ é $2^{\mathbb{R}}$-$\mathcal{A}$-mensurável.*

Note-se que o exercício acima implica que, para toda álgebra de conjuntos $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ sobre $\mathbb{R}$, tem-se que $\mathcal{S}(\mathcal{A}) \subseteq \mathfrak{M}(\mathcal{A}, \mathcal{A}_{\mathbb{R}})$. Em particular, tem-se $\mathcal{S}(\mathcal{A}) \subseteq \mathfrak{M}(\mathcal{A})$.

Dizemos que uma função $f : M \to \mathbb{R}$ é "limitada" se o conjunto de reais $f(M) \subseteq \mathbb{R}$ (imagem de f) for limitado. f é dita ser uma "função positiva" se, para todo $p \in M$, vale $f(p) \geq 0$. Funções mensuráveis limitadas ou positivas são sempre limites de funções simples:

Proposição 225 (funções mensuráveis como limites de simples) *Seja M um conjunto não vazio, $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ uma álgebra sobre M e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função $\mathcal{A}$-mensurável.*

i.) *Se f é limitada então existem sequências de funções simples, $f_n^\flat, f_n^\sharp \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, $n \in N$, uniformemente convergentes para f, isto é,*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{p\in M} |f(p) - f_n^\flat(p)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{p\in M} |f_n^\sharp(p) - f(p)| = 0 ,$$

tais, que $f \geq f_{n+1}^\flat \geq f_n^\flat$ (a sequência $f_n^\flat$ é crescente e limitada por cima por f) e $f \leq f_{n+1}^\sharp \leq f_n^\sharp$ (a sequência $f_n^\sharp$ é decrescente e limitada por baixo por f).

ii.) *Se f é uma função positiva então existe sequência de funções simples $f_n^\flat \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, $n \in N$, convergente pontualmente para f, isto é, para todo $p \in M$,*

$$\lim_{n\to\infty} f_n^\flat(p) = f(p) ,$$

tal, que $f \geq f_{n+1}^\flat \geq f_n^\flat$.

Demonstração:

i.) Seja f $\mathcal{A}$-mensurável e limitada. Escolha-se um $N_f \in \mathbb{N}$ qualquer tal, que

$$N_f \geq \sup_{p \in M} |f(p)| \ .$$

Defina então, para todo $n \in \mathbb{N}$, as funções simples $f_n^\flat, f_n^\sharp \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ por:

$$\begin{aligned} f_n^\flat &\doteq \sum_{k=-N_f 2^n}^{N_f 2^n} k2^{-n} \chi_{f^{-1}((2^{-n}k, 2^{-n}(k+1)])} \ , \\ f_n^\sharp &\doteq \sum_{k=-N_f 2^n}^{N_f 2^n} k2^{-n} \chi_{f^{-1}((2^{-n}(k-1), 2^{-n}k])} \ . \end{aligned}$$

Note-se que

$$f^{-1}((2^{-n}(k-1), 2^{-n}k]) \in \mathcal{A} \ ,$$

$n, k \in \mathbb{N}$, pois f é $\mathcal{A}$-mensurável. Por construção, para todo $p \in M$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se que

$$f_n^\flat \leq f_{n+1}^\flat \leq f \leq f_{n+1}^\sharp \leq f_n^\sharp \quad \text{e} \quad 0 \leq f(p) - f_n^\flat(p), f_n^\sharp(p) - f(p), f_n^\sharp(p) - f_n^\flat(p) \leq 2^{-n} \ .$$

ii.) Se f é mensurável e positiva definimos, para todo $n \in \mathbb{N}$, a função simples $f_n^\flat \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ por:

$$f_n^\flat \doteq \sum_{k=0}^{n2^n} k2^{-n} \chi_{f^{-1}((2^{-n}k, 2^{-n}(k+1)])} \ .$$

De modo análogo, por construção, para todo $p \in M$ e $n \in \mathbb{N}$, vale

$$f_n^\flat(p) \leq f_{n+1}^\flat(p) \leq f(p) \ .$$

Para todo $p \in M$ tal, que $f(p) \leq n$, tem-se

$$f(p) - f_n^\flat(p) \leq 2^{-n}.$$

Portanto, a sequência $f_n^\flat$, $n \in \mathbb{N}$, converge pontualmente para f (mas, em geral, não uniformemente).

■

A seguir discutiremos a estabilidade da mensurabilidade com respeito a operações simples com funções:

Definição 226 (operações pontuais com funções) *Seja M um conjunto não vazio qualquer. Definimos as seguintes operações e relações no espaço de funções $M \to \mathbb{R}$.*

i.) Para duas funções quaisquer $f, f' : M \to \mathbb{R}$ definimos a função $f + f' : M \to \mathbb{R}$ por

$$[f + f'](p) \doteq f(p) + f'(p) \ , \quad p \in M \ .$$

ii.) Para toda constante $\alpha \in \mathbb{R}$ e toda função $f : M \to \mathbb{R}$ definimos a função $\alpha f : M \to \mathbb{R}$ por

$$[\alpha f](p) \doteq \alpha(f(p)) \ , \quad p \in M \ .$$

iii.) *Para duas funções quaisquer $f, f' : M \to \mathbb{R}$ definimos a função $f \cdot f' : M \to \mathbb{R}$ por*

$$[f \cdot f'](p) \doteq f(p) \cdot f'(p) \ , \quad p \in M \ .$$

iv.) *Introduzimos uma relação de ordem parcial no espaço das funções $M \to \mathbb{R}$: Duas duas funções quaisquer $f, f' : M \to \mathbb{R}$ estão em relação de ordem se, para todo $p \in M$, vale $f'(p) \leq f(p)$. Denota-se esta relação por $f' \leq f$.*

v.) *Para duas funções quaisquer $f, f' : M \to \mathbb{R}$ definimos a função $f \wedge f' : M \to \mathbb{R}$ por*

$$[f \wedge f'](p) \doteq \min\{f(p), f'(p)\} \ , \quad p \in M \ .$$

Observe-se que $f \wedge f'$ é a maior função $M \to \mathbb{R}$ (com respeito a ordem parcial definida em iv.)) tal, que $f \wedge f' \leq f$ e $f \wedge f' \leq f'$.

vi.) *Para duas funções quaisquer $f, f' : M \to \mathbb{R}$ definimos a função $f \vee f' : M \to \mathbb{R}$ por*

$$[f \vee f'](p) \doteq \max\{f(p), f'(p)\} \ , \quad p \in M \ .$$

Observe-se que $f \vee f'$ é a menor função $M \to \mathbb{R}$ tal, que $f \leq f \vee f'$ e $f' \leq f \vee f$.

Recorde-se que com as operações i.) e ii.) acima o conjunto de todas as funções $M \to \mathbb{R}$ forma um espaço vetorial real, com as operações i.)-iii.) este espaço forma uma álgebra real[5], com as operações i.) e ii.) e a relação de ordem parcial iv.) temos um espaço vetorial parcialmente ordenado. Este último é um dito "espaço de Riesz", ou seja, um espaço vetorial parcialmente ordenado que forma um reticulado em relação a sua estrutura de ordem parcial. Recorde-se que um conjunto parcialmente ordenado é um "reticulado" se pares de elementos deste espaço sempre possuem ínfimo e supremo. No caso das funções tais ínfimos e supremos são dados, respectivamente, pelas operações v.) e vi.) acima.

Definição 227 (espaços de funções) *Seja M um conjunto não vazio qualquer e $\mathfrak{F}$ um conjunto de funções $M \to \mathbb{R}$. Dizemos que $\mathfrak{F}$ é um "espaço de funções" se este é estável com relação às operações i.), ii.), v.) e vi.) definidas acima.*

Observe-se que espaços de funções são sempre espaços de Riesz com respeito a ordem parcial iv.), cujos respectivos ínfimos e supremos de pares de seus elementos são dados pelas operações v.) e vi.).

Exercício 228 *Seja M um conjunto não vazio, $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ uma álgebra sobre M e μ um conteúdo nesta álgebra. Mostre que $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ e $\mathcal{S}(\mathcal{A}, \mu)$ são espaços de funções (isto é, são estáveis com respeito às operações i.), ii.), v.) e vi.) acima) e álgebras (isto é, são estáveis com respeito às operações i.)-iii.) acima).*

Apesar de as funções simples sempre formarem espaços de funções e, portanto, espaços vetoriais, o mesmo não é sempre verdade para o conjunto $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ de todas as funções mensuráveis com relação a $\mathcal{A}$, a depender da escolha desta álgebra. Veremos a seguir que se $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra então $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ é, de fato, espaço de funções e álgebra.

Proposição 229 *Seja M um conjunto não vazio e $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ uma σ-álgebra sobre M. Então $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ é espaço de funções e álgebra.*

[5]Uma álgebra real é, por definição, um espaço vetorial real com um produto que é distributivo em relação à operação de soma.

Demonstração: Sejam $f_1, f_2 \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ arbitrárias. Defina as funções $(f_1, f_2) : M \to \mathbb{R}^2$ e $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned} (f_1, f_2)(p) &\doteq (f_1(p), f_2(p)) \ , \quad p \in M \ , \\ s(x) &\doteq x_1 + x_2 \ , \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ . \end{aligned}$$

Por construção, tem-se $f_1+f_2 = s\circ(f_1, f_2)$. Para todo $(a_1, b_1]\times(a_2, b_2] \in \mathcal{I}^2_{\mathbb{R}}$, pela $\mathcal{A}$-mensurabilidade de f_1 e f_2, vale

$$(f_1, f_2)^{-1}((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]) = f_1^{-1}((a_1, b_1]) \cap f_2^{-1}((a_2, b_2]) \in \mathcal{A} \ .$$

Logo, pelo Lema 218, (f_1, f_2) é $\mathcal{A}$-mensurável. Como $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra, pelo Corolário 219, (f_1, f_2) é $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-$\mathcal{A}$-mensurável, Note-se que s é contínua e, portanto, ($\mathcal{B}(\mathbb{R})$-$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-)mensurável. Deste modo, $f_1 + f_2$ é $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-$\mathcal{A}$-mensurável pois é composição de uma função $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-$\mathcal{A}$-mensurável com uma função $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-mensurável. Isto é, $f_1 + f_2 \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$. Por argumento similar provamos que também as funções $f_1 \cdot f_2$, $f_1 \wedge f_2$ e $f_1 \vee f_2$ são $\mathcal{A}$-mensuráveis. Observe-se finalmente que funções constantes são funções simples e, portanto, mensuráveis. Logo a função $\alpha f_1 = \alpha \cdot f_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, é $\mathcal{A}$-mensurável, pois é produto pontual de duas funções $\mathcal{A}$-mensuráveis. ■

2.1.1 Estabilidade da mensurabilidade com respeito a limites pontuais

Seja M um conjunto qualquer não vazio e f_n, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de funções $M \to \mathbb{R}$ tal, que, para todo $p \in M$,

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(p), \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(p) \in \mathbb{R} \ .$$

Isto é, para todo $p \in M$, o ínfimo e o supremo das sequências de números reais $f_n(p)$, $n \in \mathbb{N}$, são finitos. Observe-se que uma condição suficiente para que isto ocorra é que, para todo $p \in M$, exista o limite $\lim_{n\to\infty} f_n(p) \in \mathbb{R}$. Neste caso particular dizemos que a função tem "limite pontual" e definimos a função $\lim_{n\to\infty} f_n : M \to \mathbb{R}$ por:

$$\left[\lim_{n\to\infty} f_n\right](p) \doteq \lim_{n\to\infty} f_n(p) \ , \quad p \in M \ .$$

Também definimos, a partir da sequência de funções f_n, $n \in \mathbb{N}$, as novas funções $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\liminf_{n\to\infty} f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ de M em $\mathbb{R}$ por:

$$\begin{aligned} \left[\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n\right](p) &\doteq \inf_{n\in\mathbb{N}}\{f_n(p)\} \ , \\ \left[\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n\right](p) &\doteq \sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n(p)\} \ , \\ \left[\liminf_{n\to\infty} f_n\right](p) &\doteq \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\inf_{k\geq n}\{f_k(p)\}\} \ , \\ \left[\limsup_{n\to\infty} f_n\right](p) &\doteq \inf_{n\in\mathbb{N}}\{\sup_{k\geq n}\{f_k(p)\}\} \ , \end{aligned}$$

$p \in M$. Estas funções são chamadas, respectivamente, "ínfimo", "supremo", "limite inferior" e "limite superior" da sequência f_n, $n \in \mathbb{N}$. Observe-se que,

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n \leq \liminf_{n\to\infty} f_n \leq \limsup_{n\to\infty} f_n \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \ .$$

Note-se também que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n = -\inf_{n\in\mathbb{N}}(-f_n) \quad \text{e} \quad \limsup_{n\to\infty} f_n = -\liminf_{n\to\infty}(-f_n) \ .$$

Observe-se, por fim, que a sequência f_n, $n \in \mathbb{N}$, tem limite pontual se, e somente se,

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n \ ,$$

em qual caso tem-se:

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n \ .$$

Lema 230 *Seja M um conjunto não vazio qualquer e sejam f_n, $n \in \mathbb{N}$, funções de M em $\mathbb{R}$ tais, que, para todo $p \in M$, vale $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(p) \in \mathbb{R}$ (isto é, para todo $p \in M$, a sequência numérica $f_n(p)$, $n \in \mathbb{N}$, é inferiormente limitada). Então, para todo $a \in \mathbb{R}$,*

$$\left[\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n\right]^{-1}([a,\infty)) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}([a,\infty)) \ .$$

Demonstração: Se $p \in [\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n]^{-1}([a,\infty))$ então, pela definição do ínfimo de uma sequência numérica, para todo $n \in \mathbb{N}$, $f_n(p) \geq a$. Isto é, para todo $n \in \mathbb{N}$, vale $p \in f_n^{-1}([a,\infty))$. Com isso concluímos que

$$\left[\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n\right]^{-1}([a,\infty)) \subseteq \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}([a,\infty)) \ .$$

Seja agora

$$p \in \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}([a,\infty)) \ .$$

Então, $f_n(p) \geq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ou seja, $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(p) \geq a$ e, portanto,

$$p \in \left[\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n\right]^{-1}([a,\infty)) \ .$$

Isto mostra que

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}([a,\infty)) \subseteq \left[\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n\right]^{-1}([a,\infty)) \ .$$

■

Exercício 231 *Mostre que vale a igualdade*

$$\sigma\left(\{[a,\infty) \ : \ a \in \mathbb{R}\}\right) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \ .$$

O último lema combinado com este exercício e o Lema 218 implica a mensurabilidade do ínfimo de uma sequência de funções mensuráveis:

Corolário 232 *Seja M um conjunto não vazio e $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ uma σ-álgebra sobre M. Seja f_n, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de funções $M \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-mensuráveis tal, que, para todo $p \in M$, $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(p) \in \mathbb{R}$. A função ínfimo $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ é igualmente $\mathcal{A}$-mensurável.*

Demonstração: Exercício.

Usando as relações entre $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\liminf_{n\to\infty} f_n$ e $\limsup_{n\to\infty} f_n$, discutidas acima, obtemos o seguinte resultado importante:

Proposição 233 *Seja $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ uma σ-álgebra e $f_n \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de funções tais, que, para todo $p \in M$, $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(p), \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(p) \in \mathbb{R}$. As funções $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\liminf_{n\to\infty} f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ são $\mathcal{A}$-mensuráveis. Em particular, se a sequência possui limite pontual então este é $\mathcal{A}$-mensurável.*

Observe-se que, em geral, a proposição acima não é válida se $\mathcal{A}$ for somente uma álgebra de conjuntos e não uma σ-álgebra. Note-se também que se $f_i : M \to \mathbb{R}$, $i \in I$, é uma coleção não enumerável de funções tal que, para todo $p \in M$, $\inf_{i\in I} f_i(p)$ e $\sup_{i\in I} f_i(p)$ são finitos, podemos definir, de modo análogo ao feito acima para sequências de funções, as funções $\inf_{i\in I} f_i$ e $\sup_{i\in I} f_i$. Porém, em geral, estas não serão $\mathcal{A}$-mensuráveis, mesmo as funções f_i o sendo para todo $i \in I$, mesmo se $\mathcal{A}$ for σ-álgebra.

2.1.2 O espaço das funções mensuráveis com relação à uma σ-álgebra de Borel

Recorde-se que, para um espaço métrico qualquer (M, d), $\mathfrak{M}(\mathcal{B}(M, d))$ denota o espaço (vetorial) de todas as funções $\mathcal{B}(M, d)$-mensuráveis $M \to \mathbb{R}$. Como demonstrado no parágrafo anterior, este espaço é estável com relação a limites pontuais. Veremos neste parágrafo que $\mathfrak{M}(\mathcal{B}(M, d))$ é o menor espaço vetorial de funções $M \to \mathbb{R}$ que tem esta propriedade e contém todas as funções contínuas $M \to \mathbb{R}$. Deste modo, a mensurabilidade com respeito às σ-álgebras Borelianas pode ser completamente caracterizada por uma propriedade estrutural (a de fechamento por limites pontuais) de espaços vetoriais de funções.

Lema 234 *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer e $\mathfrak{F}$ um espaço vetorial cujos elementos são funções $M \to \mathbb{R}$. Suponha que este espaço contenha a função constante 1 e que seja estável com relação a limites pontuais monótonos crescentes, isto é, para toda sequência crescente de funções $f_n \in \mathfrak{F}$, $n \in \mathbb{N}$, que possua limite pontual f, vale $f \in \mathfrak{F}$. Então*

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{F}} \doteq \{E \in \mathcal{B}(M, d) \ : \ \chi_E \in \mathfrak{F}\} \subseteq \mathcal{B}(M, d)$$

é um sistema de Dynkin.

Demonstração:

1. Note-se que $M \in \mathcal{D}_{\mathfrak{F}}$, pois, por hipótese, $\chi_M = 1 \in \mathfrak{F}$.

2. Seja um $E \in \mathcal{D}_{\mathfrak{F}} \subseteq \mathcal{B}(M, d)$ qualquer, isto é, seja $E \in \mathcal{B}(M, d)$ tal, que $\chi_E \in \mathfrak{F}$. Então, como $\mathfrak{F}$ é um espaço vetorial e $1 \in \mathfrak{F}$, tem-se que

   $$\chi_{E^c} = 1 - \chi_E \in \mathfrak{F} \ .$$

   Logo, $E^c \in \mathcal{D}_{\mathfrak{F}}$, isto é, $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}$ é estável com relação à operação de complemento de subconjuntos. Recorde-se que $E^c \in \mathcal{B}(M, d)$, já que $\mathcal{B}(M, d)$ é uma σ-álgebra.

3. Seja uma sequência *disjunta* $E_n \in \mathcal{D}_{\mathfrak{F}}$, $n \in \mathbb{N}$. Observe-se que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

   $$\chi_{E_1\cup\cdots\cup E_n} = \chi_{E_1} + \cdots + \chi_{E_n} \in \mathcal{D}_{\mathfrak{F}} \ ,$$

   pois $\mathfrak{F}$ é um espaço vetorial. Note-se também que a sequência de funções $\chi_{E_1\cup\cdots\cup E_n} \in \mathfrak{F}$, $n \in \mathbb{N}$, é monotonicamente crescente e vale

   $$\lim_{n\to\infty} \chi_{E_1\cup\cdots\cup E_n} = \chi_{\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n} \ .$$

   Como, novamente por hipótese, $\mathfrak{F}$ é estável com relação a limites monótonos crescentes, concluímos que $\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{D}_{\mathfrak{F}}$.

Portanto, $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}$ é um sistema de Dynkin. ■

Exercício 235 *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer, E um subconjunto não vazio arbitrário de M, e defina a função contínua $d_E : M \to [0, \infty)$ por*

$$d_E(p) \doteq \inf\{d(p, p') \ : \ p' \in E\} \ .$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$, seja a função $\chi_E^{(n)} : M \to [0, 1]$ definida por:

$$\chi_E^{(n)}(p) \doteq \begin{cases} 1 & \textit{se} \quad nd_{E^c}(p) \geq 1 \\ nd_{E^c}(p) & \textit{se} \quad nd_{E^c}(p) < 1 \end{cases} .$$

i.) Mostre que $\chi_E^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência monotonicamente crescente de funções contínuas limitadas.

ii.) Mostre que se $E \in \tau_d$ (isto é, se E é aberto) então, para todo $p \in M$, tem-se

$$\lim_{n \to \infty} \chi_E^{(n)}(p) = \chi_E(p) \ .$$

Corolário 236 *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer e $\mathfrak{F}$ um espaço vetorial cujos elementos são funções $M \to \mathbb{R}$. Suponha que este espaço contenha todas as funções $M \to \mathbb{R}$ contínuas limitadas, e que seja estável com relação a limites pontuais de sequências monótonas crescentes. Então $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}} = \mathcal{B}(M, d)$.*

Demonstração: Pelo último exercício, vale $\tau_d \subseteq \mathcal{D}_{\mathfrak{F}}$. Notando que a função constante 1 é contínua e limitada, pela última proposição $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}$ é um sistema de Dynkin e assim tem-se que

$$\delta(\tau_d) \subseteq \mathcal{D}_{\mathfrak{F}} \subseteq \mathcal{B}(M, d) \ .$$

Finalmente, como τ_d é estável com relação à interseção, pela Proposição 45, vale

$$\delta(\tau_d) = \sigma(\tau_d) = \mathcal{B}(M, d).$$

■

Proposição 237 *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer e $\mathfrak{F}$ um espaço vetorial cujos elementos são funções $M \to \mathbb{R}$. Suponha que este espaço contenha todas as funções $M \to \mathbb{R}$ contínuas limitadas, e que seja estável com relação a limites pontuais de sequências monótonas crescentes. Então vale $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{M}(\mathcal{B}(M, d))$.*

Demonstração:

1. Pelo último corolário, para todo Boreliano $E \in \mathcal{B}(M, d)$, vale $\chi_E \in \mathfrak{F}$. Como $\mathfrak{F}$ é um espaço vetorial, disto segue que $\mathcal{S}(\mathcal{B}(M, d)) \subseteq \mathfrak{F}$.

2. Pela Proposição 225.(ii), toda função $f \in \mathfrak{M}(\mathcal{B}(M, d))$ *positiva* é o limite pontual de uma sequência monótona crescente de funções simples. Portanto, $\mathfrak{F}$ contém toda função mensurável positiva.

3. Seja agora $f \in \mathfrak{M}(\mathcal{B}(M,d))$ uma função mensurável qualquer. Como $\mathcal{B}(M,d)$ é uma σ-álgebra, pela Proposição 229, $\mathfrak{M}(\mathcal{B}(M,d))$ é um espaço de funções. Em particular,

$$0 \vee f, 0 \vee (-f) \in \mathfrak{M}(\mathcal{B}(M,d)) \ .$$

Mas, por construção, as funções $0 \vee f$ e $0 \vee (-f)$ são positivas e, portanto,

$$0 \vee f, 0 \vee (-f) \in \mathfrak{F} \ .$$

Como vale

$$f = 0 \vee f - (0 \vee (-f)) \ ,$$

tem-se $f \in \mathfrak{F}$, já que $\mathfrak{F}$ é um espaço vetorial. Deste modo fica provado que $\mathfrak{M}(\mathcal{B}(M,d)) \subseteq \mathfrak{F}$.

■

Corolário 238 *Seja (M,d) um espaço métrico qualquer. $\mathfrak{M}(\mathcal{B}(M,d))$ é o menor espaço vetorial de funções $M \to \mathbb{R}$ que contém todas as funções contínuas limitadas e é fechado com relação a limites pontuais de sequências de funções.*

Demonstração: Já sabemos que $\mathfrak{M}(\mathcal{B}(M,d))$ é fechado com respeito a limites pontuais de sequências e que $C_{\mathrm{b}}(M;\mathbb{R}) \subseteq \mathfrak{M}(\mathcal{B}(M,d))$, onde $C_{\mathrm{b}}(M;\mathbb{R})$ denota o conjunto de todas as funções $M \to \mathbb{R}$ contínuas limitadas. Seja $\mathfrak{F}$ um espaço vetorial de funções $M \to \mathbb{R}$, $C_{\mathrm{b}}(M;\mathbb{R}) \subseteq \mathfrak{F}$, que é fechado com relação a limites pontuais de sequências de funções (em particular, este é fechado com relação a limites monótonos crescentes). Pela última proposição tem-se então que $\mathfrak{M}(\mathcal{B}(M,d)) \subseteq \mathfrak{F}$. ■

Este último corolário fornece uma definição equivalente para os espaço de funções mensuráveis com relação à uma σ-álgebra de Borel, como sendo o espaço fechado por limites pontuais de sequências que é "gerados" pelas respectivas funções contínuas, em perfeita analogia com a definição das σ-álgebras Borelianas como sendo σ-álgebras geradas por topologias.

2.2 As funções limitadas integráveis com respeito a um conteúdo finito

Neste parágrafo começaremos a desenvolver a noção de integral de uma função com respeito a um conteúdo. Em particular, nos limitaremos ao caso das funções limitadas e conteúdos finitos. O ponto central a ser estudado aqui é a relação entre a propriedade de mensurabilidade de funções e a integrabilidade destas, ou seja, a existência de integrais para tais funções.

A noção de integral para uma função simples é canônica:

Definição 239 (integral de funções simples) *Seja M um conjunto não vazio e $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ uma álgebra qualquer sobre M. Seja μ um conteúdo em $\mathcal{A}$. Para toda função $f \in \mathcal{S}(\mathcal{A},\mu)$, isto é,*

$$f = c_1\chi_{E_1} + \cdots + c_N\chi_{E_N} \ ,$$

para $E_1, \ldots, E_N \in \mathcal{A}$, $N \in \mathbb{N}$, tais, que $\mu(E_1), \ldots, \mu(E_N) < \infty$, e constantes $c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{R}$, definimos a quantidade

$$\int f(p)\mu(\mathrm{d}p) \doteq \sum_{n=1}^{N} c_n\mu(E_n) \in \mathbb{R} \ .$$

Esta é chamada "integral" de f com relação ao conteúdo μ.

Exercício 240 *Mostre que $\int f(p)\mu(\mathrm{d}p)$ não depende da representação escolhida para f como combinação linear de funções características.*

A integral $\int f(p)\mu(\mathrm{d}p)$ é, portanto, bem definida para todo $f \in \mathcal{S}(\mathcal{A}, \mu)$. A integral como função de $\mathcal{S}(\mathcal{A}, \mu)$ em $\mathbb{R}$ possui as seguintes propriedades básicas:

Exercício 241 *Seja M um conjunto não vazio, $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ uma álgebra e μ um conteúdo (aqui, não necessariamente finito) em $\mathcal{A}$. Mostre que as seguintes propriedades são válidas para a integral $\int : \mathcal{S}(\mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}$:*

i.) Linearidade. $f \mapsto \int f(p)\mu(\mathrm{d}p)$ é uma operação linear em $\mathcal{S}(\mathcal{A}, \mu)$, ou seja, para todo $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{A}, \mu)$ e todo $\alpha \in \mathbb{R}$, vale

$$\begin{aligned} \int \alpha f(p)\mu(\mathrm{d}p) &= \alpha \int f(p)\mu(\mathrm{d}p) \, , \\ \int (f_1 + f_2)(p)\mu(\mathrm{d}p) &= \int f_1(p)\mu(\mathrm{d}p) + \int f_2(p)\mu(\mathrm{d}p) \, . \end{aligned}$$

ii.) Positividade. Para todo $f \in \mathcal{S}(\mathcal{A}, \mu)$, $f \geq 0$, vale

$$\int f(p)\mu(\mathrm{d}p) \geq 0 \, .$$

Note-se que as propriedades i.) e ii.) acima implicam a monotonicidade da integral, isto é, para todo par de funçãoes $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{A}, \mu)$ com $f_1 \leq f_2$, tem-se que

$$\int f_1(p)\mu(\mathrm{d}p) \leq \int f_2(p)\mu(\mathrm{d}p).$$

A seguir estenderemos a noção de integração para o caso de funções limitadas mais gerais que as simples.

Definição 242 (integrais superiores e inferiores de funções limitadas) *Seja M um conjunto não vazio, $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ uma álgebra e μ um conteúdo* finito *em $\mathcal{A}$. Para toda função* limitada *$f : M \to \mathbb{R}$, definimos as seguintes quantidades:*

$$\begin{aligned} \int^\sharp f(p)\mu(\mathrm{d}p) &= \inf\left\{ \int \tilde{f}^\sharp(p)\mu(\mathrm{d}p) \ : \ \tilde{f}^\sharp \in \mathcal{S}(\mathcal{A}) \, , \ f \leq \ \tilde{f}^\sharp \right\} \in \mathbb{R} \, , \\ \int^\flat f(p)\mu(\mathrm{d}p) &= \sup\left\{ \int \ \tilde{f}^\flat(p)\mu(\mathrm{d}p) \ : \ \tilde{f}^\flat \in \mathcal{S}(\mathcal{A}) \, , \ \tilde{f}^\flat \leq f \ \right\} \in \mathbb{R} \, . \end{aligned}$$

$\int^\sharp f(p)\mu(\mathrm{d}p)$ e $\int^\flat f(p)\mu(\mathrm{d}p)$ são chamadas, respectivamente, "integral superior" e "integral superior" de f.

Recorde-se que, para um conteúdo μ finito qualquer, vale $\mathcal{S}(\mathcal{A}, \mu) = \mathcal{S}(\mathcal{A})$. Para toda função limitada $f : M \to \mathbb{R}$ existem $\tilde{f}^\sharp \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, $f \leq \tilde{f}^\sharp$ e $\tilde{f}^\flat \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, $\tilde{f}^\flat \leq f$. Por exemplo, tais $\tilde{f}^\sharp, \tilde{f}^\flat$ podem ser escolhidas como funções constantes, que são sempre simples. Assim, as integrais superiores e inferiores acima estão bem definidas para funções limitadas arbitrárias.

Note-se que, para toda função simples $f \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, vale trivialmente

$$\int^\sharp f(p)\mu(\mathrm{d}p) = \int^\flat f(p)\mu(\mathrm{d}p) = \int f(p)\mu(\mathrm{d}p) \, .$$

Utilizaremos esta propriedade como *definição* de integral de funções mais gerais que as simples:

Definição 243 (funções integráveis e integrais com respeito a um conteúdo) *Seja M um conjunto não vazio, $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ uma álgebra e μ um conteúdo* finito *em $\mathcal{A}$. Dizemos que uma função limitada $f : M \to \mathbb{R}$ é "integrável" com respeito a μ se vale*

$$\int^{\sharp} f(p)\mu(\mathrm{d}p) = \int^{\flat} f(p)\mu(\mathrm{d}p) \doteq \int f(p)\mu(\mathrm{d}p) .$$

Neste caso, a quantidade $\int f(p)\mu(\mathrm{d}p) \in \mathbb{R}$ é chamada "integral" de f com respeito a μ. Denotar-se-á por $\mathfrak{I}_b(\mu)$ o conjunto de todas as funções $M \to \mathbb{R}$ que são limitadas e integráveis com respeito a μ.

Exercício 244 *Seja $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ uma álgebra e μ um conteúdo finito em $\mathcal{A}$. Para uma função limitada $f : M \to \mathbb{R}$ fixa, mostre que as seguintes asserções são equivalentes:*

i.) f é integrável com respeito a μ.

ii.) Para todo $\varepsilon > 0$, existem funções simples $f^{\flat}_{\varepsilon}, f^{\sharp}_{\varepsilon} \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ tais, que $f^{\flat}_{\varepsilon} \leq f \leq f^{\sharp}_{\varepsilon}$ e $\int (f^{\sharp}_{\varepsilon} - f^{\flat}_{\varepsilon})(p)\mu(\mathrm{d}p) \leq \varepsilon$.

iii.) Existe uma sequência crescente de funções simples $f^{\flat}_n \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, $n \in \mathbb{N}$, e uma decrescente $f^{\sharp}_n \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, $n \in \mathbb{N}$, tais, que, para todo $n \in \mathbb{N}$, vale $f^{\flat}_n \leq f \leq f^{\sharp}_n$ e tem-se

$$\lim_{n\to\infty} \int (f^{\sharp}_n - f^{\flat}_n)(p)\mu(\mathrm{d}p) = 0 .$$

Combinando a parte iii.) do último exercício com a Proposição 225.(i) concluímos:

Corolário 245 *Seja $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ uma álgebra e μ um conteúdo finito em $\mathcal{A}$. Então vale a inclusão $\mathfrak{M}_b(\mathcal{A}) \subseteq \mathfrak{I}_b(\mu)$, onde $\mathfrak{M}_b(\mathcal{A}) \subseteq \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ é o subconjunto de todas a funções $\mathcal{A}$-mensuráveis* limitadas.

Também do último exercício segue o seguinte fato importante:

Lema 246 *Para toda álgebra $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ e conteúdo μ em $\mathcal{A}$.finito, $\mathfrak{I}_b(\mu)$ é um espaço de funções.*

Demonstração:

1. Sejam duas funções $f_1, f_2 \in \mathfrak{I}_b(\mu)$ quaisquer. Sejam $f^{\flat}_{1,n}, f^{\flat}_{2,n} \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, $n \in \mathbb{N}$, sequências crescentes e $f^{\sharp}_{1,n}, f^{\sharp}_{2,n} \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, $n \in \mathbb{N}$, sequências decrescentes tais, que $f^{\flat}_{1,n} \leq f_1 \leq f^{\sharp}_{1,n}$, $f^{\flat}_{2,n} \leq f_2 \leq f^{\sharp}_{2,n}$ e

$$\lim_{n\to\infty} \int (f^{\sharp}_{1,n} - f^{\flat}_{1,n})(p)\mu(\mathrm{d}p) = 0 , \quad \lim_{n\to\infty} \int (f^{\sharp}_{2,n} - f^{\flat}_{2,n})(p)\mu(\mathrm{d}p) = 0 .$$

   Tais sequências sempre existem, pelo Exercício 244. Obviamente, pela linearidade da integral de funções simples, vale

$$f^{\flat}_{1,n} + f^{\flat}_{2,n} \leq f_1 + f_2 \leq f^{\sharp}_{1,n} + f^{\sharp}_{2,n},$$
$$\lim_{n\to\infty} \int ((f^{\sharp}_{1,n} + f^{\sharp}_{2,n}) - (f^{\flat}_{1,n} + f^{\flat}_{2,n}))(p)\mu(\mathrm{d}p) = 0 .$$

   Assim, pelo mesmo exercício, tem-se que $f_1 + f_2 \in \mathfrak{I}_b(\mu)$.

2. De modo análogo mostra-se que, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, vale $\alpha f_1 \in \mathfrak{I}_b(\mu)$. Com isto fica demonstrado que $\mathfrak{I}_b(\mu)$ é um espaço vetorial real.

3. Para provar que $\mathfrak{I}_b(\mu)$ é um espaço de funções, observe-se que

$$\begin{aligned} 0 &\leq f^\sharp_{1,n} \vee f^\sharp_{2,n} - f^\flat_{1,n} \vee f^\flat_{2,n} \\ &\leq (f^\sharp_{1,n} - f^\flat_{1,n}) + (f^\sharp_{2,n} - f^\flat_{2,n}) \ . \end{aligned}$$

Em particular, pela monotonicidade da integral de funções simples, vale

$$\lim_{n\to\infty} \int (f^\sharp_{1,n} \vee f^\sharp_{2,n} - f^\flat_{1,n} \vee f^\flat_{2,n})(p)\mu(\mathrm{d}p) = 0 \ .$$

Note-se aqui que $f^\sharp_{1,n} \vee f^\sharp_{2,n}, f^\flat_{1,n} \vee f^\flat_{2,n} \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, pois $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ é um espaço de funções. Como a sequência $f^\sharp_{1,n} \vee f^\sharp_{2,n} \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, $n \in \mathbb{N}$, é decrescente, a sequência $f^\flat_{1,n} \vee f^\flat_{2,n} \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, $n \in \mathbb{N}$, crescente, e vale

$$f^\flat_{1,n} \vee f^\flat_{2,n} \leq f_1 \vee f_2 \leq f^\sharp_{1,n} \vee f^\sharp_{2,n} \ ,$$

pelo Exercício 244, tem-se que $f_1 \vee f_2 \in \mathfrak{I}_b(\mu)$.

4. De modo similar mostramos que $f_1 \wedge f_2 \in \mathfrak{I}_b(\mu)$.

■

A integral definida acima no espaço vetorial $\mathfrak{I}_b(\mu)$, onde μ é um conteúdo finito qualquer sobre uma álgebra, tem as mesma propriedades básicas da integral de funções simples:

Exercício 247 *Seja M um conjunto não vazio, $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ uma álgebra e μ um conteúdo em $\mathcal{A}$ finito. Mostre que as seguintes propriedades são válidas para a integral $\int : \mathfrak{I}_b(\mu) \to \mathbb{R}$:*

i.) Linearidade. $f \mapsto \int f(p)\mu(\mathrm{d}p)$ é uma operação linear em $\mathfrak{I}_b(\mu)$, ou seja, para todo $f_1, f_2 \in \mathfrak{I}_b(\mu)$ e todo $\alpha \in \mathbb{R}$, vale

$$\begin{aligned} \int \alpha f(p)\mu(\mathrm{d}p) &= \alpha \int f(p)\mu(\mathrm{d}p) \ , \\ \int (f_1 + f_2)(p)\mu(\mathrm{d}p) &= \int f_1(p)\mu(\mathrm{d}p) + \int f_2(p)\mu(\mathrm{d}p) \ . \end{aligned}$$

ii.) Positividade. Para todo $f \in \mathfrak{I}_b(\mu)$, $f \geq 0$, vale

$$\int f(p)\mu(\mathrm{d}p) \geq 0 \ .$$

Recorde-se que da positividade e linearidade da integral segue sua monotonicidade.

Vimos acima que funções mensuráveis limitadas são sempre integráveis com relação a um conteúdo finito. A recíproca é, porém, em geral falsa. Discutiremos a seguir, de modo mais preciso, a relação que há entre integrabilidade e mensurabilidade para o caso de medidas em σ-álgebras. Em particular mostraremos que no caso de espaço de medida completos, para funções limitadas e medidas finitas, as noções de integrabilidade e mensurabilidade são equivalentes.

Proposição 248 *Seja $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ uma σ-álgebra μ uma medida finita em $\mathcal{A}$. Para toda função limitada integrável $f \in \mathfrak{I}_b(\mu)$ existe uma função limitada $\mathcal{A}$-mesurável $\tilde{f} \in \mathfrak{M}_b(\mathcal{A})$ tal, que*

$$\{p \in M \ : \ \tilde{f}(p) \neq f(p)\} \in 2^M$$

é um subconjunto μ-nulo.

Demonstração: Seja $f \in \mathfrak{I}_b(\mu)$ qualquer. Pelo Exercício 244, existe uma sequência $f_n^\flat \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, $n \in \mathbb{N}$, crescente e uma sequência $f_n^\sharp \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, $n \in \mathbb{N}$, decrescente tais, que $f_n^\flat \leq f \leq f_n^\sharp$ e

$$\lim_{n\to\infty} \int (f_n^\sharp - f_n^\flat)(p)\mu(\mathrm{d}p) = 0 \ .$$

1. Em particular, tem-se que, para todo $\varepsilon > 0$, vale

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left((f_n^\sharp - f_n^\flat)^{-1}([\varepsilon, \infty))\right) = 0 \ .$$

2. Para todo $k \in \mathbb{N}$, escolha $n_k \in \mathbb{N}$ tal, que

$$\mu\left((f_{n_k}^\sharp - f_{n_k}^\flat)^{-1}([k^{-1}, \infty))\right) \leq 2^{-k}$$

e defina

$$E_\infty \doteq \limsup_{l\to\infty} E_l \doteq \inf_{l\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq l} \ E_k \in \mathcal{A} \ ,$$

onde

$$E_k \doteq (f_{n_k}^\sharp - f_{n_k}^\flat)^{-1}([k^{-1}, \infty)) \in \mathcal{A} \ .$$

3. Se $p \notin E_\infty$ então, para um $l \in \mathbb{N}$ e todo $k \geq l$, vale

$$(f_{n_k}^\sharp - f_{n_k}^\flat)(p) < k^{-1}.$$

Ou seja, para tais $p \notin E_\infty$,

$$\lim_{k\to\infty} (f_{n_k}^\sharp - f_{n_k}^\flat)(p) = 0 \ ,$$

pois $f_{n_k}^\sharp - f_{n_k}^\flat \geq 0$. Logo, como a sequência $(f_n^\sharp - f_n^\flat)$ é decrescente, para todo $p \notin E_\infty$, vale

$$\lim_{n\to\infty} (f_n^\sharp - f_n^\flat)(p) = 0 \ .$$

Como $f_n^\sharp \geq f \geq f_n^\flat$, disto segue que, para todo $p \in E_\infty^c$, tem-se

$$\lim_{n\to\infty} f_n^\sharp(p) = \lim_{n\to\infty} f_n^\flat(p) = f(p) \ .$$

4. Como $f_n^\sharp$ e $f_n^\flat$, $n \in \mathbb{N}$, são funções $\mathcal{A}$-mensuráveis, pois são simples, e $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra, tem-se que $\lim_{n\to\infty} f_n^\sharp$ e $\lim_{n\to\infty} f_n^\flat$ são $\mathcal{A}$-mensuráveis, pela Proposição 233. Note-se aqui que os limites pontuais $\lim_{n\to\infty} f_n^\sharp$ e $\lim_{n\to\infty} f_n^\flat$ existem, pois as sequências $f_n^\sharp$ e $f_n^\flat$, $n \in \mathbb{N}$, são monótonas. Obviamente, estes limites são funções limitadas, pois f é uma função limitada. Com isso tem-se que f coincide com uma função $\mathcal{A}$-mensurável fora do subconjunto E_∞.

5. Finalmente, para ver que E_∞ tem medida nula observe-se que, para todo $l \in \mathbb{N}$,

$$\mu\left(\sup_{k\geq l} \ E_k\right) \leq \sum_{k=l}^{\infty} \mu\left(\ E_k\right) \leq \sum_{k=l}^{\infty} 2^{-k} = 2^{1-l}.$$

Logo, para todo $l \in \mathbb{N}$, vale

$$\mu\left(E_\infty\right) \leq \mu\left(\sup_{k\geq l} \ E_k\right) \leq 2^{1-l}$$

e, portanto, $\mu\left(E_\infty\right) = 0$.

■

Corolário 249 *Seja $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ uma σ-álgebra μ uma medida finita em $\mathcal{A}$. Toda função limitada integrável $f \in \mathfrak{I}_b(\mu)$ é $\mathcal{M}_{\mu^*}$-mensurável. Em particular, se $(M, \mathcal{A}, \mu)$ for um espaço de medida completo então tem-se $\mathfrak{I}_b(\mu) = \mathfrak{M}_b(\mathcal{A})$.*

Demonstração: Seja $f \in \mathfrak{I}_b(\mu)$ qualquer. Pela última proposição existe um função $\tilde{f} \in \mathfrak{M}_b(\mathcal{A})$ e um $\tilde{E} \in \mathcal{A}$, $\mu(\tilde{E}) = 0$, tais que f e $\tilde{f}$ coincidem fora de $\tilde{E}$. Assim, para todo Boreliano $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, tem-se

$$f^{-1}(E) = (f^{-1}(E) \cap \tilde{E}) \cup (f^{-1}(E) \cap \tilde{E}^c) = (f^{-1}(E) \cap \tilde{E}) \cup (\tilde{f}^{-1}(E) \cap \tilde{E}^c) .$$

$\tilde{f}^{-1}(E) \cap \tilde{E}^c \in \mathcal{A}$, pois $\tilde{f} \in \mathfrak{M}_b(\mathcal{A})$ e $\tilde{E} \in \mathcal{A}$, e $f^{-1}(E) \cap \tilde{E}$ é subconjunto μ-nulo, pois $\mu(\tilde{E}) = 0$. Estes são dois casos de subconjuntos μ^*-mensuráveis, como já provado anteriormente. Assim, vale $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ e a função f é, portanto, $\mathcal{M}_{\mu^*}$-mensurável. Se $(M, \mathcal{A}, \mu)$ for um espaço de medida completo então, pelo Exercício 130, $\mathcal{A} = \mathcal{M}_{\mu^*}$. Logo, neste caso, f é $\mathcal{A}$-mensurável. ■

Na seguinte proposição, mostraremos que as funções integraveis limitadas com respeito a uma medida μ finita em uma σ-álgebra $\mathcal{A} \subseteq 2^M$, são exatamente as funções limitadas mensuráveis com respeito à σ-álgebra $\mathcal{M}_{\mu^*}$ dos subconjuntos μ^*-mensuráveis. Para tal, usaremos o seguinte resultado preliminar:

Lema 250 *Seja $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ uma σ-álgebra μ uma medida finita em $\mathcal{A}$. Para todo $E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$, existem $\tilde{E} \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$ e $\tilde{N} \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ disjuntos tais, que $\mu^*(\tilde{N}) = 0$ (ou seja, $\tilde{N}$ é μ-nulo) e $E = \tilde{E} \cup \tilde{N}$.*

Demonstração: Seja $E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ qualquer. Então, pela definição da medida exterior μ^*, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma sequência $E_k^{(\varepsilon)} \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$, tal, que $E \subseteq E_\infty^{(\varepsilon)} \doteq \sup_{k \in \mathbb{N}} E_k^{(\varepsilon)}$ e

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(E_k^{(\varepsilon)}) \leq \mu^*(E) + \varepsilon .$$

Pela σ-subaditividade de medidas, tem-se $E \subseteq E_\infty^{(\varepsilon)} \in \mathcal{A}$ e $\mu(E_\infty^{(\varepsilon)}) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$. Defina

$$E_\infty^{(0)} \doteq \inf_{n \in \mathbb{N}} E_\infty^{(1/n)} \in \mathcal{A} .$$

Por construção, vale $E \subseteq E_\infty^{(0)} \in \mathcal{A}$ e $\mu(E_\infty^{(0)}) = \mu^*(E)$. Note-se que o fato de μ ser um conteúdo finito em uma álgebra $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ (com efeito, $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra) implica que a medida exterior μ^* é finita, pois $\mu^*(\cdot) \leq \mu(M)$. Em particular, tem-se que $\mu^*(E_\infty^{(0)} \backslash E) = 0$, pois

$$\mu(E_\infty^{(0)}) = \mu^*(E) + \mu^*(E_\infty^{(0)} \backslash E) .$$

Aplicando a contrução de acima ao complemento de $E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$, obtemos $E^c \subseteq E_\infty^{c(0)}$ e

$$\mu^*(E_\infty^{c(0)} \backslash E^c) = \mu^*(E \backslash (E_\infty^{c(0)})^c) = 0 .$$

Assim, para $(E_\infty^{c(0)})^c \in \mathcal{A}$, vale $(E_\infty^{c(0)})^c \subseteq E$ e $\mu^*(E \backslash (E_\infty^{c(0)})^c) = 0$. ■

Proposição 251 *Seja $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ uma σ-álgebra e μ uma medida finita em $\mathcal{A}$. Então vale $\mathfrak{I}_b(\mu) = \mathfrak{M}_b(\mathcal{M}_{\mu^*})$.*

Demonstração: Já mostramos, no último corolário, que $\mathfrak{I}_b(\mu) \subseteq \mathfrak{M}_b(\mathcal{M}_{\mu^*})$. Para mostrar que $\mathfrak{M}_b(\mathcal{M}_{\mu^*}) \subseteq \mathfrak{I}_b(\mu)$, seja $f \in \mathfrak{M}_b(\mathcal{M}_{\mu^*})$ arbitrária.

1. Pela Proposição 225.(i), existe uma sequência decrescente $f_n^\sharp \in \mathcal{S}(\mathcal{M}_{\mu^*})$ e uma crescente $f_n^\flat \in \mathcal{S}(\mathcal{M}_{\mu^*})$, $n \in \mathbb{N}$, de funções simples tais, que $f_n^\flat \leq f \leq f_n^\sharp$, ambas uniformemente convergentes para f.

2. Recorde-se que o fato de μ ser uma medida finita implica que a também medida exterior μ^* é finita. Em particular vale
$$\lim_{n\to\infty} \int (f_n^\sharp - f_n^\flat)(p)\tilde{\mu}(\mathrm{d}p) = 0 \ ,$$
onde $\tilde{\mu}$ nas integrais acima denota a medida obtida pela restrição da medida exterior μ^* à σ-álgebra $\mathcal{M}_{\mu^*}$.

3. Para um $n \in \mathbb{N}$ fixo qualquer, sejam $f_n^\sharp$ e $f_n^\flat$ representadas como
$$\begin{aligned} f_n^\sharp &= c_1^\sharp \chi_{E_1^\sharp} + \cdots + c_N^\sharp \chi_{E_N^\sharp} \ , \\ f_n^\flat &= c_1^\flat \chi_{E_1^\flat} + \cdots + c_N^\flat \chi_{E_N^\flat} \ , \end{aligned}$$
onde $E_1^\sharp, \ldots, E_N^\sharp \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ e $E_1^\flat, \ldots, E_N^\flat \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ são duas sequências de subconjuntos μ^*-mensuráveis.

4. Sejam novas sequências de subconjuntos $\tilde{N}_1^\sharp, \ldots, \tilde{N}_N^\sharp \in \mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$, $\tilde{E}_1^\sharp, \ldots, \tilde{E}_N^\sharp \in \mathcal{A}$, $\tilde{N}_1^\flat, \ldots, \tilde{N}_N^\flat \in \mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$ e $\tilde{E}_1^\flat, \ldots, \tilde{E}_N^\flat \in \mathcal{A}$ tais, que, para todo $k = 1, \ldots, N$, vale
$$\begin{aligned} \tilde{N}_k^\sharp \cap \tilde{E}_k^\sharp &= \tilde{N}_k^\flat \cap \tilde{E}_k^\flat = \emptyset \ , \\ \tilde{N}_k^\sharp \cup \tilde{E}_k^\sharp &= E_k^\sharp \ , \\ \tilde{N}_k^\flat \cup \tilde{E}_k^\flat &= E_k^\flat \ . \end{aligned}$$
Tais sequências existem, pelo último lema.

5. Sejam $\tilde{N}^\sharp, \tilde{N}^\flat \in \mathcal{A}$ tais, que $\mu(\tilde{N}^\sharp) = \mu(\tilde{N}^\flat) = 0$ e
$$\tilde{N}_1^\sharp, \ldots, \tilde{N}_N^\sharp \subseteq \tilde{N}^\sharp \ , \quad \tilde{N}_1^\flat, \ldots, \tilde{N}_N^\flat \subseteq \tilde{N}^\flat \ .$$
Note-se que tais $\tilde{N}^\sharp, \tilde{N}^\flat \in \mathcal{A}$ existem, pela definição de subconjuntos μ-nulos.

6. Defina as constantes
$$c_0^\sharp \doteq \sup_{p\in M} f(p) \in \mathbb{R} \ , \quad c_0^\flat \doteq \inf_{p \in M} f(p) \in \mathbb{R} \ .$$
Tais constantes estão bem definidas, pois supusemos que a função f é limitada.

7. Defina finalmente, para o mesmo $n \in \mathbb{N}$ fixo, as novas funções simples $\tilde{f}_n^\sharp, \tilde{f}_n^\flat \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ por:
$$\begin{aligned} \tilde{f}_n^\sharp &\doteq c_0^\sharp \chi_{\tilde{N}^\sharp} + c_1^\sharp \chi_{\tilde{E}_1^\sharp \setminus \tilde{N}^\sharp} + \cdots + c_N^\sharp \chi_{\tilde{E}_N^\sharp \setminus \tilde{N}^\sharp} \ , \\ \tilde{f}_n^\flat &\doteq c_0^\flat \chi_{\tilde{N}^\flat} + c_1^\flat \chi_{\tilde{E}_1^\flat \setminus \tilde{N}^\flat} + \cdots + c_N^\flat \chi_{\tilde{E}_N^\flat \setminus \tilde{N}^\flat} \ . \end{aligned}$$
Por construção, tem-se que
$$\tilde{f}_n^\flat \leq f \leq \tilde{f}_n^\sharp \ , \quad \int (\tilde{f}_n^\sharp - \tilde{f}_n^\flat)(p)\mu(\mathrm{d}p) = \int (f_n^\sharp - f_n^\flat)(p)\tilde{\mu}(\mathrm{d}p) \ .$$

8. Note-se, que as novas sequências de funções simples $\tilde{f}_n^\sharp, \tilde{f}_n^\flat \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, $n \in \mathbb{N}$, não são necessariamente monótonas. Porém, como
$$\lim_{n\to\infty} \int (\tilde{f}_n^\sharp - \tilde{f}_n^\flat)(p)\mu(\mathrm{d}p) = 0 \ ,$$
da parte ii.) do Exercício 244 concluímos que f é integrável com respeito a μ.

■

2.3 Funções integráveis gerais e integral de Lebesgue

Baseando-nos nos resultados que obtivemos no parágrafo anterior sobre funções integráveis com respeito a uma medida finita, elaboraremos uma noção mais geral de função integrável que abarcará i.) funções não limitadas e ii.) conteúdos não finitos. Começaremos pela primeira generalização, isto é, introduziremos uma noção de integrabilidade para funções não necessariamente limitadas com respeito a um conteúdo (ainda) finito.

Definição 252 (integral de funções positivas com respeito a um conteúdo finito) *Seja $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ uma álgebra e μ um conteúdo finito em $\mathcal{A}$. Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função positiva tal, que, para todo $L \in \mathbb{R}$ suficientemente grande, vale $L \wedge f \in \mathfrak{I}_b(\mu)$, onde L denota na fórmula $L \wedge f$ a função constante $L \in \mathbb{R}$. Definimos, neste caso, a integral de f por:*

$$\int f(p)\mu(\mathrm{d}p) \doteq \lim_{L\to\infty} \int (L \wedge f)(p)\mu(\mathrm{d}p) \in [0, \infty] .$$

Obviamente, toda função positiva em $\mathfrak{I}_b(\mu)$ tem integral no sentido da última definição e esta coincide com a integral anteriormente definida em $\mathfrak{I}_b(\mu)$. Note-se que funções positivas (não limitadas) podem, pela definição acima, ter integral infinita. Se $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra e μ uma medida (finita) então as funções positivas para as quais a integral da última definição está definida são exatamente as funções positivas $\mathcal{M}_{\mu^*}$-mensuráveis:

Exercício 253 *Seja $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ uma σ-álgebra μ uma medida finita em $\mathcal{A}$ e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função positiva. Mostre que $f \in \mathfrak{M}(\mathcal{M}_{\mu^*})$ se, e somente se, para um $L_0 \in (0, \infty)$ e todo $L \geq L_0$, vale $L \wedge f \in \mathfrak{I}_b(\mu)$.*

Por meio da noção de integral de uma função positiva acima definiremos a seguir a integral de funções gerais.

Definição 254 (integral com respeito a um conteúdo finito) *Seja $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ uma álgebra e μ um conteúdo finito em $\mathcal{A}$. Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função tal que, para todo $L \in \mathbb{R}$ suficientemente grande vale*

$$L \wedge (0 \vee f), L \wedge (0 \vee (-f)) \in \mathfrak{I}_b(\mu)$$

e

$$\begin{aligned} \int (0 \vee f)(p)\mu(\mathrm{d}p) &\doteq \lim_{L\to\infty} \int (L \wedge (0 \vee f))(p)\mu(\mathrm{d}p) < \infty , \\ \int (0 \vee (-f))(p)\mu(\mathrm{d}p) &\doteq \lim_{L\to\infty} \int (L \wedge (0 \vee (-f)))(p)\mu(\mathrm{d}p) < \infty . \end{aligned}$$

Neste caso definimos

$$\int f(p)\mu(\mathrm{d}p) \doteq \int (0 \vee f)(p)\mu(\mathrm{d}p) - \int (0 \vee (-f))(p)\mu(\mathrm{d}p) \in \mathbb{R} .$$

Funções deste tipo são ditas "integráveis" com relação ao conteúdo (finito) μ. O conjunto de todas as funções $M \to \mathbb{R}$ que são integráveis com relação a μ é denotado por $\mathfrak{I}(\mu)$. Para toda $f \in \mathfrak{I}(\mu)$ a quantidade $\int f(p)\mu(\mathrm{d}p) \in \mathbb{R}$ é chamada, como antes, "integral de f com relação a μ".

Observe-se que vale $\mathfrak{I}_b(\mu) \subseteq \mathfrak{I}(\mu)$ e que a integral definida anteriormente para $f \in \mathfrak{I}_b(\mu)$ coincide com a da última definição, neste caso especial.

Lema 255 *Seja $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ uma σ-álgebra e μ uma medida finita em $\mathcal{A}$. Então $\mathfrak{I}(\mu)$ é um subespaço vetorial de $\mathfrak{M}(\mathcal{M}_{\mu^*})$ e um espaço de funções.*

Demonstração:

1. Seja $f \in \mathfrak{I}(\mu)$ qualquer. Então, pela definição de $\mathfrak{I}(\mu)$, para todo $L \in \mathbb{R}$ suficientemete grande vale
$$L \wedge (0 \vee f), L \wedge (0 \vee (-f)) \in \mathfrak{I}_b(\mu) \; .$$
Logo, pelo Exercício 253, tem-se que
$$0 \vee f, 0 \vee (-f) \in \mathfrak{M}(\mathcal{M}_{\mu^*}) \; .$$
Assim, como vale $f = (0 \vee f) - (0 \vee (-f))$ e $\mathfrak{M}(\mathcal{M}_{\mu^*})$ é um espaço vetorial (já que $\mathcal{M}_{\mu^*}$ é σ-álgebra), concluímos que $f \in \mathfrak{M}(\mathcal{M}_{\mu^*})$. Portanto, $\mathfrak{I}(\mu) \subseteq \mathfrak{M}(\mathcal{M}_{\mu^*})$.

2. Sejam $f_1, f_2 \in \mathfrak{I}(\mu) \subseteq \mathfrak{M}(\mathcal{M}_{\mu^*})$ arbitrárias. Para todo $L \in \mathbb{R}$, tem-se
$$L \wedge (0 \vee (f_1 + f_2)), L \wedge (0 \vee (-(f_1 + f_2))) \in \mathfrak{M}_b(\mathcal{M}_{\mu^*}) = \mathfrak{I}_b(\mu)$$
e valem as desigualdades
$$\begin{aligned} L \wedge (0 \vee (f_1 + f_2)) &\leq L \wedge (0 \vee f_1 + 0 \vee f_2)) \; , \\ L \wedge (0 \vee (-(f_1 + f_2))) &\leq L \wedge (0 \vee (-f_1) + 0 \vee (-f_2))) \; . \end{aligned}$$
Como, para números positivos $a, b, c \geq 0$, vale
$$\min\{a, b + c\} \leq \min\{a, b\} + \min\{a, c\}$$
(note-se que isto não é verdade em geral para $a, b, c \in \mathbb{R}$), concluímos que, para todo $L > 0$, tem-se
$$\begin{aligned} L \wedge (0 \vee (f_1 + f_2)) &\leq L \wedge (0 \vee f_1) + L \wedge (0 \vee f_2) \; , \\ L \wedge (0 \vee (-(f_1 + f_2))) &\leq L \wedge (0 \vee (-f_1)) + L \wedge (0 \vee (-f_2)) \; . \end{aligned}$$
Disto segue, pela monotonicidade e linearidade da integral em $\mathfrak{I}_b(\mu)$, que
$$\begin{aligned} \int (0 \vee (f_1 + f_2))(p)\mu(\mathrm{d}p) &\leq \int (0 \vee f_1)(p)\mu(\mathrm{d}p) + \int (0 \vee f_2)(p)\mu(\mathrm{d}p) < \infty \; , \\ \int (0 \vee (-(f_1 + f_2)))(p)\mu(\mathrm{d}p) &\leq \int (0 \vee (-f_1))(p)\mu(\mathrm{d}p) + \int (0 \vee (-f_2))(p)\mu(\mathrm{d}p) < \infty \; . \end{aligned}$$
Logo $f_1 + f_2 \in \mathfrak{I}(\mu)$.

3. De modo análogo mostra-se que, para toda $f \in \mathfrak{I}(\mu)$ e todo $\alpha \in \mathbb{R}$, vale $\alpha f \in \mathfrak{I}(\mu)$. Logo, $\mathfrak{I}(\mu)$ é um subespaço vetorial de $\mathfrak{M}(\mathcal{M}_{\mu^*})$. Observe-se que $\mathfrak{M}(\mathcal{M}_{\mu^*})$ é um espaço vetorial, pois é uma σ-álgebra.

4. Sejam $f_1, f_2 \in \mathfrak{I}(\mu) \subseteq \mathfrak{M}(\mathcal{M}_{\mu^*})$ arbitrárias. Como $\mathfrak{M}(\mathcal{M}_{\mu^*})$ é um espaço de funções, tem-se que $f_1 \vee f_2 \in \mathfrak{M}(\mathcal{M}_{\mu^*})$. Notando que
$$\begin{aligned} 0 \vee (f_1 \vee f_2) &\leq (0 \vee f_1) \vee (0 \vee f_2) \leq (0 \vee f_1) + (0 \vee f_2) \; , \\ 0 \vee (-(f_1 \vee f_2)) &= 0 \vee ((-f_1) \wedge (-f_2)) \leq (0 \vee (-f_1)) \wedge (0 \vee (-f_2)) \leq (0 \vee (-f_1)) \; , \end{aligned}$$
tem-se, por argumento análogo ao do ponto 2. acima, que
$$\begin{aligned} \int (0 \vee (f_1 \vee f_2))(p)\mu(\mathrm{d}p) &\leq \int (0 \vee f_1)(p)\mu(\mathrm{d}p) + \int (0 \vee f_2)(p)\mu(\mathrm{d}p) < \infty \; , \\ \int (0 \vee (-(f_1 \vee f_2)))(p)\mu(\mathrm{d}p) &\leq \int (0 \vee (-f_1))(p)\mu(\mathrm{d}p) < \infty \; . \end{aligned}$$
Logo, $f_1 \vee f_2 \in \mathfrak{I}(\mu)$.

5. De modo similar mostra-se que $f_1 \wedge f_2 \in \mathfrak{I}(\mu)$ e, portanto, $\mathfrak{I}(\mu)$ é um espaço de funções.

■

A integral definida acima no espaço vetorial $\mathfrak{I}(\mu)$, onde μ é uma medida finita qualquer sobre uma σ-álgebra, continua tendo as mesmas propriedades básicas da integral de funções simples considerada ateriormente:

Proposição 256 *Seja M um conjunto não vazio, $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ uma σ-álgebra e μ uma medida finita em $\mathcal{A}$. As seguintes propriedades são válidas para a integral $\int : \mathfrak{I}(\mu) \to \mathbb{R}$:*

i.) Linearidade. $f \mapsto \int f(p)\mu(\mathrm{d}p)$ é uma operação linear em $\mathfrak{I}(\mu)$, ou seja, para todo $\mathfrak{I}(\mu)$ e todo $\alpha \in \mathbb{R}$, vale

$$\begin{aligned} \int \alpha f(p)\mu(\mathrm{d}p) &= \alpha \int f(p)\mu(\mathrm{d}p) \,, \\ \int (f_1 + f_2)(p)\mu(\mathrm{d}p) &= \int f_1(p)\mu(\mathrm{d}p) + \int f_2(p)\mu(\mathrm{d}p) \,. \end{aligned}$$

ii.) Positividade. Para todo $f \in \mathfrak{I}(\mu)$, $f \geq 0$, vale

$$\int f(p)\mu(\mathrm{d}p) \geq 0 \,.$$

Demonstração:

1. Se a função $f \in \mathfrak{I}(\mu)$ é positiva, então vale $f = 0 \vee f$ e $0 \vee (-f) = 0$, e, diretamente da definição de integral, segue que $\int f(p)\mu(\mathrm{d}p) \geq 0$. Isto é, vale a afirmação ii.) da proposição.

2. De modo um pouco mais geral, para $f, f' \in \mathfrak{I}(\mu)$, $f \geq f' \geq 0$, quaisquer, vê-se diretamente da definição de integral que vale

$$\int f(p)\mu(\mathrm{d}p) \geq \int f'(p)\mu(\mathrm{d}p) \geq 0$$

3. Sejam $f, f' \in \mathfrak{I}(\mu)$, $f, f' \geq 0$, quaisquer. Pela definição de integral, para todo $\varepsilon > 0$ existe $L_\varepsilon \in (0, \infty)$ tal, que para todo $L \geq L_\varepsilon$, valem as desigualdades:

$$\begin{aligned} \left| \int f(p)\mu(\mathrm{d}p) - \int (L \wedge f)(p)\mu(\mathrm{d}p) \right| &\leq \frac{\varepsilon}{3} \,, \\ \left| \int f(p)\mu(\mathrm{d}p) - \int (L \wedge f')(p)\mu(\mathrm{d}p) \right| &\leq \frac{\varepsilon}{3} \,, \\ \left| \int (f + f')(p)\mu(\mathrm{d}p) - \int (L \wedge (f + f'))(p)\mu(\mathrm{d}p) \right| &\leq \frac{\varepsilon}{3} \,. \end{aligned}$$

Pela linearidade da integral em $\mathfrak{I}_b(\mu)$ tem-se que, para todo $L \geq L_\varepsilon$, vale

$$\left| \int f(p)\mu(\mathrm{d}p) + \int f'(p)\mu(\mathrm{d}p) - \int ((L \wedge f) + (L \wedge f'))(p)\mu(\mathrm{d}p) \right| \leq \frac{2\varepsilon}{3} \,.$$

4. Como as funções $f + f'$, $L \wedge (f + f')$ e $(L \wedge f) + (L \wedge f')$ são positivas e vale
$$L \wedge (f + f') \leq (L \wedge f) + (L \wedge f') \leq f + f' \ ,$$
pelo ponto 2., tem-se que
$$\int (L \wedge (f + f'))(p)\mu(\mathrm{d}p) \leq \int ((L \wedge f) + (L \wedge f'))(p)\mu(\mathrm{d}p) \leq \int (f + f')(p)\mu(\mathrm{d}p) \ .$$
Em particular, para todo $L \geq L_\varepsilon$, vale
$$\left| \int (f + f')(p)\mu(\mathrm{d}p) - \int ((L \wedge f) + (L \wedge f'))(p)\mu(\mathrm{d}p) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} \ .$$
Deste fato combinado com 3. concluímos que
$$\left| \int f(p)\mu(\mathrm{d}p) + \int f'(p)\mu(\mathrm{d}p) - \int (f + f')(p)\mu(\mathrm{d}p) \right| \leq \varepsilon \ .$$
Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, vale
$$\int (f + f')(p)\mu(\mathrm{d}p) = \int f(p)\mu(\mathrm{d}p) + \int f'(p)\mu(\mathrm{d}p) \ .$$

5. Seja $f \in \mathfrak{I}(\mu)$ qualquer e sejam $g, g', h, h' \in \mathfrak{I}(\mu)$ funções positivas tais, que
$$f = g - g' = h - h' \ .$$
Em particular tem-se que
$$g + h' = h + g' \geq 0$$
e do ponto 4. segue que
$$\int g(p)\mu(\mathrm{d}p) - \int g'(p)\mu(\mathrm{d}p) = \int h(p)\mu(\mathrm{d}p) - \int h'(p)\mu(\mathrm{d}p) \ .$$

6. Sejam agora $f, f' \in \mathfrak{I}(\mu)$ arbitrárias, isto é, não necessariamente positivas. Então, obviamente, vale
$$\begin{aligned} f + f' &= 0 \vee (f + f') - 0 \vee (-(f + f')) \\ &= (0 \vee f + 0 \vee f') - (0 \vee (-f) + 0 \vee (-f')) \ . \end{aligned}$$
Pelo ponto 5. tem-se então que
$$\begin{aligned} \int (f + f')(p)\mu(\mathrm{d}p) &\doteq \int (0 \vee (f + f'))(p)\mu(\mathrm{d}p) - \int (0 \vee (-(f + f')))(p)\mu(\mathrm{d}p) \\ &= \int (0 \vee f + 0 \vee f')(p)\mu(\mathrm{d}p) - \int (0 \vee (-f) + 0 \vee (-f'))(p)\mu(\mathrm{d}p) \ . \end{aligned}$$
Assim, pelo ponto 4., vale
$$\begin{aligned} \int (f + f')(p)\mu(\mathrm{d}p) &= \int (0 \vee f)(p)\mu(\mathrm{d}p) + \int (0 \vee f')(p)\mu(\mathrm{d}p) \\ &\quad - \int (0 \vee (-f))(p)\mu(\mathrm{d}p) - \int (0 \vee (-f'))(p)\mu(\mathrm{d}p) \\ &= \left[\int (0 \vee f)(p)\mu(\mathrm{d}p) - \int (0 \vee (-f))(p)\mu(\mathrm{d}p) \right] \\ &\quad + \left[\int (0 \vee f')(p)\mu(\mathrm{d}p) - \int (0 \vee (-f'))(p)\mu(\mathrm{d}p) \right] \\ &= \int f(p)\mu(\mathrm{d}p) + \int f'(p)\mu(\mathrm{d}p) \ . \end{aligned}$$

7. De modo similar mostra-se que, para toda $f \in \mathfrak{I}(\mu)$ e todo $\alpha \in \mathbb{R}$, vale

$$\int \alpha f(p)\mu(\mathrm{d}p) = \alpha \int f(p)\mu(\mathrm{d}p)$$

e a afirmação i.) fica provada.

■

Definição 257 (Integral de Lebesgue associada a uma medida finita) *Seja $(M, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, onde μ é uma medida finita. O funcional linear positivo $\int : \mathfrak{I}(\mu) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int f(p)\mu(\mathrm{d}p)$ é chamado "integral de Lebesgue" associada à medida (finita) μ.*

A seguir generalizaremos a noção de integral de Lebesgue para o caso de medidas não finitas. Por simplicidade técnica, nos restringiremos aqui ao caso dos espaços de medida σ-finitos, este sendo o caso mais relevante para as aplicações da teoria da integração.

Lema 258 *Seja $(M, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida σ-finito e sejam duas sequências crescentes $E_n^{(1)}, E_n^{(2)} \in \mathcal{A}$, $\mu(E_n^{(1)}), \mu(E_n^{(2)}) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, tais, que*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n^{(1)} = \sup_{n\in\mathbb{N}} E_n^{(2)} = M \ .$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$, defina as medidas finitas $\mu_n^{(1)}$ e $\mu_n^{(2)}$ em $\mathcal{A}$ por

$$\mu_n^{(k)}(E) \doteq \mu(E \cap E_n^{(k)}) \ , \quad E \in \mathcal{A} \ , \ k = 1, 2 \ .$$

Para toda função $f \in \mathfrak{M}(\mathcal{M}_{\mu^*})$ positiva vale

$$\lim_{n\to\infty} \int f(p)\mu_n^{(1)}(\mathrm{d}p) = \lim_{n\to\infty} \int f(p)\mu_n^{(2)}(\mathrm{d}p) \in [0, \infty] \ .$$

Demonstração: Exercício. *Sugestão*: note-se que, para qualquer função positiva $f \in \mathfrak{M}(\mathcal{M}_{\mu^*})$, $\int f(p)\mu_n^{(1)}(\mathrm{d}p)$, $\int f(p)\mu_n^{(2)}(\mathrm{d}p)$, $n \in \mathbb{N}$, são sequências numéricas crescentes.

O lema acima motiva a seguinte definição de integrabilidade:

Definição 259 (integrabilidade com relação a uma medida σ-finita) *Seja $(M, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida σ-finito e seja uma sequência crescente qualquer $E_n \in \mathcal{A}$, $\mu(E_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, tal, que $\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n = M$ (esta sempre existe, por definição de σ-finitude). Sejam medidas finitas μ_n em $\mathcal{A}$ definidas para esta sequência como no último lema. Para uma função $f \in \mathfrak{M}(\mathcal{M}_{\mu^*})$ positiva qualquer definimos*

$$\int f(p)\mu(\mathrm{d}p) \doteq \lim_{n\to\infty} \int f(p)\mu_n(\mathrm{d}p) \in [0, \infty] \ .$$

Dizemos que uma função $f \in \mathfrak{M}(\mathcal{M}_{\mu^*})$ (não necessariamente positiva) é integrável com relação à medida μ se

$$\int (0 \vee f)(p)\mu(\mathrm{d}p), \int (0 \vee (-f))(p)\mu(\mathrm{d}p) < \infty \ .$$

Neste caso definimos

$$\int f(p)\mu(\mathrm{d}p) \doteq \int (0 \vee f)(p)\mu(\mathrm{d}p) - \int (0 \vee (-f))(p)\mu(\mathrm{d}p) \in \mathbb{R} \ ,$$

a "integral de Lebesgue de f com relação a μ". Denota-se, como antes, por $\mathfrak{I}(\mu)$ o conjunto de todas as funções $f \in \mathfrak{M}(\mathcal{M}_{\mu^*})$ que são integráveis com relação à medida μ.

Note-se que se $f \in \mathcal{S}(\mathcal{A}, \mu)$ então a noção de integral acima coincide com a já dada anteriormente para funções simples em relação à σ-álgebra $\mathcal{A}$ e à medida μ. A integral definida acima para medidas σ-finitas quaisquer tem as mesmas propriedades básicas da integral para medidas finitas:

Proposição 260 *Seja $(M, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida σ-finito. $\mathfrak{I}(\mu)$ é um espaço de funções e o funcional $\int : \mathfrak{I}(\mu) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int f(p)\mu(\mathrm{d}p)$, é linear e positivo.*

Demonstração: Exercício.

Exercício 261 *Seja $(M, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida σ-finito. Mostre que, para toda função $f \in \mathfrak{M}(\mathcal{M}_{\mu^*})$ positiva,*

$$\int f(p)\mu(\mathrm{d}p) = \sup\left\{ \int f^\flat(p)\mu(\mathrm{d}p) \ : \ f^\flat \in \mathcal{S}(\mathcal{A}, \mu) \ , \ f^\flat \leq f \right\} \in [0, \infty] \ .$$

Observe-se que a igualdade do exercício acima é usada por alguns autores como definição da integral de Lebesgue de funções positivas.

Exercício 262 *Seja $(M, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida σ-finito, $f \in \mathfrak{I}(\mu)$ e $g : M \to \mathbb{R}$ uma função tal, que*

$$\{p \in M \ : \ f(p) \neq g(p)\} \in \mathcal{N}_\mu$$

(isto é, o subconjunto acima é μ-nulo). Mostre que $g \in \mathfrak{I}(\mu)$ e vale

$$\int g(p)\mu(\mathrm{d}p) = \int f(p)\mu(\mathrm{d}p) \ .$$

Em particular, tem-se $g \in \mathfrak{M}(\mathcal{M}_{\mu^*})$.

Sugestão: Suponha primeiro que a medida μ seja finita e demonstre a afimação para $f \in \mathfrak{I}_b(\mu)$ e g limitada (isto é, f e g são funções limitadas). Em seguida derive o caso geral deste caso particular.

Encerramos este parágrafo com um resultado sobre o comportamento da integral de Lebesgue com respeito a "pushforwards" de medidas:

Proposição 263 *Seja $(M_1, \mathcal{A}_1, \mu)$ um espaço de medida, $(M_2, \mathcal{A}_2)$ um espaço mensurável, $f : M_2 \to \mathbb{R}$ uma função $\mathcal{A}_2$-mensurável qualquer e $g : M_1 \to M_2$ uma função $\mathcal{A}_2$-$\mathcal{A}_1$-mensurável tal, que o espaço de medida $(M_2, \mathcal{A}_2, g_*(\mu))$ seja σ-finito, onde $g_*(\mu)$ é o "pushforward" da medida μ através da função g. Em particular $(M_1, \mathcal{A}_1, \mu)$ é σ-finito. Se $f \circ g \in \mathfrak{I}(\mu)$ então $f \in \mathfrak{I}(g_*(\mu))$ e vale*

$$\int f(p_2) \left[g_*(\mu)\right](\mathrm{d}p_2) \ = \int [f \circ g](p_1)\mu(\mathrm{d}p_1) \ .$$

Se $f \geq 0$ a igualdade acima é valida independentemente da integrabilidade de $f \circ g$.

Demonstração: Exercício. *Sugestão*: Siga o seguinte roteiro: i.) Suponha primeiro que a medida μ é finita, ii) prove a proposição para funções simples $f \in \mathcal{S}(\mathcal{A}_2)$ (e g uma função $\mathcal{A}_2$-$\mathcal{A}_1$-mensurável arbitrária), iii.) prove a proposição para funções f limitadas arbitrárias, iv.) prove a proposição para funções f quaisquer (isto é, f não é necessariamente limitada), v.) prove, finalmente, a proposição para medidas μ σ-finitas (não necessariamente finitas).

2.4 A σ-normalidade da integral de Lebesgue

Vimos no último parágrafo que funções integráveis num espaço de medida σ-finito $(M, \mathcal{E}, \mu)$ são mensuráveis com relação à σ-álgebra dos subconjuntos μ^*-mensuráveis, $\mathcal{M}_{\mu^*}$. Por sua vezes, também sabemos que, $\mathcal{M}_{\mu^*}$ sendo uma σ-álgebra, $\mathfrak{M}(\mathcal{M}_{\mu^*})$ é estável com relação a limites pontuais de sequências. Deste modo, é natural a questão referente ao comportamento da integral de Lebesgue com relação a tais limites. Começaremos o estudo desta questão demostrando um resultado central em teoria da integração, referente às integrais de Lebesgue de sequências monotonicamente crescentes de funções positivas, o "teorema da convergência monótona" de Beppo Levi.

Proposição 264 (teorema da convergência monótona) *Seja $(M, \mathcal{E}, \mu)$ um espaço de medida σ-finito e $f_n \in \mathfrak{M}(\mathcal{E})$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de funções positivas monotonicamente crescente e convergente pontualmente. Isto é, para todo $p \in M$, tem-se*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(p) \doteq f(p) < \infty \ .$$

Em particular, $f \geq 0$ e $f \in \mathfrak{M}(\mathcal{E})$, pois $\mathcal{E}$ é uma σ-álgebra. Então vale:

$$\int f(p)\mu(\mathrm{d}p) = \lim_{n\to\infty} \int f_n(p)\mu(\mathrm{d}p) \in [0, \infty] \ .$$

Demonstração:

1. Pela monotonicidade da integral de Lebesgue existe o limite $\lim_{n\to\infty} \int f_n(p)\mu(\mathrm{d}p) \in [0, \infty]$ e vale
$$\int f(p)\mu(\mathrm{d}p) \geq \lim_{n\to\infty} \int f_n(p)\mu(\mathrm{d}p) \ .$$
Deste modo, devemos provar que
$$\int f(p)\mu(\mathrm{d}p) \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n(p)\mu(\mathrm{d}p) \ .$$
Se $\lim_{n\to\infty} \int f_n(p)\mu(\mathrm{d}p) = \infty$ não há nada a provar. Suporemos, portanto, que
$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(p)\mu(\mathrm{d}p) < \infty \ .$$

2. Seja $g \in \mathcal{S}(\mathcal{E}, \mu)$ uma função simples positiva, $g \leq f$, qualquer. Fixe uma representação desta função simples:
$$g = c_1\chi_{E_1} + \cdots + c_N\chi_{E_N} \ ,$$
onde $c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, e $E_1, \ldots, E_N \in \mathcal{E}$ são elementos tais, que
$$\mu(E_1), \ldots, \mu(E_N) < \infty \ .$$

3. Para todo $\varepsilon \in (0, 1)$ e todo $n \in \mathbb{N}$, definimos o subconjunto
$$\begin{aligned} E_n^{(\varepsilon)}(g) &\doteq \{p \in M \ : \ (1-\varepsilon)g(p) \leq f_n(p)\} \\ &= [f_n - (1-\varepsilon)g]^{-1}([0, \infty)) \in \mathcal{E} \ . \end{aligned}$$
Pelas hipóteses, tem-se que $E_n^{(\varepsilon)}(g) \in \mathcal{E}$, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência crescente tal, que
$$\lim_{n\to\infty} E_n^{(\varepsilon)}(g) = \sup_{n\in\mathbb{N}} E_n^{(\varepsilon)}(g) = M \ .$$

Note-se aqui que $f_n - (1-\varepsilon)g$ é $\mathcal{E}$-mensurável. Em particular, pela σ-normalidade de medidas, para todo $k \in 1, \ldots, N$, vale

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int \chi_{E_n^{(\varepsilon)}(g)\cap E_k} \mu(\mathrm{d}p) &= \lim_{n\to\infty} \mu(E_n^{(\varepsilon)}(g) \cap E_k) \\ &= \mu(E_k) = \int \chi_{E_k} \mu(\mathrm{d}p) \ .\end{aligned}$$

Disto concluímos, pela monotonicidade e linearidade da integral de Lebesgue, que

$$\begin{aligned}(1-\varepsilon) \int g(p)\mu(\mathrm{d}p) &= (1-\varepsilon) \int \left[c_1\chi_{E_1} + \cdots + c_N\chi_{E_k}\right](p)\mu(\mathrm{d}p) \\ &= (1-\varepsilon) \lim_{n\to\infty} \int \left[c_1\chi_{E_n^{(\varepsilon)}(g)\cap E_1} + \cdots + c_N\chi_{E_n^{(\varepsilon)}(g)\cap E_k}\right](p)\mu(\mathrm{d}p) \\ &= (1-\varepsilon) \lim_{n\to\infty} \int \chi_{E_n^{(\varepsilon)}(g)} \left[c_1\chi_{E_1} + \cdots + c_N\chi_{E_N}\right](p)\mu(\mathrm{d}p) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int \chi_{E_n^{(\varepsilon)}(g)}(1-\varepsilon)g(p)\mu(\mathrm{d}p) \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n(p)\mu(\mathrm{d}p) \ .\end{aligned}$$

Como $\varepsilon \in (0,1)$ é arbitrário, segue que, para toda $g \in \mathcal{S}(\mathcal{E}, \mu)$ positiva, $g \leq f$, vale

$$\int g(p)\mu(\mathrm{d}p) \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n(p)\mu(\mathrm{d}p) \ .$$

Finalmente, tomando o supremo em relação a g, pelo Exercício 261, tem-se que

$$\int f(p)\mu(\mathrm{d}p) \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n(p)\mu(\mathrm{d}p) \ .$$

■

A propriedade afirmada no último teorema, o seja, o fato de a integral de Lebesgue comutar com limites monótonos crescentes, é chamada "σ-normalidade" da integral, como também denominamos a propriedade análoga de medidas. A seguir demonstraremos duas consequências importantes do teorema da convergência monótona, o lema de Fatou e o teorema da convergência dominada de Lebesgue.

Proposição 265 (lema de Fatou) *Seja $(M, \mathcal{E}, \mu)$ um espaço de medida σ-finito e $f_n \in \mathfrak{M}(\mathcal{E})$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de funções positivas tal, que, para todo $p \in M$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(p) \in \mathbb{R}$ (em particular, tem-se $\liminf_{n\to\infty} f_n(p) \in \mathbb{R}$). Então vale a desigualdade*

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n(p)\mu(\mathrm{d}p) \geq \int \left[\liminf_{n\to\infty} f_n\right](p)\mu(\mathrm{d}p) \ .$$

Demonstração: Para todo, $n \in \mathbb{N}$, defina $g_n \in \mathfrak{M}(\mathcal{E})$ por $g_n \doteq \inf_{k\geq n} f_k$. Em particular g_n, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência monotonicamente crescente e vale

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n = \lim_{n\to\infty} g_n \ .$$

Recorde-se que $g_n, \liminf_{n\to\infty} f_n \in \mathfrak{M}(\mathcal{E})$, pois $\mathcal{E}$ é uma σ-álgebra. Obviamente, vale

$$\liminf_{n\to\infty} f_n \geq 0 \ , \quad 0 \leq g_n \leq f_n \ .$$

Logo, pelo teorema da convergência monótona e monotonicidade da integral, tem-se que

$$\begin{aligned}\int \left[\liminf_{n\to\infty} f_n\right](p)\mu(\mathrm{d}p) &= \lim_{n\to\infty}\int g_n(p)\mu(\mathrm{d}p) \\ &= \liminf_{n\to\infty}\int g_n(p)\mu(\mathrm{d}p) \leq \liminf_{n\to\infty}\int f_n(p)\mu(\mathrm{d}p)\ .\end{aligned}$$

■

É importante notar que, em geral, o lema de Fatou não é satisfeito com igualdade, isto é, o limite inferior geralmente não comuta com a integral de Lebesgue. Isto pode ser facilmente constatado com exemplos simples. Observe-se que, uma vez estabelicido o lema de Fatou, seguiria facilmente o teorema da convergência monótona:

Exercício 266 *Demonstre o teorema da convergência monótona usando o lema de Fatou.*

Pelo último exercício vemos que o lema de Fatou e o teorema da convergência monótona são equivalentes. O próximo resultado é uma condição suficiente para que limites comutem com a integral de Lebesgue:

Proposição 267 (teorema da convergência dominada de Lebesgue) *Seja $(M,\mathcal{E},\mu)$ um espaço de medida σ-finito e $f_n \in \mathfrak{I}(\mu)$, $n\in\mathbb{N}$, uma sequência de funções integráveis (não necessariamente positivas). Suponha que exista uma função positiva $f\in\mathfrak{M}(\mathcal{E})$ tal, que $\int f(p)\mu(\mathrm{d}p) < \infty$ e, para todo $n\in\mathbb{N}$, vale*

$$|f_n| \doteq 0\vee f_n + 0\vee(-f_n) \leq f\ .$$

Se a sequência f_n, $n\in\mathbb{N}$, converge pontualmente então tem-se que $\lim_{n\to\infty} f_n\in\mathfrak{I}(\mu)$ e

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n(p)\mu(\mathrm{d}p) = \int \lim_{n\to\infty} f_n(p)\mu(\mathrm{d}p)\ .$$

Demonstração:

1. Se as hipóteses do teorema são validas então $\lim_{n\to\infty} f_n\in\mathfrak{M}(\mathcal{E})$ e, pela monotonicidade da integral, tem-se $\lim_{n\to\infty} f_n\in\mathfrak{I}(\mu)$. Note-se aqui que

$$0\vee(\lim_{n\to\infty} f_n) + 0\vee(-\lim_{n\to\infty} f_n) = \lim_{n\to\infty}(0\vee f_n + 0\vee(-f_n))\ .$$

2. Sejam as sequências de funções integráveis positivas $g_n^+, g_n^-\in\mathfrak{I}(\mu)$, $n\in\mathbb{N}$, definidas por

$$g_n^+ \doteq f + f_n\ ,\quad g_n^- \doteq f - f_n\ .$$

Pelo lema de Fatou, concluímos que

$$\int\left[\liminf_{n\to\infty} g_n^\pm\right](p)\mu(\mathrm{d}p) \leq \liminf_{n\to\infty}\int g_n^\pm(p)\mu(\mathrm{d}p)\ .$$

3. Logo, notando que

$$\liminf_{n\to\infty} g_n^\pm = f + \liminf_{n\to\infty}(\pm f_n)\ ,$$

pela linearidade da integral vale

$$\begin{aligned}\int f(p)\mu(\mathrm{d}p) + \int\left[\liminf_{n\to\infty} f_n\right](p)\mu(\mathrm{d}p) &\leq \int f(p)\mu(\mathrm{d}p) + \liminf_{n\to\infty}\int f_n(p)\mu(\mathrm{d}p)\ ,\\ \int f(p)\mu(\mathrm{d}p) + \int\left[\liminf_{n\to\infty}(-f_n)\right](p)\mu(\mathrm{d}p) &\leq \int f(p)\mu(\mathrm{d}p) + \liminf_{n\to\infty}\int(-f_n)(p)\mu(\mathrm{d}p)\ ,\end{aligned}$$

do que concluímos que

$$
\begin{aligned}
\int \left[\lim_{n\to\infty} f_n\right](p)\mu(\mathrm{d}p) &\leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n(p)\mu(\mathrm{d}p) \; , \\
\int \left[\lim_{n\to\infty} (-f_n)\right](p)\mu(\mathrm{d}p) &\leq \liminf_{n\to\infty} \int (-f_n)(p)\mu(\mathrm{d}p) \; .
\end{aligned}
$$

Note-se aqui que vale

$$
\lim_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n \; , \quad \lim_{n\to\infty} (-f_n) = \liminf_{n\to\infty} (-f_n) \; ,
$$

pois f_n converge pontualmente.

4. Pela linearidade da integral e propriedades simples de limites e limites inferiores e superiores, tem-se

$$
\begin{aligned}
\int \left[\lim_{n\to\infty} (-f_n)\right](p)\mu(\mathrm{d}p) &= -\int \left[\lim_{n\to\infty} f_n\right](p)\mu(\mathrm{d}p) \; , \\
\liminf_{n\to\infty} \int (-f_n)(p)\mu(\mathrm{d}p) &= -\limsup_{n\to\infty} \int f_n(p)\mu(\mathrm{d}p) \; ,
\end{aligned}
$$

e obtemos que

$$
\limsup_{n\to\infty} \int f_n(p)\mu(\mathrm{d}p) \leq \int \left[\lim_{n\to\infty} f_n\right](p)\mu(\mathrm{d}p) \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n(p)\mu(\mathrm{d}p) \; .
$$

5. Como sempre vale

$$
\liminf_{n\to\infty} \int f_n(p)\mu(\mathrm{d}p) \leq \limsup_{n\to\infty} \int f_n(p)\mu(\mathrm{d}p) \; ,
$$

concluímos que

$$
\lim_{n\to\infty} \int f_n(p)\mu(\mathrm{d}p) = \int \left[\lim_{n\to\infty} f_n\right](p)\mu(\mathrm{d}p) \; .
$$

■

Uma aplicação importante do teorema de convergência dominada é o resultado, dado no corolário abaixo, a respeito da derivada de integrais de Lebesgue: Seja $(M, \mathcal{E}, \mu)$ um espaço de medida σ-finito e sejam funções integráveis $f_\alpha \in \mathfrak{M}(\mathcal{E})$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Se, para todo $p \in M$ fixo, a quantidade $f_\alpha(p)$ é diferenciável com relação a α, há um critério simples que garante que a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$
F(\alpha) \doteq \int f_\alpha(p)\mu(\mathrm{d}p) \; ,
$$

seja diferenciável e sua derivada uma integral (de Lebesgue) de derivadas:

Corolário 268 (derivadas de integrais) *Suponha que existam $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ e uma função positiva $g \in \mathcal{I}(\mu)$ tal, que, para todo $p \in M$ e todo $\alpha \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, vale*

$$
\left| \frac{\mathrm{d}f_\alpha(p)}{\mathrm{d}\alpha} \right| \leq g(p) \; .
$$

Então F é diferenciável em a, $\left.\frac{\mathrm{d}f_\alpha(\cdot)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=a} \in \mathcal{I}(\mu)$ e tem-se a igualdade

$$
\left.\frac{\mathrm{d}F(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=a} = \int \left.\frac{\mathrm{d}f_\alpha(p)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=a} \mu(\mathrm{d}p) \; .
$$

Demonstração:

1. Seja $\varepsilon_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência qualquer de números no intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$ tal, que $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ e defina as funções

$$g_n \doteq \frac{1}{\varepsilon_n} \left(f_{a+\varepsilon_n} - f_a\right) \in \mathfrak{M}(\mathcal{E}) , \quad n \in \mathbb{N} .$$

   Como
$$\left.\frac{\mathrm{d}f_\alpha(\cdot)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=a} = \lim_{n\to\infty} g_n$$
   e $\mathcal{E}$ é uma σ-álgebra, concuímos que $\left.\frac{\mathrm{d}f_\alpha(\cdot)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=a} \in \mathfrak{M}(\mathcal{E})$.

2. Pelo Teorema do Valor Médio, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $p \in M$, existe um $a(p,n) \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ tal, que
$$g_n(p) = \left.\frac{\mathrm{d}f_\alpha(p)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=a(p,n)} .$$
   Logo, pelas hipóteses da proposição, tem-se.
$$|g_n| = 0 \vee g_n + 0 \vee (-g_n) \leq g .$$

3. Note-se que, pela linearidade da integral,
$$\int g_n(p)\mu(\mathrm{d}p) = \frac{\int f_{a+\varepsilon_n}(p)\mu(\mathrm{d}p) - \int f_a(p)\mu(\mathrm{d}p)}{\varepsilon_n} = \frac{F(a+\varepsilon_n) - F(a)}{\varepsilon_n} .$$
   Portanto, pelo teorema da convergência dominada aplicado à sequência de funções integráveis g_n, segue que
$$\begin{aligned} \left.\frac{\mathrm{d}f_\alpha(\cdot)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=a} &= \lim_{n\to\infty} g_n \in \mathcal{I}(\mu) , \\ \lim_{n\to\infty} \frac{F(a+\varepsilon_n) - F(a)}{\varepsilon_n} &= \int \left.\frac{\mathrm{d}f_\alpha(p)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=a} \mu(\mathrm{d}p) . \end{aligned}$$

4. Como o lado direito da última igualdade não depende da escolha da sequencia $\varepsilon_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n \to 0$, a função F é derivável em $a \in \mathbb{R}$ e vale
$$\left.\frac{\mathrm{d}F(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=a} = \int \left.\frac{\mathrm{d}f_\alpha(p)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=a} \mu(\mathrm{d}p) .$$

■

2.5 Continuidade absoluta de medidas e derivadas de Radon-Nikodym

A seguir discutiremos uma aplicação do teorema da convergência monótona à construção de medidas a partir de "densidades" com relação a uma medida dada.

Definição 269 (especificação de medida por densidade) *Seja $(M, \mathcal{E}, \mu)$ um espaço de medida σ-finito e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função $\mathcal{E}$-mensurável positiva. Defina a função $f \cdot \mu : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ por*

$$f \cdot \mu(E) \doteq \int (\chi_E \cdot f)(p)\mu(\mathrm{d}p) , \qquad E \in \mathcal{E} .$$

Note-se que, pelo Exercício 262, se $f_1, f_2 : M \to \mathbb{R}$ são duas funções $\mathcal{E}$-mensuráveis positivas que diferem somente em um subconjunto μ-nulo então tem-se $f_1 \cdot \mu = f_2 \cdot \mu$. O teorema da convergência monótona implica a σ-aditividade de $f \cdot \mu$ em $\mathcal{E}$:

Proposição 270 *Seja $(M, \mathcal{E}, \mu)$ um espaço de medida σ-finito e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função $\mathcal{E}$-mensurável positiva. Então $(M, \mathcal{E}, f \cdot \mu)$ é um espaço de medida.*

Demonstração: Seja $E_k \in \mathcal{E}$, $k \in \mathbb{N}$, uma sequência de elementos disjuntos de $\mathcal{E}$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, defina a função $\mathcal{E}$-mensurável positiva $g_n \doteq f \cdot \chi_{\cup_{k=1}^n E_k}$. Note-se que, pela linearidade da integral, vale

$$\int g_n(p)\mu(\mathrm{d}p) = \sum_{k=1}^{n} \int (\chi_{E_k} \cdot f)(p)\mu(\mathrm{d}p) = \sum_{k=1}^{n} f \cdot \mu(E_k) \ .$$

Defina $g_\infty \doteq f \cdot \chi_{\sup_{k\in\mathbb{N}} E_k}$ e observe-se que, para todo $p \in M$, vale

$$\lim_{n\to\infty} g_n(p) = g_\infty(p) \ .$$

Esta convergência se dá de maneira monotônica crescente. Portanto, pelo teorema da convergência monótona, tem-se

$$\begin{aligned} f \cdot \mu\left(\sup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) &= \int g_\infty(p)\mu(\mathrm{d}p) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int g_n(p)\mu(\mathrm{d}p) = \sum_{k=1}^{\infty} f \cdot \mu(E_k) \ . \end{aligned}$$

Com isto fica provada a afirmação. ■

A função f é chamada "densidade" da medida $f \cdot \mu$ com relação à medida μ. Pelo Exercício 262, para todo $E \in \mathcal{E}$, $\mu(E) = 0$, tem-se:

$$f \cdot \mu(E) = \int (\chi_E \cdot f)(p)\mu(\mathrm{d}p) = \int 0 \ \mu(\mathrm{d}p) = 0 \ .$$

Isto é, todo subconjunto de medida nula com relação à medida μ é também de medida nula com relação à medida $f \cdot \mu$. Este tipo de situação motiva a seguinte definição:

Definição 271 (continuidade absoluta de medidas) *Seja $(M, \mathcal{E})$ um espaço de mensurável e sejam μ, ν duas medidas σ-finitas neste espaço (isto é, $(M, \mathcal{E}, \mu)$ e $(M, \mathcal{E}, \nu)$ são espaços de medida σ-finitos). Dizemos que ν é "absolutamente contínua" com relação a μ se, para todo $E \in \mathcal{E}$ tal, que $\mu(E) = 0$, vale $\nu(E) = 0$. Neste caso, utilizamos a seguinte notação: $\nu << \mu$.*

O seguinte teorema, um resultado central em teoria da medida, com diversas consequências importantes, é a recíproca da relação $f \cdot \mu << \mu$ observada acima, ou seja, este diz que toda medida absolutamente contínua com relação a μ provém de uma densidade:

Teorema 272 (Radon-Nikodym) *Seja $(M, \mathcal{E})$ um espaço de mensurável e sejam μ, ν duas medidas σ-finitas neste espaço. Se ν é absolutamente contínua com relação a μ (isto é, $\nu << \mu$) então existe uma função $\mathcal{E}$-mensurável positiva $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} : M \to [0, \infty)$ tal, que*

$$\nu = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \cdot \mu \ .$$

$\frac{d\nu}{d\mu}$ é a chamada "derivada de Radon-Nikodym" da medida ν com relação à medida μ. Note-se $\frac{d\nu}{d\mu}$ não é definida de modo unívoco, mas somente até um subconjunto μ-nulo: Para qualquer função positiva f que coincida com $\frac{d\nu}{d\mu}$ fora de um subconjunto μ-nulo, vale

$$\nu = \frac{d\nu}{d\mu} \cdot \mu = f \cdot \mu ,$$

como já observado após a definição da medida $f \cdot \mu$ acima.

A seguinte proposição descreve a relação que há entre a integral com respeito a uma medida e a integral com respeito a uma medida absolutamente contínua em relação a primeira:

Proposição 273 *Seja $(M, \mathcal{E})$ um espaço mensurável, μ e ν medidas σ-finitas neste espaço, $\nu << \mu$, e $g \in \mathfrak{I}(\nu)$. Então vale $g \cdot \frac{d\nu}{d\mu} \in \mathfrak{I}(\mu)$ e*

$$\int g(p)\nu(dp) = \int g \cdot \frac{d\nu}{d\mu}(p)\mu(dp) .$$

Em particular, se $\nu = f \cdot \mu$ para uma função $\mathcal{E}$-mensurável positiva então tem-se

$$\int g(p)[f \cdot \mu](dp) = \int g(p)\nu(dp) = \int g \cdot f(p)\mu(dp) .$$

Demonstração: Exercício. *Sugestão*: Siga o seguinte roteiro: i.) Suponha primeiro que a medida μ é finita, ii) prove a proposição para funções simples $g \in \mathcal{S}(\mathcal{E})$ e $\frac{d\nu}{d\mu}$ uma função $\mathcal{E}$-mensurável positiva limitada, porém arbitrária (em particular também ν é uma medida finita), iii.) usando o teorema da convergência dominada de Lebesgue, prove a proposição para funções g limitadas arbitrárias, ainda no caso de $\frac{d\nu}{d\mu}$ sendo uma função limitada, iv.) utilizando o teorema da convergência monótona, prove a proposição para funções f e $\frac{d\nu}{d\mu}$ não mais necessariamente limitadas, v.) prove, finalmente, a proposição para medidas μ σ-finitas (não necessariamente finitas).

A última proposição permite representar integrais relativas a uma dada medida ν com relação a uma segunda medida μ e pode ser entendida como um tipo de mudança de coordenadas na integração de uma função.

2.6 Medidas produto e o teorema de Fubini

Definição 274 (produto de σ-álgebras) *Sejam $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_N$, $N \in \mathbb{N}$, σ-álgebras sobre $M_1, \ldots, M_N$, respectivamente. Seja*

$$\mathcal{E}_1 * \cdots * \mathcal{E}_N \doteq \{E_1 \times \cdots \times E_N \ : \ E_1 \in \mathcal{E}_1, \ldots, E_N \in \mathcal{E}_N\} \subseteq 2^{M_1 \times \cdots \times M_N} .$$

Então definimos

$$\mathcal{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}_N \doteq \sigma(\mathcal{E}_1 * \cdots * \mathcal{E}_N) \subseteq 2^{M_1 \times \cdots \times M_N},$$

a σ-álgebra sobre produto cartesiano $M_1 \times \cdots \times M_N$ gerada por $\mathcal{E}_1 * \cdots * \mathcal{E}_N \subseteq 2^{M_1 \times \cdots \times M_N}$. Esta é chamada σ-álgebra "produto" das σ-álgebras $E_1, \ldots, E_N$.

Observe-se aqui que o produto $\mathcal{E}_1 * \cdots * \mathcal{E}_N$ já foi introduzido no Lema 35 e comentário após este, no contexto (mais geral) de semianeis. Neste parágrafo, partindo de medidas sobre as σ-álgebras $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_N$ construiremos uma medida canônica sobre a σ-álgebra produto, a "medida produto" das primeiras. Antes de fazê-lo propriamente, discutiremos algumas caracterizações úteis das σ-álgebras produto. Recorde-se que, pelo Lema 35, $\mathcal{E}_1 * \cdots * \mathcal{E}_N$ é um semianel. Portanto, pelas Proposições 45 e 40 temos as seguintes caracterizações do produto $\mathcal{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}_N$:

Proposição 275 (σ-álgebra produto como família monótona) *Sejam $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_N$, $N \in \mathbb{N}$, σ-álgebras sobre $M_1, \ldots, M_N$, respectivamente. Então tem-se:*

$$\mathcal{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}_N = \delta(\mathcal{E}_1 * \cdots * \mathcal{E}_N) = \mathcal{M}(\mathcal{R}(\mathcal{E}_1 * \cdots * \mathcal{E}_N)) \ .$$

[Recorde-se que $\mathcal{R}(\mathcal{E}_1 * \cdots * \mathcal{E}_N)$ e $\delta(\mathcal{E}_1 * \cdots * \mathcal{E}_N)$ denotam, respectivamente, o anel e o sistema de Dynkin gerados por $\mathcal{E}_1 * \cdots * \mathcal{E}_N$. Por sua vez, $\mathcal{M}(\mathcal{R}(\mathcal{E}_1 * \cdots * \mathcal{E}_N))$ é família monótona gerada pelo anel $\mathcal{R}(\mathcal{E}_1 * \cdots * \mathcal{E}_N)$.]

Demonstração: Pela Proposição 45 vale $\mathcal{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}_N = \delta(\mathcal{E}_1 * \cdots * \mathcal{E}_N)$, pois $\mathcal{E}_1 * \cdots * \mathcal{E}_N$ é um semianel e semianéis são estáveis com relação à interseção. Como $M_1 \times \cdots \times M_N \in \mathcal{E}_1 * \cdots * \mathcal{E}_N$, a σ-álgebra $\mathcal{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}_N$ coincide com o σ-anel gerado por $\mathcal{E}_1 * \cdots * \mathcal{E}_N$ (que também é gerado por $\mathcal{R}(\mathcal{E}_1 * \cdots * \mathcal{E}_N)$). Portanto, pela Proposição 40 vale

$$\mathcal{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}_N \doteq \sigma(\mathcal{E}_1 * \cdots * \mathcal{E}_N) = \sigma(\mathcal{R}(\mathcal{E}_1 * \cdots * \mathcal{E}_N)) = \mathcal{M}(\mathcal{R}(\mathcal{E}_1 * \cdots * \mathcal{E}_N)) \ .$$

■

Lema 276 *Sejam $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_N$, $N \in \mathbb{N}$, σ-álgebras sobre $M_1, \ldots, M_N$ e sejam famílias $\tilde{\mathcal{E}}_1 \subseteq \mathcal{E}_1, \ldots, \tilde{\mathcal{E}}_N \subseteq \mathcal{E}_N$ tais, que vale $M_1 \in \tilde{\mathcal{E}}_1, \ldots, M_N \in \tilde{\mathcal{E}}_N$ e*

$$\sigma(\tilde{\mathcal{E}}_1) = \mathcal{E}_1, \ldots, \sigma(\tilde{\mathcal{E}}_N) = \mathcal{E}_N \ .$$

Então a família

$$\{E_1 \times \cdots \times E_N : E_1 \in \tilde{\mathcal{E}}_1, \ldots, E_N \in \tilde{\mathcal{E}}_N\} \subseteq \mathcal{E}_1 * \cdots * \mathcal{E}_N \subseteq 2^{M_1 \times \cdots \times M_N}$$

gera a σ-álgebra produto $\mathcal{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}_N$.

Demonstração: Exercício.

Lema 277

i.) *O produto de σ-álgebras é uma operação associativa: Se E_1, E_2 e E_3 são σ-álgebras sobre M_1, M_2 e M_3, respectivamente, então tem-se*

$$(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2) \otimes \mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_1 \otimes (\mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{E}_3) = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{E}_3$$

[Aqui os produtos cartesianos $(M_1 \times M_2) \times M_3$, $M_1 \times (M_2 \times M_3)$, $M_1 \times M_2 \times M_3$ são canonicamente identificados.]

ii.) *As σ-álgebras de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $d \in \mathbb{N}$, são estáveis com relação ao produto de σ-álgebras, no seguinte sentido:*

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_2}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_1+d_2}), \qquad d_1, d_2 \in \mathbb{N} \ .$$

Demonstração: Exercício.

No seguinte exercício introduzimos uma noção de produto para conteúdos em semianéis:

Exercício 278 *Sejam $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_N$, $N \in \mathbb{N}$, semianéis e $\mu_1 : \mathcal{H}_1 \to [0, \infty]$,..., $\mu_N : \mathcal{H}_N \to [0, \infty]$ conteúdos. Defina*

$$\mu_1 * \cdots * \mu_N : \mathcal{H}_1 * \cdots * \mathcal{H}_N \to [0, \infty]$$

por

$$\mu_1 * \cdots * \mu_N(E_1 \times \cdots \times E_N) = \mu_1(E_1) \cdots \mu_N(E_N) \ , \quad E_1 \in \mathcal{H}_1, \ldots, E_N \in \mathcal{H}_N \ ,$$

onde, por convenção

$$0 \cdot \infty, \infty \cdot 0 \doteq 0 \ .$$

Mostre que $\mu_1 * \cdots * \mu_N$ é um conteúdo. Mostre também que este é σ-finito se os conteúdos $\mu_1, \ldots, \mu_N$ forem σ-finitos.

Sugestão: Prove primeiro o caso especial $N = 2$ e deste deduza, em seguida, o caso geral, por um argumento de indução.

Mostraremos a seguir, por meio do teorema da convergência monótona, que se $\mu_1, ..., \mu_N$ forem medidas em σ-álgebras então o "conteúdo produto" $\mu_1 * \cdots * \mu_N$ é uma pré-medida:

Proposição 279 *Sejam* $(M_1, \mathcal{E}_1, \mu_1), \ldots, (M_N, \mathcal{E}_N, \mu_N)$*,* $N \in \mathbb{N}$*, espaços de medida. Então* $\mu_1 * \cdots * \mu_N$ *, como definido no último exercício, é uma pré-medida no semianel* $\mathcal{E}_1 * \cdots * \mathcal{E}_N$*.*

Demonstração: Sem restrição à generalidade, consideraremos somente o caso $N = 2$, pois o argumento apresentado aqui se estende de maneira simples para qualquer $N \in \mathbb{N}$.

1. Sejam sequências $\tilde{E}_n^{(1)} \in \mathcal{E}_1$, $\tilde{E}_n^{(2)} \in \mathcal{E}_2$, $n \in \mathbb{N}$, tais, que $\tilde{E}_n^{(1)} \times \tilde{E}_n^{(2)}$, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência disjunta de subconjuntos de $M_1 \times M_2$ e, para algum $E_1 \in \mathcal{E}_1$, $E_2 \in \mathcal{E}_2$ vale
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{E}_n^{(1)} \times \tilde{E}_n^{(2)} = E_1 \times E_2 \ .$$
Temos que provar que
$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_1 * \mu_2(\tilde{E}_n^{(1)} \times \tilde{E}_n^{(2)}) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_1(\tilde{E}_n^{(1)})\mu_2(\tilde{E}_n^{(2)}) \\ &= \mu_1 * \mu_2(E_1 \times E_2) = \mu_1(E_1)\mu_2(E_2) \ . \end{aligned}$$
Note-se que se $\mu_1 * \mu_2(\tilde{E}_n^{(1)} \times \tilde{E}_n^{(2)}) = \infty$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então esta igualdade vale trivialmente. Suporemos, portanto, que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mu_1 * \mu_2(\tilde{E}_n^{(1)} \times \tilde{E}_n^{(2)}) < \infty$.

2. Observe-se que, para tais sequências $\tilde{E}_n^{(1)} \in \mathcal{E}_1$, $\tilde{E}_n^{(2)} \in \mathcal{E}_2$, $n \in \mathbb{N}$, tem-se
$$\chi_{E_1}(p_1)\chi_{E_2}(p_2) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{\tilde{E}_n^{(1)}}(p_1)\chi_{\tilde{E}_n^{(2)}}(p_2) \ , \quad (p_1, p_2) \in M_1 \times M_2 \ .$$
Assim, pelo teorema da convergência monótona para a integral com respeito a μ_2, para todo $p_1 \in M_1$ fixo, vale
$$\begin{aligned} \mu_2(E_2)\chi_{E_1}(p_1) &= \int \chi_{E_1}(p_1)\chi_{E_2}(p_2)\mu_2(\mathrm{d}p_2) = \int \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{\tilde{E}_n^{(1)}}(p_1)\chi_{\tilde{E}_n^{(2)}}(p_2)\mu_2(\mathrm{d}p_2) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int \chi_{\tilde{E}_n^{(1)}}(p_1)\chi_{\tilde{E}_n^{(2)}}(p_2)\mu_2(\mathrm{d}p_2) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_2(\tilde{E}_n^{(2)})\chi_{\tilde{E}_n^{(1)}}(p_1) \ . \end{aligned}$$
Note-se aqui que, para qualquer $p_1 \in M_1$ fixo, a sequência de funções
$$\sum_{n=1}^{N} \chi_{\tilde{E}_n^{(1)}}(p_1)\chi_{\tilde{E}_n^{(2)}}(\cdot) \ , \quad N \in \mathbb{N} \ ,$$
em M_2 é crescente e converge (pontualmente) para $\chi_{E_1}(p_1)\chi_{E_2}(\cdot)$.

3. Novamente pelo teorema da convergência monótona, agora para a integral com respeito a μ_1, obtemos
$$\begin{aligned} \mu_1(E_1)\mu_2(E_2) &= \int \mu_2(E_2)\chi_{E_1}(p_1)\mu_1(\mathrm{d}p_1) \\ &= \int \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_2(\tilde{E}_n^{(2)})\chi_{\tilde{E}_n^{(1)}}(p_1)\mu_1(\mathrm{d}p_1) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_1(\tilde{E}_n^{(1)})\mu_2(\tilde{E}_n^{(2)}) \ . \end{aligned}$$

■

Se $(M_1, \mathcal{E}_1, \mu_1), \ldots, (M_N, \mathcal{E}_N, \mu_N)$ forem espaços de medida σ-finitos então $\mu_1 * \cdots * \mu_N$ é a restrição de uma medida única na σ-álgebra produto $\mathcal{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}_N$:

Corolário 280 (existência e unicidade da medida produto) *Sejam espaços de medida σ-finitos*

$$(M_1, \mathcal{E}_1, \mu_1), \ldots, (M_N, \mathcal{E}_N, \mu_N) , \quad N \in \mathbb{N} .$$

Então existe uma medida $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_N$ em $(M_1 \times \cdots \times, M_N, \mathcal{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}_N)$ definida de modo unívoco pela condição

$$\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_N(E_1 \times \cdots \times E_N) = \mu_1(E_1) \cdots \mu_N(E_N) , \quad E_1 \in \mathcal{E}_1, \ldots, E_N \in \mathcal{E}_N ,$$

com a convenção $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 \doteq 0$. Tal medida é σ-finita.

Demonstração: Pelo último exercício, $\mu_1 * \cdots * \mu_n$ é um conteúdo σ-finito em um semianel e pela última proposição este é uma pré-medida. Logo, pelo Corolário 121 segue a afirmação. ■

Exercício 281 *Sejam três espaços de medida σ-finitos $(M_1, \mathcal{E}_1, \mu_1)$, $(M_2, \mathcal{E}_2, \mu_2)$, $(M_3, \mathcal{E}_3, \mu_3)$ quaisquer. Mostre que vale*

$$(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3) = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \mu_3 .$$

A seguir enunciaremos um resultado importante, conhecido como o teorema de Fubini, sobre o comportamento da integral de Lebesgue com respeito ao produto de medidas do último corolário. Antes de fazê-lo é necessária alguma preparação: Para funções $f : M_1 \times M_2 \to \mathbb{R}$ defina, para todo $p_1 \in M_1$ e todo $p_2 \in M_2$, as funções $f_{p_1} : M_2 \to \mathbb{R}$ e $f^{p_2} : M_1 \to \mathbb{R}$:

$$f_{p_1}(p_2) = f^{p_2}(p_1) \doteq f(p_1, p_2) .$$

Exercício 282 *Sejam $(M_1, \mathcal{E}_1)$ e $(M_2, \mathcal{E}_2)$ espaços mensuráveis e $f : M_1 \times M_2 \to \mathbb{R}$ uma função $(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2)$-mensurável. Mostre que, para todo $p_1 \in M_1$ e todo $p_2 \in M_2$, f_{p_1} é uma função $\mathcal{E}_2$-mensurável e f^{p_2} uma função $\mathcal{E}_1$-mensurável.*

Sugestão: Para todo $p_1 \in M_1$ e todo $p_2 \in M_2$, note-se que $f_{p_1} = f \circ \iota_{p_1}$ e $f^{p_2} = f \circ \iota^{p_2}$, onde as funções $\iota_{p_1} : M_2 \to M_1 \times M_2$ e $\iota^{p_2} : M_1 \to M_1 \times M_2$ são definidas por

$$\iota_{p_1}(p_2) = \iota^{p_2}(p_1) \doteq (p_1, p_2) .$$

Teorema 283 (Fubini) *Sejam espaços de medida σ-finitos $(M_1, \mathcal{E}_1, \mu_1)$, $(M_2, \mathcal{E}_2, \mu_2)$ e seja $f \in \mathfrak{I}(\mu_1 \otimes \mu_2)$. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

i.) Para $p_1 \in M_1$ fora de um subconjunto μ_1-nulo, $f_{p_1} \in \mathfrak{I}(\mu_2)$.

ii.) Para $p_2 \in M_2$ fora de um subconjunto μ_2-nulo, $f^{p_2} \in \mathfrak{I}(\mu_1)$.

iii.) Defina a função $F_1 : M_1 \to \mathbb{R}$ por

$$F_1(p_1) \doteq \int f_{p_1}(p_2)\mu_2(\mathrm{d}p_2)$$

se $f_{p_1} \in \mathfrak{I}(\mu_2)$ e $F_1(p_1) \doteq 0$ senão. De modo análogo, defina $F_2 : M_2 \to \mathbb{R}$ por

$$F_2(p_2) \doteq \int f^{p_2}(p_1)\mu_1(\mathrm{d}p_1)$$

se $f^{p_2} \in \mathfrak{I}(\mu_1)$ e $F_2(p_2) \doteq 0$ senão. Então $F_1 \in \mathfrak{I}(\mu_1)$, $F_2 \in \mathfrak{I}(\mu_2)$ e vale

$$\int f(p_1, p_2)\, \mu_1 \otimes \mu_2(\mathrm{d}(p_1, p_2)) = \int F_1(p_1)\mu_1(\mathrm{d}p_1) = \int F_2(p_2)\mu_2(\mathrm{d}p_2) .$$

O teorema de Fubini afirma que se a função f é integrável com relação a $\mu_1 \otimes \mu_2$ então podemos integrar as variáveis p_1, p_2 separadamente e em qualquer ordem, obtendo assim a integral de f. Existem casos onde as integrais parciais F_1 e F_2 existem e são integráveis, porém,

$$\int F_1(p_1)\mu_1(\mathrm{d}p_1) \neq \int F_2(p_2)\mu_2(\mathrm{d}p_2)\ .$$

Nestes, pelo teorema de Fubini, a função f não é integrável com relação a $\mu_1 \otimes \mu_2$. O seguinte exemplo ilustra tal fato:

Exemplo 284 *Sejam* $(M_1, \mathcal{E}_1, \mu_1), (M_2, \mathcal{E}_2, \mu_2) \doteq (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda^{(1)})$ *e defina a função* $(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2)$*-mensurável*

$$f(x_1, x_2) \doteq \chi_{(0,1]}(x_1)\chi_{(1,\infty)}(x_2)(\mathrm{e}^{-x_1 x_2} - 2\mathrm{e}^{-2x_1 x_2})\ , \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\ .$$

Observe-se que, para todo $x_1 \in \mathbb{R}$ *e todo* $x_2 \in \mathbb{R}$*, as funções* $f_{x_1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $f^{x_2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *são integráveis. Defina, portanto, as funções* $F_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $F_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,*

$$\begin{aligned}
F_1(x_1) &\doteq \int f_{x_1}(x_2)\mu_2(\mathrm{d}x_2) = \chi_{(0,1]}(x_1)\int_1^\infty (\mathrm{e}^{-x_1 x_2} - 2\mathrm{e}^{-2x_1 x_2})\mathrm{d}x_2 \\
&= \chi_{(0,1]}(x_1)\frac{\mathrm{e}^{-x_1} - \mathrm{e}^{-2x_1}}{x_1} \geq 0\ , \\
F_2(x_2) &\doteq \int f^{x_2}(x_1)\mu_1(\mathrm{d}x_1) = \chi_{(1,\infty)}(x_2)\int_0^1 (\mathrm{e}^{-x_1 x_2} - 2\mathrm{e}^{-2x_1 x_2})\mathrm{d}x_1 \\
&= \chi_{(1,\infty)}(x_2)\frac{\mathrm{e}^{-2x_2} - \mathrm{e}^{-x_2}}{x_2} \leq 0\ .
\end{aligned}$$

As funções F_1 *e* F_2 *são também integráveis, porém vale*

$$\int F_1(x_1)\mu_1(\mathrm{d}x_1) > 0$$

enquanto

$$\int F_2(x_2)\mu_2(\mathrm{d}x_2) < 0\ .$$

Portanto,

$$\int F_1(x_1)\mu_1(\mathrm{d}x_1) \neq \int F_2(x_2)\mu_2(\mathrm{d}x_2)\ .$$

Note-se que no exemplo acima, por comodidade, escrevemos integrais de Lebesgue com respeito à medida de Lebesgue-Borel como integrais de Riemann, para o caso especial de funções exponenciais. Demonstraremos mais adiante que o fato de integrais com respeito à medida de Lebesgue-Borel serem integrais de Riemann também é verdadeiro para qualquer função contínua com suporte compacto, em qualquer dimensão.

Por fim, enunciamos a seguir o teorema de Tonelli, uma espécie de recíproca do teorema de Fubini, isto é, um resultado que relaciona a não integrabilidade com respeito a uma medida produto à divergência das integrais iteradas correspondentes.

Teorema 285 (teorema de Tonelli) *Sejam espaços de medida* σ*-finitos* $(M_1, \mathcal{E}_1, \mu_1)$*,* $(M_2, \mathcal{E}_2, \mu_2)$ *e seja* $f \in \mathfrak{M}(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2)$ positiva. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

i.)

$$E_1^{(\infty)} \doteq \left\{ p_1 \in M_1\ :\ \int f_{p_1}(p_2)\mu_2(\mathrm{d}p_2) = \infty \right\} \in \mathcal{E}_1$$

e $\mu_1(E_1^{(\infty)}) > 0$ *somente se*

$$\int f(p_1, p_2)\mu_1 \otimes \mu_2(\mathrm{d}(p_1, p_2)) = \infty\ .$$

ii.)

$$E_2^{(\infty)} \doteq \left\{ p_2 \in M_2 \;:\; \int f^{p_2}(p_1)\mu_1(\mathrm{d}p_1) = \infty \right\} \in \mathcal{E}_2$$

e $\mu_1(E_2^{(\infty)}) > 0$ *somente se*

$$\int f(p_1, p_2)\mu_1 \otimes \mu_2(\mathrm{d}(p_1, p_2)) = \infty \; .$$

iii.) Se $E_1^{(\infty)} \in \mathcal{E}_1$ *e* $\mu_1(E_1^{(\infty)}) = 0$ *então* $F_1 \in \mathfrak{M}(\mathcal{E}_1)$ *(onde a função positiva* F_1 *é definida como acima) e vale*

$$\int f(p_1, p_2)\mu_1 \otimes \mu_2(\mathrm{d}(p_1, p_2)) = \int F_1(p_1)\mu_1(\mathrm{d}p_1) \in [0, \infty] \; .$$

iv.) Se $E_2^{(\infty)} \in \mathcal{E}_2$ *e* $\mu_1(E_2^{(\infty)}) = 0$ *então* $F_2 \in \mathfrak{M}(\mathcal{E}_2)$ *(onde a função positiva* F_2 *é definida como acima) e vale*

$$\int f(p_1, p_2)\mu_1 \otimes \mu_2(\mathrm{d}(p_1, p_2)) = \int F_2(p_2)\mu_2(\mathrm{d}p_2) \in [0, \infty] \; .$$

2.7 Comportamento da integral de Lebesgue com respeito a operações convexas, desigualdade de Jensen e consequências

A seguir discutiremos o comportamento de integrais de Lebesgue com relação a operações convexas em $\mathbb{R}$. Dizemos que uma função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é convexa se, para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e todo $\alpha \in [0, 1]$,

$$\varphi(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha\varphi(x_1) + (1 - \alpha)\varphi(x_2) \; .$$

Observe-se que iterando esta desigualdade, concluímos que, para toda sequência finita $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \geq 0$ tal, que

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_N = 1$$

e todo $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}$, vale

$$\varphi(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_N x_N) \leq \alpha_1\varphi(x_1) + \cdots + \alpha_N\varphi(x_N) \; .$$

Mostraremos a seguir que vale uma desigualdade análoga para integrais de Lebesgue, a desigualdade de Jensen. Note-se que as somas finitas acima podem ser vistas como integrais de Lebesgue com respeito a uma medida adequada e esta desigualdade já é uma instância da desigualdade, mais geral, de Jensen.

Exercício 286 *Seja* $(M, \mathcal{E}, \mu)$ *um espaço de medida tal, que* $\mu(M) = 1$ *(tais espaços de medida são chamados "espaço probabilidades"),* $f \in \mathcal{S}(\mathcal{E})$ *e* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função convexa. Mostre que*

$$\varphi\left(\int f(p)\;\mu(\mathrm{d}p)\right) \leq \int \varphi \circ f(p)\mu(\mathrm{d}p) \; .$$

Note-se que $\varphi \circ f \in \mathcal{S}(\mathcal{E})$ sempre que $f \in \mathcal{S}(\mathcal{E})$ e, portanto, o lado direito da desigualdade acima está bem definido.

O seguinte resultado é bem conhecido em Análise:

Proposição 287 *Toda função convexa* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é automaticamente contínua. Em particular, tais funções são mensuráveis.*

Usando este fato e o teorema da convergência dominada de Lebesgue, mostraremos a seguir que a desigualdade do último exercício vale para qualquer $f \in \mathfrak{M}_b(\mathcal{E}) \supseteq \mathcal{S}(\mathcal{E})$:

Proposição 288 *Seja $(M, \mathcal{E}, \mu)$ um espaço de medida tal, que $\mu(M) = 1$, f uma função $\mathcal{E}$-mensurável e limitada, e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Então tem-se:*

$$\varphi\left(\int f(p)\,\mu(\mathrm{d}p)\right) \leq \int \varphi \circ f(p)\mu(\mathrm{d}p)\,.$$

Demonstração: Como a função f é $\mathcal{E}$-mensurável e limitada, pela Proposição 225.(i), existe uma sequência de funções simples $f_n \in \mathcal{S}(\mathcal{E})$ que converge uniformemente para f. Em particular, para uma constante suficientemente grande $C \in (0, \infty)$ vale

$$|f_n(p)| \leq C\,, \quad p \in M\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Note que, como a medida μ é finita, tem-se $C \in \mathfrak{I}(\mu)$. Logo, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, vale

$$\int f(p)\,\mu(\mathrm{d}p) = \lim_{n\to\infty} \int f_n(p)\,\mu(\mathrm{d}p)\,.$$

Como φ é contínua, pois é convexa, tem-se

$$\varphi\left(\int f(p)\,\mu(\mathrm{d}p)\right) = \lim_{n\to\infty} \varphi\left(\int f_n(p)\,\mu(\mathrm{d}p)\right)\,.$$

Também pela continuidade de φ, tem-se que a sequência $\varphi \circ f_n \in \mathcal{S}(\mathcal{E})$, $n \in \mathbb{N}$, converge para $\varphi \circ f$ e, para algum $C \in (0, \infty)$, vale

$$|\varphi \circ f_n(p)| \leq C\,, \quad p \in M\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Observe-se aqui a imagem de um compacto por uma função contínua é compacta. Assim, novamente pelo teorema da convergência dominada, $\varphi \circ f$ é integrável (com efeito, esta função é limitada e $\mathcal{E}$-mensurável) e vale

$$\int \varphi \circ f(p)\mu(\mathrm{d}p) = \lim_{n\to\infty} \int \varphi \circ f_n(p)\,\mu(\mathrm{d}p)\,.$$

Com as dual últimas igualdades, a proposição segue do último exercício. ■

A seguinte proposição generaliza a última para o caso de funções integráveis gerais, não necessariamente limitadas. Para prová-la faremos uso do seguinte lema, um outro resultado bem conhecido em Análise:

Lema 289 *Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ fixo, existe $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ tal, que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se*

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \geq \alpha_0(x - x_0)\,.$$

Note-se que o que este lema diz é, em termos geométricos, é o fato intuitivo de que toda função $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa possui, em todo ponto, uma tangente (não necessariamente única).

Proposição 290 (desigualdade de Jensen) *Seja $(M, \mathcal{E}, \mu)$ um espaço de medida tal, que $\mu(M) = 1$, $f \in \mathfrak{I}(\mu)$ e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Se $\varphi \circ f \in \mathfrak{I}(\mu)$ então vale*

$$\varphi\left(\int f(p)\,\mu(\mathrm{d}p)\right) \leq \int \varphi \circ f(p)\mu(\mathrm{d}p)\,.$$

Demonstração: Note-se que, pelo último lema com $x_0 = \int f(p)\, \mu(\mathrm{d}p) \in \mathbb{R}$, para algum $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, vale

$$\varphi \circ f(p) - \varphi\left(\int f(p)\mu(\mathrm{d}p)\right) \geq \alpha_0 f(p) - \alpha_0 \int f(p)\mu(\mathrm{d}p) \ , \quad p \in M \ .$$

Como $\mu(M) = 1$, para toda constante $C \in \mathbb{R}$ vale $C \in \mathfrak{I}(\mu)$ e $\int C\, \mu(\mathrm{d}p) = C$. Logo, se $\varphi \circ f \in \mathfrak{I}(\mu)$, pela monotonicidade e linearidade da integral concluímos que

$$\int \varphi \circ f(p)\mu(\mathrm{d}p) - \varphi\left(\int f(p)\mu(\mathrm{d}p)\right) \geq \alpha_0 \int f(p)\mu(\mathrm{d}p) - \alpha_0 \int f(p)\mu(\mathrm{d}p) = 0 \ .$$

■

O seguinte caso particular ($\varphi(x) = \mathrm{e}^x$) da desigualdade de Jensen é de grande importância na mecânica estatística clássica:

Corolário 291 *Seja $(M, \mathcal{E}, \mu)$ um espaço de medida tal, que $\mu(M) = 1$. Então, para toda função $f \in \mathfrak{I}(\mu)$ tem-se*

$$\int f(p)\, \mu(\mathrm{d}p) \leq \log\left(\int \mathrm{e}^{f(p)}\mu(\mathrm{d}p)\right)$$

com a convenção $\log(\infty) \doteq \infty$.

Demonstração: A desigualdade de Jensen para a função convexa $\varphi(x) = \mathrm{e}^x$ implica que

$$\exp\left(\int f(p)\, \mu(\mathrm{d}p)\right) \leq \int \mathrm{e}^{f(p)}\mu(\mathrm{d}p)$$

e a afirmação segue então do fato de que o logaritmo é uma função monótona crescente $(0, \infty) \to \mathbb{R}$.
■

Observação 292 *No corolário acima, se M é interpretado como o espaço de estados de um dado sistema físico (clássico), $f(p)$ é a energia total do sistema no estado $p \in M$, e a medida μ descreve a probabilidade de ocorrência de tais estados, então a quantidade*

$$-\log\left(\int \mathrm{e}^{-f(p)}\mu(\mathrm{d}p)\right)$$

é a chamada "energia livre" do sistema [em unidades tais que a temperatura vezes a constante de Bolzmann seja 1]. A desigualdade de Jensen corresponde, neste caso, ao fato de a energia livre ser sempre menor ou igual à energia média,

$$\int f(p)\, \mu(\mathrm{d}p) \ ,$$

do sistema.

A seguir mostraremos uma outra propriedade importante da energia livre, sua concavidade, que também é consequência direta da desigualdade de Jensen: Seja $(M, \mathcal{E}, \mu)$ um espaço de medida, onde μ é uma medida finita (mas não necessariamente vale $\mu(M) = 1$). Para toda função $f \in \mathfrak{M}_b(\mathcal{E})$ (isto é, f é limitada e $\mathcal{E}$-mensurável) definimos a quantidade

$$\mathcal{P}(f) \doteq \log\left(\int \mathrm{e}^{f(p)}\mu(\mathrm{d}p)\right) \in \mathbb{R} \ .$$

Em particular, se $\mu(M) = 1$ então $-\mathcal{P}(-f)$ é a energia livre associada à função energia f.

Proposição 293 *Sejam funções $f, f' \in \mathfrak{M}_b(\mathcal{E})$. Para todo $\alpha \in [0,1]$, vale*

$$(1-\alpha)\mathcal{P}(f) + \alpha\mathcal{P}(f') \geq \mathcal{P}((1-\alpha)f + \alpha f') .$$

Isto é, $f \mapsto \mathcal{P}(f)$ é uma função convexa $\mathfrak{M}_b(\mathcal{E}) \to \mathbb{R}$.

Demonstração: Sejam $f, f' \in \mathfrak{M}_b(\mathcal{E})$ quaisquer. Para todo $\alpha \in [0,1]$, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(f) - \mathcal{P}(\alpha f' + (1-\alpha)f) &= \log\left(\frac{\int \mathrm{e}^{f(p)}\mu(\mathrm{d}p)}{\int \mathrm{e}^{[\alpha f' + (1-\alpha)f](p)}\mu(\mathrm{d}p)}\right) \\
&= \log\left(\frac{\int \mathrm{e}^{[f-\alpha f' - (1-\alpha)f](p)}\mathrm{e}^{[\alpha f' + (1-\alpha)f](p)}\mu(\mathrm{d}p)}{\int \mathrm{e}^{[\alpha f' + (1-\alpha)f](p)}\mu(\mathrm{d}p)}\right) \\
&= \log\left(\int \mathrm{e}^{\alpha(f-f')(p)}\nu(\mathrm{d}p)\right) ,
\end{aligned}$$

onde

$$\nu = \left(\int \mathrm{e}^{[\alpha f' + (1-\alpha)f](p)}\mu(\mathrm{d}p)\right)^{-1} \mathrm{e}^{\alpha f' + (1-\alpha)f} \cdot \mu .$$

Recordem-se aqui a Definição 269 e a Proposição 273. Note-se que para ν vale $\nu(M) = 1$, por construção. Pelo Corolário 291, tem-se então:

$$\mathcal{P}(f) - \mathcal{P}(\alpha f' + (1-\alpha)f) \geq \alpha \int (f - f')(p)\nu(\mathrm{d}p) .$$

De modo análogo, vale também

$$\mathcal{P}(f') - \mathcal{P}(\alpha f' + (1-\alpha)f) \geq (1-\alpha) \int (f' - f)(p)\nu(\mathrm{d}p) .$$

Com efeito, a segunda desigualdade segue da primeira trocando f por f' e α por $(1-\alpha)$. Combinando as duas desigualdades depois de multiplicar a primeira por $(1-\alpha)$ e a segunda por α, obtemos:

$$(1-\alpha)\mathcal{P}(f) + \alpha\mathcal{P}(f') - \mathcal{P}(\alpha f' + (1-\alpha)f) \geq 0 ,$$

■

Observe-se que em Mecânica Estatística a última proposição corresponde ao fato de a "função pressão" ser uma função convexa da função energia. Uma consequência importante, para além da Mecânica Estatística, da convexidade de $\mathcal{P}$ mostrada acima (e, portanto, do Corolário 291) são as chamadas desigualdades de Hölder, que serão provadas e discutidas no próximo parágrafo.

2.8 Espaços $\mathcal{L}^p$

Definição 294 (seminormas $\mathcal{L}_p$) *Seja $(M, \mathcal{E}, \mu)$ um espaço de medida σ-finito e seja f uma função $\mathcal{E}$-mensurável. Para todo $p \in [1, \infty)$, a quantidade*

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p} \doteq \left(\int |f(x)|^p \,\mu(\mathrm{d}x)\right)^{1/p}$$

é a chamada "seminorma $\mathcal{L}^p$" da função f. Se $\|f\|_{\mathcal{L}^p} < \infty$ dizemos que f é uma "função $\mathcal{L}^p$" ou "do tipo $\mathcal{L}^p$". $\mathcal{L}^p(\mu) \subseteq \mathfrak{M}(\mathcal{E})$ denota o conjunto de todas as funções $f \in \mathfrak{M}(\mathcal{E})$ do tipo $\mathcal{L}^p$ com relação à medida μ. Note-se aqui que $\mathcal{L}^1(\mu) = \mathfrak{I}(\mu) \cap \mathfrak{M}(\mathcal{E})$.

Veremos a seguir que, para todo $p, q \in (1, \infty)$, $1/p+1/q = 1$, e $f, f' \in \mathfrak{M}(\mathcal{E})$, vale a desigualdade

$$\int |f \cdot f'|\,(x)\mu(\mathrm{d}x) = \|f \cdot f'\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p}\, \|f'\|_{\mathcal{L}^q}$$

com a convenção $0 \cdot \infty \doteq 0$ para o lado direito da mesma. Tal desigualdade é chamada "desigualdade de Hölder". Provaremos sua validade primeiro para casos especiais:

Exercício 295 *Suponha que $\mu(M) < \infty$. Usando a convexidade da função $\mathcal{P} : \mathfrak{M}_b(\mathcal{E}) \to \mathbb{R}$ do último parágrafo, prove a desigualdade de Hölder para o caso de funções f, f' limitadas e uniformemente estritamente positivas (isto é, $f(x), f'(x) \geq \varepsilon$ para um $\varepsilon > 0$ e todo $x \in M$).*

Sugestão: Represente f, f' como

$$f_1 = \mathrm{e}^{\frac{1}{p}F},\ f_2 = \mathrm{e}^{\frac{1}{q}F'}\ ,$$

onde, $p, q \in (1, \infty)$, $1/p + 1/q = 1$, e F, F' são funções $\mathcal{E}$-mensuráveis.

O caso geral das desigualdades de Hölder se demostra por limites do caso especial tratado no exercício acima:

Lema 296 *Seja $(M, \mathcal{E}, \mu)$ um espaço de medida finito (isto é, $\mu(M) < \infty$). Para todo $f_1, f_2 \in \mathfrak{M}_b(\mathcal{E})$ (isto é, f_1, f_2 são limitadas e $\mathcal{E}$-mensuráveis) e todo $p, q \in (1, \infty)$, $1/p+1/q = 1$, vale a desigualdade de Hölder.*

Demonstração: Note-se que, sem restrição à generalidade, podemos supor que $f_1, f_2 \geq 0$. Fixe $p, q \in (1, \infty)$, $1/p + 1/q = 1$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, defina as funções $f_{1,n}, f_{2,n} \in \mathfrak{M}_b(\mathcal{E})$ por

$$f_{1,n} \doteq f_1 + n^{-1}, \quad f_{2,n} \doteq f_2 + n^{-1}.$$

Note-se que, por construção. tem-se

$$\lim_{n\to\infty} f_{1,n}^p = f_1^p\ , \quad \lim_{n\to\infty} f_{2,n}^q = f_2^q\ , \quad \lim_{n\to\infty} f_{1,n} \cdot\ f_{2,n} = f_1 \cdot f_2\ .$$

Como f_1, f_2 são limitadas, para algum $C \in (0, \infty)$, vale

$$f_{1,n}(x)^p, f_{2,n}(x)^q, f_{1,n} \cdot\ f_{2,n}(x) \leq C\ , \quad n \in \mathbb{N}\ ,\ x \in M\ .$$

Como $\mu(M) < \infty$, vale $C \in \mathfrak{I}(\mu)$. Portanto, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, tem-se

$$\begin{aligned} \|f_1 \cdot f_2\|_{\mathcal{L}^1} &= \lim_{n\to\infty} \|f_{1,n} \cdot f_{2,n}\|_{\mathcal{L}^1}\ , \\ \|f_1\|_{\mathcal{L}^p}\, \|f_2\|_{\mathcal{L}^q} &= \lim_{n\to\infty} \|f_{1,n}\|_{\mathcal{L}^p}\, \|f_{2,n}\|_{\mathcal{L}^q}\ . \end{aligned}$$

Notando que $f_{1,n}, f_{2,n} \geq n^{-1}$, pelo último exercício concluímos que

$$\|f_1 \cdot f_2\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|f_1\|_{\mathcal{L}^p}\, \|f_2\|_{\mathcal{L}^q}\ .$$

■

Proposição 297 (Hölder) *Seja $(M, \mathcal{E}, \mu)$ um espaço de medida σ-finito. Para todo $f_1, f_2 \in \mathfrak{M}(\mathcal{E})$ e todo $p, q \in (1, \infty)$, $1/p + 1/q = 1$, vale*

$$\|f_1 \cdot f_2\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|f_1\|_{\mathcal{L}^p}\, \|f_2\|_{\mathcal{L}^q}$$

com a convenção $0 \cdot \infty \doteq 0$ para o lado direito desta desigualdade.

Demonstração: Sem restrição à generalidade, podemo supor que $f_1, f_2 \geq 0$. Fixe $p, q \in (1, \infty)$, $1/p + 1/q = 1$. Suponha também, em um primeiro momento, que $\mu(M) < \infty$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, defina $f_{1,n}, f_{2,n} \in \mathfrak{M}_b(\mathcal{E})$ por

$$f_{1,n} \doteq n \wedge f_1 \ , \quad f_{2,n} \doteq n \wedge f_2 \ .$$

Pelo teorema da convergência monótona, tem-se

$$\begin{aligned} \|f_1 \cdot f_2\|_{\mathcal{L}^1} &= \lim_{n\to\infty} \|f_{1,n} \cdot f_{2,n}\|_{\mathcal{L}^1} \ , \\ \|f_1\|_{\mathcal{L}^p} \|f_2\|_{\mathcal{L}^q} &= \lim_{n\to\infty} \|f_{1,n}\|_{\mathcal{L}^p} \|f_{2,n}\|_{\mathcal{L}^q} \ , \end{aligned}$$

onde $0 \cdot \infty \doteq 0$. Note-se aqui que $\|f_{1,n}\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|f_1\|_{\mathcal{L}^p}$, $\|f_{1,n}\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|f_1\|_{\mathcal{L}^p}$ e, portanto, $\|f_{1,n}\|_{\mathcal{L}^p} \|f_{2,n}\|_{\mathcal{L}^q} = 0$ sempre que $\|f_1\|_{\mathcal{L}^p} = 0$ ou $\|f_2\|_{\mathcal{L}^q} = 0$. Assim, pelo último lema, vale

$$\|f_1 \cdot f_2\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|f_1\|_{\mathcal{L}^p} \|f_2\|_{\mathcal{L}^q} \ ,$$

onde $0 \cdot \infty \doteq 0$. De modo análogo, deduzimos a desigualdade de Hölder em espaços de medida σ-finitos do caso especial dos espaços finitos. ■

Uma importante consequência das desigualdades de Hölder são as desigualdades de Minkowski, demonstradas a seguir: Seja $(M, \mathcal{E}, \mu)$ um espaço de medida σ-finito, $p \in [1, \infty)$ e $f, f' : M \to \mathbb{R}$ funções $\mathcal{E}$-mensuráveis tais, que

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p} , \|f'\|_{\mathcal{L}^p} < \infty \ .$$

Isto é, $f, f' \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Note-se que

$$|f + f'|^p \leq 2^p |f|^p \vee |f'|^p \leq 2^p (|f|^p + |f'|^p) \ .$$

Portanto, neste caso, lembrando que $(a^p + b^p)^{\frac{1}{p}} \leq a + b$ para todo $a, b \in [0, \infty)$,

$$\|f + f'\|_{\mathcal{L}^p} \leq 2(\|f\|_{\mathcal{L}^p} + \|f'\|_{\mathcal{L}^p}) < \infty.$$

Com efeito, vale a seguinte desigualdade:

Proposição 298 (desigualdades de Minkowski) *Seja $(M, \mathcal{E}, \mu)$ um espaço de medida, $p \in [1, \infty)$ e $f, f' \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Então vale*

$$\|f + f'\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} + \|f'\|_{\mathcal{L}^p} \ .$$

Demonstração: Note-se que o caso especial $p = 1$ segue diretamente da monotonicidade e linearidade da integral, pois vale

$$|f + f'| \leq |f| + |f'| \ .$$

Seja então $p \in (1, \infty)$. Aplicando a desigualdade de Hölder para os pares de funções $|f|$, $|f + f'|^{p-1}$ e $|f'|$, $|f + f'|^{p-1}$ com $q = \frac{p}{p-1}$ (isto é, $1/p + 1/q = 1$) obtemos:

$$\begin{aligned} \int |f| \cdot |f + f'|^{p-1}(x)\mu(\mathrm{d}x) &\leq \left(\int |f|^p(x)\mu(\mathrm{d}x) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f + f'|^p(x)\mu(\mathrm{d}x) \right)^{\frac{p-1}{p}} , \\ \int |f'| \cdot |f + f'|^{p-1}(x)\mu(\mathrm{d}x) &\leq \left(\int |f'|^p(x)\mu(\mathrm{d}x) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f + f'|^p(x)\mu(\mathrm{d}x) \right)^{\frac{p-1}{p}} . \end{aligned}$$

Somando as duas desigualdades, observando que $|f + f'| \leq |f| + |f'|$, tem-se:

$$\begin{aligned} \int |f + f'|^p(x)\mu(\mathrm{d}x) &\leq \int (|f| + |f'|) \cdot |f + f'|^{p-1}(x)\mu(\mathrm{d}x) \\ &\leq \left[\left(\int |f|^p(x)\mu(\mathrm{d}x) \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |f'|^p(x)\mu(\mathrm{d}x) \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\ &\quad \times \left(\int |f + f'|^p(x)\mu(\mathrm{d}x) \right)^{\frac{p-1}{p}} . \end{aligned}$$

Ou seja, vale

$$\|f + f'\|^p_{\mathcal{L}^p} \leq (\|f\|_{\mathcal{L}^p} + \|f'\|_{\mathcal{L}^p}) \|f + f'\|^{p-1}_{\mathcal{L}^p} ,$$

o que implica a desigualdade de Minkowski

$$\|f + f'\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} + \|f'\|_{\mathcal{L}^p} \ .$$

■

Com o resultado acima, para todo $p \in [1, \infty)$, $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}$ define uma seminorma:

Lema 299 *$(M, \mathcal{E}, \mu)$ um espaço de medida σ-finito. Para todo $p \in [1, \infty)$, $\mathcal{L}^p(\mu)$ é um espaço vetorial e $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}$ é uma seminorma neste espaço, isto é:*

i.) Para todo $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^p(\mu)$, vale $\|f_1 + f_2\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|f_1\|_{\mathcal{L}^p} + \|f_2\|_{\mathcal{L}^p}$.

ii.) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, vale $\|\alpha f\|_{\mathcal{L}^p} = |\alpha| \, \|f\|_{\mathcal{L}^p}$ com a convenção $0 \cdot \infty \doteq 0$.

Observe-se que, em geral, $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}$ não é uma norma, mas somente uma seminorma, pois, $\|f\|_{\mathcal{L}^p} = 0$ não implica necessariamente que $f = 0$.

2.9 O Teorema de Riesz-Markov

Ao longo de toda esta seção (M, d) denotará um espaço métrico σ-localmente compacto (Definição 181). As medidas consideradas nestes espaços serão aqui sempre regulares (Definição 170(v)). Em particular, estas medidas μ são (por definição de medida regular) finitas em compactos e σ-finitas (já que M é, por definição de espaço σ-compacto, uma união contável de compactos e μ é finita em compactos). Recorde-se que mostramos (Corolário 215) que todo funcional linear positivo $\Phi : C_c(M, d) \to \mathbb{R}$ está naturalmente associado a uma medida μ_Φ regular em $\mathcal{B}(M, d)$ que é unicamente definida pela condição:

$$\mu_\Phi(O) = \sup\{\Phi(f) \ : \ \mathrm{supp}(f) \subseteq O \text{ e } f(M) \subseteq [0, 1]\} \ , \quad O \in \tau_d \ .$$

Neste parágrafo mostraremos que

$$\Phi(f) = \int f(p)\mu_\Phi(\mathrm{d}p) \ , \quad f \in C_c(M, d) \ ,$$

e que transformação $\Phi \mapsto \mu_\Phi$ é uma bijeção entre os funcionais lineares positivos em $C_c(M, d)$ e as medidas regulares em $\mathcal{B}(M, d)$. Tal resultado corresponde ao célebre teorema de Riesz-Markov, no caso especial das medidas regulares na álgebra Boreliana de um espaço métrico σ-localmente compacto.

Seja μ uma medida regular em $\mathcal{B}(M, d)$. Para toda $f \in C_c(M, d) \subseteq \mathfrak{M}_b(\mathcal{B}(M, d))$, tem-se

$$\mathrm{supp}(0 \vee f), \mathrm{supp}(0 \vee (-f)) \subseteq \mathrm{supp}(f) \ .$$

Logo, para alguma constante $C \in (0, \infty)$, vale

$$0 \vee f, 0 \vee (-f) \leq C\chi_{\mathrm{supp}(f)} \ .$$

Assim,

$$\int (0 \vee f)(p)\mu(\mathrm{d}p), \int (0 \vee (-f))(p)\mu(\mathrm{d}p) \leq C \int \chi_{\mathrm{supp}(f)}(p)\mu(\mathrm{d}p) = C\mu(\mathrm{supp}(f)) < \infty$$

e, portanto, $C_c(M,d) \subseteq \mathfrak{I}(\mu)$. Com esta observação e propriedades básicas da integral de Lebesgue, definimos o funcional linear positivo $\Phi_\mu : C_c(M,d) \to \mathbb{R}$,

$$\Phi_\mu(f) \doteq \int f(p)\mu(\mathrm{d}p) \ .$$

Mostraremos a seguir que a função $\mu \mapsto \Phi_\mu$ é injetora no conjunto das medidas regulares em $\mathcal{B}(M,d)$.

Proposição 300 *Seja μ uma medida regular em $\mathcal{B}(M,d)$. Então vale $\mu_{\Phi_\mu} = \mu$.*

Demonstração: Como μ e μ_{Φ_μ} são σ-finitas (já que são regulares e (M,d) σ-compacto), pela Proposição 199, para demonstrar que $\mu_{\Phi_\mu} = \mu$ basta provar que estas duas medidas coincidem em abertos. Observe-se que, pela monotonicidade da integral, para todo $f \in C_c(M,d)$, $\mathrm{supp}(f) \subseteq O$, $0 \leq f \leq 1$, vale

$$\Phi_\mu(f) = \int f(p)\mu(\mathrm{d}p) \leq \int \chi_O(p)\mu(\mathrm{d}p) = \mu(O) \ .$$

Logo, para todo $O \in \tau_d$, vale $\mu_{\Phi_\mu}(O) \leq \mu(O)$. Seja agora um $O \in \tau_d$ e um $K \in \mathcal{K}(M,d)$, $K \subseteq O$ fixos arbitrários. Pelo Lema 211, existe $f \in C_c(M,d)$ com $\mathrm{supp}(f) \subseteq O$, $0 \leq f \leq 1$, tal, que $f(p) = 1$ se $p \in K$. Neste caso, tem-se $f \geq \chi_K$ e concluímos que

$$\mu(K) = \int \chi_K(p)\mu(\mathrm{d}p) \leq \int f(p)\mu(\mathrm{d}p) \leq \mu_{\Phi_\mu}(O) \ .$$

Como μ é (por definição de medida regular) uma medida "tight", para todo $O \in \tau_d$, tem-se que

$$\mu(O) = \sup\{\mu(K) \ : \ K \in \mathcal{K}(M,d), \ K \subseteq O\} \leq \mu_{\Phi_\mu}(O) \ .$$

■

Corolário 301 *Sejam μ_1, μ_2 duas medidas regulares em $\mathcal{B}(M,d)$. Então $\Phi_{\mu_1} = \Phi_{\mu_2}$ se, e somente se, $\mu_1 = \mu_2$.*

Demonstração: Se $\mu_1 = \mu_2$ são iguais então trivialmente vale $\Phi_{\mu_1} = \Phi_{\mu_2}$. Suponha que $\Phi_{\mu_1} = \Phi_{\mu_2}$. Pela última proposição, tem-se

$$\mu_1 = \mu_{\Phi_{\mu_1}} = \mu_{\Phi_{\mu_2}} = \mu_2 \ .$$

■

Pelo último corolário, a transformação $\mu \mapsto \Phi_\mu$, que a cada medida regular em $\mathcal{B}(M,d)$ associa um funcional linear positivo em $C_c(M,d)$, é injetora. Com efeito, a proposição precedente afirma que a transformação $\Phi \mapsto \mu_\Phi$ (do Corolário 215) é a inversa à esquerda da primeira.

Na seguinte proposição mostraremos que a transformação $\Phi \mapsto \mu_\Phi$ é também a inversa a direita de $\mu \mapsto \Phi_\mu$, o que implica, em particular, que esta última é sobrejetora.

Lema 302 *Seja um funcional linear positivo $\Phi : C_c(M,d) \to \mathbb{R}$. Para toda função $f \in C_c(M,d)$, $f(M,d) \subseteq [0,1]$, e todo $\varepsilon > 0$, existem funções simples $f_\varepsilon^\flat, f_\varepsilon^\sharp \in \mathcal{S}(\mathcal{B}(M,d), \mu_\Phi)$, $f_\varepsilon^\flat \leq f \leq f_\varepsilon^\sharp$, tais, que*

$$\begin{aligned} \int f_\varepsilon^\flat(p)\mu_\Phi(\mathrm{d}p) \ &\leq \ \Phi(f) \leq \varepsilon + \int f_\varepsilon^\sharp(p)\mu_\Phi(\mathrm{d}p) \ , \\ \int (f_\varepsilon^\sharp - f_\varepsilon^\flat)(p)\mu_\Phi(\mathrm{d}p) \ &\leq \ \varepsilon \ . \end{aligned}$$

Demonstração: Fixe $\varepsilon > 0$ e $f \in C_c(M,d)$ tal, que $f(M) \subseteq [0,1]$.

1. Para um $n \in \mathbb{N}$ a ser fixado mais adiante, seja a sequência decrescente de abertos

$$O_{-1} \doteq O_0 \supseteq O_1 \supseteq \cdots \supseteq O_n$$

definida por

$$O_k = f^{-1}\left((\frac{k}{n}, \infty) \right) \ , \quad k = 1, \ldots, n \ ,$$

onde $O_{-1} \doteq O_0$ é qualquer aberto tal, que $\mathrm{supp}(f) \subseteq O_0$ e $\mu(\overline{O}_0) < \infty$. Um tal aberto existe, porque $\mathrm{supp}(f)$ é compacto e o espaço métrico M, localmente compacto. Observe-se que, por construção, $O_n = \emptyset$ e, pela continuidade de f, vale

$$\overline{O}_{k+1} \subseteq O_k \ , \quad k = 0, \ldots, n-1 \ .$$

2. Então definimos

$$\begin{aligned} f_\varepsilon^\flat &\doteq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_{O_k} \in \mathcal{S}(\mathcal{B}(M,d)) \ , \\ f_\varepsilon^\sharp &\doteq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_{O_{k-1}} \in \mathcal{S}(\mathcal{B}(M,d)) \ . \end{aligned}$$

Por construção, vale $f_\varepsilon^\flat(p) = \frac{k-1}{n}$ e $f_\varepsilon^\sharp(p) = \frac{k}{n}$ se $p \in O_{k-1} \backslash O_k$, $k = 1, \ldots, n$. Logo, tem-se $f_\varepsilon^\flat \leq f \leq f_\varepsilon^\sharp$ e

$$\int (f_\varepsilon^\sharp - f_\varepsilon^\flat)\mu_\Phi(\mathrm{d}p) = \frac{1}{n}\int \chi_{O_0}\mu_\Phi(\mathrm{d}p) = \frac{1}{n}\mu_\Phi(O_0) \leq \frac{1}{n}\mu_\Phi(\overline{O}_0) \ .$$

Recorde-se que vale $\mu_\Phi(\overline{O}_0) < \infty$ por simples escolha de O_0. Portanto, tem-se

$$\int (f_\varepsilon^\sharp - f_\varepsilon^\flat)\mu_\Phi(\mathrm{d}p) \leq \varepsilon$$

para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

3. Defina as funções contínuas

$$g_k \doteq \left((f - \frac{k-1}{n}) \vee 0 \right) \wedge \frac{1}{n} = \left((f - \frac{k-1}{n}) \wedge \frac{1}{n} \right) \vee 0 \ , \quad k = 1, \ldots, n \ .$$

Note-se que, por construção, para todo $k = 1, \ldots, n$ e todo $p \in M$, vale

$$g_k(p) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & , & p \notin O_{k-1} \\ f(p) - \frac{k-1}{n} & , & p \in O_{k-1} \backslash O_k \\ \frac{1}{n} & , & p \in O_k \end{array} \right. .$$

Em particular, para todo $k = 1, \ldots, n$ e todo $p \in O_{k-1} \backslash O_k$, tem-se

$$\begin{gathered} g_1(p) = \cdots = g_{k-1}(p) = \frac{1}{n} \ , \\ g_k(p) = f(p) - \frac{k-1}{n} \ , \\ g_{k+1}(p) = \cdots = g_n(p) = 0 \ . \end{gathered}$$

Portanto, vale

$$f = g_1 + \cdots + g_n \ .$$

4. Sejam $f_k \in C_c(M, d)$, $f_k(M) \subseteq [0, 1]$, $k = 1, \ldots, n$, funções arbitrárias tais, que $\operatorname{supp}(f_k) \subseteq O_k$. Note-se que $f_k \leq n g_k$, $k = 1, \ldots, n$. Assim, vale $\Phi(f_k) \leq n\Phi(g_k)$, pois Φ é um funcional positivo. Portanto, tomando o supremo com relação a tais funções f_k, tem-se
$$\mu_\Phi(O_k) \leq n\Phi(g_k) \ , \quad k = 1, \ldots, n \ .$$
Logo, vale
$$\begin{aligned} \int f_\varepsilon^\flat(p)\mu_\Phi(\mathrm{d}p) &= \int \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \chi_{O_k}(p)\mu_\Phi(\mathrm{d}p) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mu_\Phi(O_k) \leq \sum_{k=1}^n \Phi(g_k) \\ &= \Phi\left(\sum_{k=1}^n g_k\right) = \Phi\left(f\right) \ . \end{aligned}$$

5. De modo análogo, note-se que $\operatorname{supp}(ng_k) = \operatorname{supp}(g_k) \subseteq O_{k-2}$, $k = 1, \ldots, n$ (já que $\operatorname{supp}(g_k) \subseteq \overline{O}_{k-1}$). Como vale $0 \leq ng_k \leq 1$, tem-se $n\Phi(g_k) \leq \mu_\Phi(O_{k-2})$ e, portanto,
$$\begin{aligned} \Phi\left(f\right) &= \Phi\left(\sum_{k=1}^n g_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n n\Phi(g_k) \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mu_\Phi(O_{k-2}) \leq \frac{1}{n}\mu_\Phi(O_{-1}) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mu_\Phi(O_{k-1}) \\ &= \frac{1}{n}\mu_\Phi(O_0) + \int \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \chi_{O_{k-1}}(p)\mu_\Phi(\mathrm{d}p) \\ &= \frac{1}{n}\mu_\Phi(O_0) + \int f_\varepsilon^\sharp(p)\mu_\Phi(\mathrm{d}p) \end{aligned}$$

6. Note-se, por fim, que, novamente por simples escolha, vale $\frac{1}{n}\mu_\Phi(O_0) \leq \varepsilon$ para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

■

Proposição 303 *Para todo funcional linear positivo* $\Phi : C_c(M, d) \to \mathbb{R}$ *vale* $\Phi = \Phi_{\mu_\Phi}$.

Demonstração: Fixe um funcional linear positivo $\Phi : C_c(M, d) \to \mathbb{R}$. Seja $\tilde{f} \in C_c(M, d)$ tal, que $\tilde{f}(M) \subseteq [0, 1]$. Pelo último lema, para todo $\varepsilon > 0$, existem funções simples $f_\varepsilon^\flat, f_\varepsilon^\sharp \in \mathcal{S}(\mathcal{B}(M, d), \mu_\Phi)$, $f_\varepsilon^\flat \leq \tilde{f} \leq f_\varepsilon^\sharp$, tais, que
$$\begin{aligned} \int f_\varepsilon^\flat(p)\mu_\Phi(\mathrm{d}p) &\leq \Phi(\tilde{f}) \leq \varepsilon + \int f_\varepsilon^\sharp(p)\mu_\Phi(\mathrm{d}p) \ , \\ \int (f_\varepsilon^\sharp - f_\varepsilon^\flat)(p)\mu_\Phi(\mathrm{d}p) &\leq \varepsilon \ . \end{aligned}$$
Como, pela monotonicidade da integral, vale
$$\int f_\varepsilon^\flat(p)\mu_\Phi(\mathrm{d}p) \leq \int \tilde{f}(p)\mu_\Phi(\mathrm{d}p) \leq \int f_\varepsilon^\sharp(p)\mu_\Phi(\mathrm{d}p) \ ,$$

tomando o limite de pequenos $\varepsilon > 0$, concluímos que

$$\Phi(\tilde{f}) = \int \tilde{f}(p)\mu_\Phi(\mathrm{d}p) \ .$$

Finalmente, observando que toda $f \in C_c(M,d)$ é combinação linear de duas funções $\tilde{f} \in C_c(M,d)$ tais, que $\tilde{f}(M) \subseteq [0,1]$, da linearidade de Φ e da integral segue a proposição. ■

Corolário 304 (teorema de Riesz-Markov para espaços σ-locamente compactos) *Para todo funcional linear positivo $\Phi : C_c(M,d) \to \mathbb{R}$ existe uma medida regular μ_Φ em $\mathcal{B}(M,d)$ única tal, que*

$$\Phi(f) = \int f(p)\mu_\Phi(\mathrm{d}p) \ , \quad f \in C_c(M,d) \ .$$

Demonstração: Da Proposição 303 segue a existência de μ_Φ e do Corolário 301 sua unicidade. ■

Na seguinte observação e proposição, discutimos uma interpretação do teorema de Riesz-Markov em termos da existência e unicidade de extensões σ-normais de funcionais positivos em $C_c(M,d)$.

Observação 305 (extensões σ-normais de funcionais positivos) *Dado um funcional linear positivo $\Phi : C_c(M,d) \to \mathbb{R}$, pelo teorema de Riesz-Markov, podemos naturalmente estendê-lo para um funcional linear positivo $\widetilde{\Phi} : \mathcal{L}^1(\mu_\Phi) \to \mathbb{R}$,*

$$\widetilde{\Phi}(f) \doteq \int f(p)\mu_\Phi(\mathrm{d}p) \ , \quad f \in \mathcal{L}^1(\mu_\Phi) \ ,$$

lembrado que $C_c(M,d) \subseteq \mathfrak{I}(\mu_\Phi)$, já que μ_Φ é regular. Recorde-se que $\mathcal{L}^1(\mu_\Phi) = \mathfrak{I}(\mu_\Phi) \cap \mathfrak{M}(\mathcal{B}(M,d))$. Pelo teorema da convergência monótona, vemos que $\widetilde{\Phi}$ é σ-normal, isto é, para toda sequência monotonicamente crescente $f_n \in \mathcal{L}^1(\mu_\Phi)$ tal, que $\lim_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{L}^1(\mu_\Phi)$ vale

$$\widetilde{\Phi}\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{\Phi}(f_n) \ .$$

Proposição 306 *Seja $\Phi : C_c(M,d) \to \mathbb{R}$ um funcional linear positivo tal, que*

$$\Phi(1) \doteq \sup\{\Phi(f) \ : \ f \in C_c(M,d) \ , \ f(M) \subseteq [0,1]\} < \infty \ .$$

Então μ_Φ é uma medida finita e $\widetilde{\Phi} : \mathfrak{M}_b(\mathcal{B}(M,d)) \subseteq \mathcal{L}^1(\mu_\Phi) \to \mathbb{R}$, como definido na última observação, é o único funcional $\mathfrak{M}_b(\mathcal{B}(M,d)) \to \mathbb{R}$ linear, positivo e σ-normal que estende Φ. Note-se que $\mathfrak{M}_b(\mathcal{B}(M,d)) \subseteq \mathcal{L}^1(\mu_\Phi)$, pois μ_Φ é uma medida finita, e que $C_c(M,d) \subseteq \mathfrak{M}_b(\mathcal{B}(M,d))$.

Demonstração: Seja $\Phi : C_c(M,d) \to \mathbb{R}$ um funcional linear positivo tal, que $\Phi(1) < \infty$.

1. Pela definição de μ_Φ, vale $\mu_\Phi(M) = \Phi(1) < \infty$.

2. Seja $\widetilde{\Phi} : \mathfrak{M}_b(\mathcal{B}(M,d)) \to \mathbb{R}$ qualquer funcional linear, positivo e σ-normal que estenda Φ. Pela última observação, existe ao menos um tal funcional. Defina $\mu_{\widetilde{\Phi}} : \mathcal{B}(M,d) \to [0,\infty)$ por

$$\mu_{\widetilde{\Phi}}(E) \doteq \widetilde{\Phi}(\chi_E) \ , \quad E \in \mathcal{B}(M,d) \ .$$

   Observe-se aqui que, para todo $E \in \mathcal{B}(M,d)$ tem-se $0 \leq \widetilde{\Phi}(\chi_E) < \infty$.

3. Pela linearidade de $\widetilde{\Phi}$, $\mu_{\widetilde{\Phi}}$ é aditivo e vale
$$\mu_{\widetilde{\Phi}}(\emptyset) = \widetilde{\Phi}(\chi_\emptyset) = \widetilde{\Phi}(0) = 0 \; .$$
Pela σ-normalidade de $\widetilde{\Phi}$, vê-se que $\mu_{\widetilde{\Phi}}$ é σ-aditivo, isto é, $\mu_{\widetilde{\Phi}}$ é uma medida. Como
$$\mu_{\widetilde{\Phi}}(M) = \widetilde{\Phi}(\chi_{\mathbb{R}^d}) = \widetilde{\Phi}(1) < \infty \; ,$$
$\mu_{\widetilde{\Phi}}$ é uma medida finita.

4. É fácil ver que, para toda função simples $f \in \mathcal{S}(\mathcal{B}(M,d)) \subseteq \mathfrak{M}_b(\mathcal{B}(M,d))$, vale
$$\widetilde{\Phi}(f) = \int f(p)\mu_{\widetilde{\Phi}}(\mathrm{d}p) \; .$$
Como toda $f \in \mathfrak{M}_b(\mathcal{B}(M,d))$ é o limite monótono crescente de uma sequência de funções simples, pela σ-normalidade de $\widetilde{\Phi}$ e da integral de Lebesgue, têm-se que, para toda $f \in \mathfrak{M}_b(\mathcal{B}(M,d))$ positiva, vale
$$\widetilde{\Phi}(f) = \int f(p)\mu_{\widetilde{\Phi}}(\mathrm{d}p) \; .$$

5. Como toda $f \in \mathfrak{M}_b(\mathcal{B}(M,d))$ a diferença $f = 0 \vee f - 0 \vee (-f)$, e vale $0 \vee f, 0 \vee (-f) \geq 0$, $0 \vee f, 0 \vee (-f) \in \mathfrak{M}_b(\mathcal{B}(M,d))$, pela linearidade de $\widetilde{\Phi}$ concluímos que
$$\widetilde{\Phi}(f) = \int f(p)\mu_{\widetilde{\Phi}}(\mathrm{d}p) \; , \quad f \in \mathfrak{M}_b(\mathcal{B}(M,d)) \; .$$

6. Como $\mu_{\widetilde{\Phi}}$ é finita em compactos, pois é simplesmente finita, pelo teorema de Riesz-Markov demonstrado acima, tem-se $\mu_{\widetilde{\Phi}} = \mu_\Phi$. Logo, $\widetilde{\Phi} = \Phi$. Recorde-se aqui que $C_c(M,d) \subseteq \mathfrak{M}_b(\mathcal{B}(M,d))$.

■

Por uma adaptação simples da Proposição 237, o espaço de funções mensuráveis $\mathfrak{M}_b(\mathcal{B}(M,d))$ pode ser definido como sendo o menor espaço de funções limitadas $M \to \mathbb{R}$ que é estável por limites monótonos crescentes, e contém as funções constantes e as contínuas de suporte compacto. Deste modo, poderíamos formular um resultado equivalente ao teorema de Riesz-Markov sem nunca fazer referência direta a σ-álgebras, mensurabilidade e medidas. Tal abordagem se presta a generalizações[6] de resultados da teoria usual da medida, importantes, por exemplo, para os fundamentos matemáticos da Física Quântica.

Para concluir esta seção, daremos um aplicação simples, porém instrutiva e interessante em si, da Proposição 303, da qual depende diretamente o teorema de Riesz-Markov:

Corolário 307 *Para toda $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, $d \in \mathbb{N}$, vale*
$$\int f(x)\lambda^{(d)}(\mathrm{d}x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_d)\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_d \doteq \mathfrak{R}(f) \; ,$$
ou seja, a integral de Lebesgue de f com relação à medida de Lebesgue-Borel $\lambda^{(d)}$ é exatamente a integral de Riemann de f.

Demonstração: Pelo Exercício 216, $\mu_{\mathfrak{R}} = \lambda^{(d)}$. Logo, da Proposição 303 segue a afirmação. ■

[6]Existe uma versão “não comutativa” muito satisfatória da teoria da medida, baseada nas álgebras de von Neumann e seus estados normais.

3 Apêndice

3.1 Noções de topologia em espaços métricos

Definição 308 (espaço métrico) *Seja M um conjunto não vazio qualquer. Dizemos que a função $d : M \times M \to [0, \infty)$ é uma "métrica" em M se esta possui as seguintes propriedades:*

i.) Simetria. *Para todo $p, p' \in M$, vale $d(p, p') = d(p', p)$.*

ii.) Desigualdade triangular. *Para todo $p, p', p'' \in M$, vale*

$$d(p, p'') \leq d(p, p') + d(p', p'') .$$

iii.) Não degenerescência. *Para todo $p, p' \in M$, vale $d(p, p') = 0$ se, e somente se, $p = p'$.*

Neste caso dizemos que o par (M, d) é um "espaço métrico".

Um caso muito importante de espaços métricos é o dos espaços normados:

Definição 309 (espaços normados) *Seja X um espaço vetorial qualquer (real ou complexo). Dizemos que a função $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ é uma "norma" em X se esta tiver as seguintes propriedades:*

i.) Homogeneidade de grau um. *Para todo $x \in X$ e toda constante $\alpha \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$, tem-se $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.*

ii.) Subaditividade. *Para todo $x, x' \in X$, vale*

$$\|x + x'\| \leq \|x\| + \|x'\| \ .$$

iii.) Não degenerescência. *Para todo $x \in X$, vale $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0$.*

Neste caso dizemos que o par $(X, \|\cdot\|)$ é um "espaço normado".

Normas definem naturalmente métricas em espaços vetoriais:

Exercício 310 *Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado e defina a função $d_{\|\cdot\|} : X \times X \to [0, \infty)$ por:*

$$d_{\|\cdot\|}(x, x') \doteq \|x - x'\| \ , \quad x, x' \in X \ .$$

Mostre que $(X, d_{\|\cdot\|})$ é um espaço métrico.

A métrica $d_{\|\cdot\|}$ definida no exercício acima é chamada "métrica associada à norma $\|\cdot\|$". O seguinte exemplo de norma é bem conhecido:

Definição 311 (normas e métricas euclidianas) *Para um $D \in \mathbb{N}$ fixo qualquer, definimos a norma $\|\cdot\|_{\mathrm{e}}$ em $\mathbb{R}^D$ (como espaço vetorial real) por:*

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathrm{e}} \doteq \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_D|^2} \ , \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_D) \in \mathbb{R}^D \ .$$

Esta norma é chamada "norma euclidiana" em $\mathbb{R}^D$. A norma euclidiana nos espaços vetoriais complexos $\mathbb{C}^D$, $D \in \mathbb{N}$, são definidas de modo idêntico. As métricas associadas a estas normas são chamadas "métricas Euclidianas" para $\mathbb{R}^D$ e $\mathbb{C}^D$, $D \in \mathbb{N}$.

A seguir discutimos um exemplo um pouco mais "exótico" de métrica, porém muito importante e bem conhecido:

Definição 312 (distância de Hausdorff) *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer. Definimos uma função $d_{\rm H} : 2^M \times 2^M \to [0, \infty]$ por: $d_{\rm H}(\emptyset, \emptyset) \doteq 0$,*

$$d_{\rm H}(\emptyset, \Omega) = d_{\rm H}(\Omega, \emptyset) \doteq \infty$$

se $\Omega \in 2^M$ é não vazio, isto é, se $\Omega \neq \emptyset$, e, para todo par $\Omega, \Omega' \in 2^M$ de subconjuntos não vazios,

$$d_{\rm H}(\Omega, \Omega') \doteq \max \left\{ \sup_{p \in \Omega} \inf_{p' \in \Omega'} d(p, p'), \sup_{p' \in \Omega'} \inf_{p \in \Omega} d(p, p') \right\} .$$

$d_{\rm H}(\Omega, \Omega')$ é chamada "distância de Hausdorff" entre os subconjuntos $\Omega, \Omega' \in 2^M$.

Exercício 313 *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer. Mostre que a distância de Hausdorff associada a este espaço é simétrica, isto é, que vale*

$$d_{\rm H}(\Omega, \Omega') = d_{\rm H}(\Omega', \Omega) , \quad \Omega, \Omega' \in 2^M ,$$

e que esta satifaz à desigualdade triagular, ou seja, que para todo $\Omega, \Omega', \Omega'' \in 2^M$, tem-se

$$d_{\rm H}(\Omega, \Omega'') \leq d_{\rm H}(\Omega, \Omega') + d_{\rm H}(\Omega', \Omega'') ,$$

com as convenções

$$a \leq \infty \quad e \quad a + \infty = \infty , \quad a \in [0, \infty] .$$

No seguinte exemplo simples vemos que a "métrica de Hausdorff" em 2^M, onde M é um espaço métrico qualquer, é em geral degenerada: Seja $M \doteq \mathbb{R}$ e $d(x, x') \doteq |x - x'|$, $x, x' \in M$. Observe-se que vale

$$d_{\rm H}([-1, 1], (-1, 1)) = 0 ,$$

mesmo os subconjuntos $[-1, 1], (-1, 1) \subseteq M = \mathbb{R}$ não sendo iguais.

Pelo Exercício 322, a métrica de Hausdorff restrita a subconjuntos ditos "fechados", definidos logo abaixo, do respectivo espaço métrico é sempre não degenerada. Portanto, salvo pelo fato de distâncias de Hausdorff poderem ser infinitas, a família dos fechados de um espaço métrico qualquer forma um espaço métrico com respeito à métrica de Hausdorff. Veremos um pouco mais adiante que se os fechados $\Omega, \Omega' \in 2^M$ forem subconjuntos não vazios ditos "compactos" então sempre tem-se $d_{\rm H}(\Omega, \Omega') < \infty$. Logo, a família de tais conjuntos forma um espaço métrico usual, com respeito à distância de Hausdorff. Esta espécie de espaço métrico é importante até mesmo em matemática aplicada (por exemplo, na compressão e processamento de imagens).

Definição 314 (ϵ-vizinhanças) *Seja (M, d) um espaço métrico. Para todo $p \in M$ e todo $\epsilon > 0$, definimos*

$$B_\epsilon(p) \doteq \{p' \in M \ : \ d(p', p) < \epsilon\} \subseteq M ,$$

a chamada "ϵ-vizinhança de p" ou "bola aberta com centro p e raio ϵ".

A seguir discutiremos várias noções importantes em espaços métricos, envolvendo propriedades de ϵ-vizinhanças.

Definição 315 (conjuntos abertos e fechados) *Seja (M, d) um espaço métrico.*

i.) *Dizemos que o conjunto $\Omega \subseteq M$ é "aberto" (em (M, d)), se, para todo $p \in \Omega$, existe um $\epsilon > 0$ tal, que $B_\epsilon(p) \subseteq \Omega$.*

ii.) *Ω é "fechado" (em (M, d)), se seu complemento $\Omega^c \doteq M \setminus \Omega$ for aberto.*

iii.) *A família de todos os abertos em (M, d),*

$$\tau_d \doteq \{O \subseteq M \ : \ O \text{ aberto em } (M, d)\} ,$$

é chamada "topologia de M associada a métrica d".

Exemplo 316 *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer. A desigualdade triangular implica imediatamente que:*

i.) *Para todo $p \in M$ e $\epsilon > 0$, $B_\epsilon(p)$ é aberta em (M, d).*

ii.) *Para todo $p \in M$ e $\epsilon > 0$ a "bola fechada" definida por*

$$\overline{B}_\epsilon(p) \doteq \{p' \in M \ : \ d(p', p) \leq \epsilon\} \subseteq M$$

é fechada em (M, d).

As seguintes propriedades de abertos são muito importantes:

Exercício 317 *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer. Mostre que as seguintes afirmações são verdadeiras:*

i.) *Para toda família de abertos $O_i \in \tau_d$, $i \in I$, a união $\cup\{O_i : i \in I\} \subseteq M$ é um aberto.*

ii.) *Para toda família* finita *de abertos $O_1, \ldots, O_N \in \tau_d$, $N \in \mathbb{N}$, a interseção $O_1 \cap \cdots \cap O_N \subseteq M$ é um aberto.*

Com efeito, no caso de espaços topológicos gerais estas propriedades são axiomas de tais espaços. Note-se que, como subconjuntos fechados são, por definição, complementos de abertos, segue destas propriedades que interseções quaisquer e uniões finitas de fechados são fechadas.

Definição 318 (fecho e interior) *Seja (M, d) um espaço métrico e $\Omega \subseteq M$ um subconjunto qualquer.*

i.)

$$\Omega^\circ \doteq \bigcup_{p \in \Omega, \epsilon > 0 \text{ tais, que } B_\epsilon(p) \subseteq \Omega} B_\epsilon(p) \subseteq \Omega$$

é chamado o "interior" de Ω.

ii.)

$$\overline{\Omega} \doteq ((\Omega^c)^\circ)^c \supseteq \Omega$$

é chamdo o "fecho" de Ω.

Exercício 319 *Seja (M, d) um espaço métrico e $\Omega \subseteq M$ um subconjunto qualquer. Mostre que Ω é aberto se, e somente se, vale $\Omega = \Omega^\circ$, e fechado se, e somente se, $\Omega = \overline{\Omega}$.*

Exercício 320 *Seja (M, d) um espaço métrico e $\Omega \subseteq M$ um subconjunto qualquer. Mostre que Ω° (o interior de Ω) é o maior aberto contido em Ω, e $\overline{\Omega}$ (o fecho de Ω) o menor fechado que contém Ω.*

Definição 321 (conjuntos densos e separabilidade) *Seja (M, d) um espaço métrico e $\Omega, \Omega' \subseteq M$, $\Omega' \subseteq \Omega$, dois subconjuntos subconjunto. Dizemos que Ω' é "denso em Ω" se os fechos de Ω e Ω' coincidem. Dizemos que Ω é separável se existe um subconjunto $\Omega' \subseteq \Omega$* enumerável *que seja denso em Ω.*

Exercício 322 *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer. Mostre que, para todo par de subconjuntos fechados $\Omega, \Omega' \in 2^M$, tem-se que $\Omega = \Omega'$ se, e somente se, $d_{\mathrm{H}}(\Omega, \Omega') = 0$.*

Exercício 323 *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer, $\tilde{M} \subseteq M$ um subconjunto não vazio e $\tilde{d}$ a restrição da métrica d ao subconjunto $\tilde{M}$. Mostre que $(\tilde{M}, \tilde{d})$ é também um espaço métrico e tem-se*

$$\tau_{\tilde{d}} = \{\tilde{M} \cap O \ : \ O \in \tau_d\} \ .$$

Mostre ainda que se $\tilde{M}$ é fechado em M então $C \subseteq \tilde{M}$ é fechado em $(\tilde{M}, \tilde{d})$ se, e somente se, já for fechado em (M, d).

Com muita frequência ocorre que duas métricas diferentes, d_1 e d_2, em um dado conjunto M definem a mesma topologia, isto é, vale $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$. Por exemplo, o seguinte resultado é bem conhecido em Análise:

Teorema 324 *Seja X um espaço vetorial real ou complexo de dimensão finita. Se d_1 e d_2 são duas métricas em X associadas a duas normas quaisquer em X então sempre vale que $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$.*

Dizemos que uma propriedade de espaço métrico é "topológica" se esta não depender dos detalhes da métrica deste espaço, mas somente da topologia definida por esta. Como veremos, este é caso de propriedades importantes como a "convergência" de sequências, a "continuidade" de funções, a "compacidade" de subconjuntos, etc. Em particular, pelo último teorema, em espaços normados de dimensão finita tais propriedades independem totalmente da escolha particular da norma. Há, porém, outras propriedades importantes de espaços métricos que não dependem somente das respectivas topologias mas também de outras propriedades das métricas. Este é o caso, por exemplo, da "completeza" (ou "completude") de espaços métricos.

Definição 325 (funções contínuas) *Sejam (M_1, d_1) e (M_2, d_2) espaços métricos.*

i.) A função $f : M_1 \to M_2$ é dite ser "contínua no ponto $p_1 \in M_1$" (em relação às métricas d_1 e d_2), se, para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ (que pode depender fortemente de p_1) tal, que vale

$$f(B_\delta(p_1)) \subseteq B_\epsilon(f(p_1)) \ .$$

ii.) f é "contínua" se for contínua em todo $p_1 \in M_1$.

iii.) $C(M_1; M_2)$ denotará o conjunto de todas as funções contínuas $M_1 \to M_2$.

iv.) $f \in C(M_1; M_2)$ é dita ser "uniformemente contínua" se, para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal, que, para todo $p_1 \in M_1$,

$$f(B_\delta(p_1)) \subseteq B_\epsilon(f(p_1)) \ .$$

(Ou seja, a constante $\delta > 0$ na parte i.) desta definição só depende de $\epsilon > 0$, mas não de $p_1 \in M_1$.)

Exemplo 326 *Considere-se a métrica (usual) em $\mathbb{R}$ definida por $d(x, x') \doteq |x - x'|$, $x, x' \in \mathbb{R}$.*

i.) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) \doteq x^2$, $x \in \mathbb{R}$, é continua, mas não uniformemente contínua.

ii.) *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) \doteq \operatorname{sen}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, é uniformemente contínua.*

iii.) *Para um espaço normado qualquer $(X, \|\cdot\|)$, a norma $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ é uma função uniformemente contínua.*

Seja M um conjunto qualquer não vazio e X um espaço vetorial (real ou complexo). Sejam $f_1, f_2 : M \to X$ funções quaisquer. Definimos uma nova função $f_1 + f_2 : M \to X$ por:

$$(f_1 + f_2)(p) \doteq f_1(p) + f_2(p) \ , \quad p \in M \ .$$

De modo análogo, para toda função $f : M \to X$ e toda constante (real ou complexa) α, definimos a função $\alpha f : M \to X$ por:

$$(\alpha f)(p) \doteq \alpha(f(p)) \ , \quad p \in M \ .$$

Com estas operações o conjunto de todas as funções $M \to X$ forma, ele mesmo, um espaço vetorial.

Exercício 327 *Seja (M, d) um espaço métrico e $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Mostre que $C(M; X)$ é um subespaço vetorial do espaço de todas as funções $M \to X$, isto é, que $C(M; X)$ é um espaço vetorial com respeito às duas operações definidas logo acima.*

A continuidade de funções pode ser vista, de modo equivalente, como a estabilidade de conjuntos abertos ou fechados com relação à pré-imagem:

Exercício 328 *Sejam (M_1, d_1) e (M_2, d_2) espaços métricos e seja $f : M_1 \to M_2$ uma função. Mostre as três seguintes propriedades de f são equivalentes:*

i.) *f é contínua.*

ii.) *Para todo aberto $O_2 \in \tau_{d_2}$, a pré-imagem*

$$f^{-1}(O_2) \doteq \{p_1 \in M_1 \ : \ f(p_1) \in O_2\} \subseteq M_1$$

é aberta, isto é, vale $f^{-1}(O_2) \in \tau_{d_1}$.

iii.) *Para todo subconjunto fechado $C_2 \subseteq M_2$, tem-se que sua pré-imagem $f^{-1}(C_2) \subseteq M_1$ é fechada.*

O seguinte corolário é uma consequência simples, porém importante, da segunda parte do último exercício:

Corolário 329 *Sejam (M_0, d_0), (M_1, d_1) e (M_2, d_2) espaços métricos, e sejam $f_1 : M_0 \to M_1$ e $f_2 : M_1 \to M_2$ funções contínuas. Então a composição $f_2 \circ f_1 : M_0 \to M_2$, onde $f_2 \circ f_1(p_0) \doteq f_2(f_1(p_0))$, $p_0 \in M_0$, também é contínua.*

Definição 330 (homeomorfismo) *Sejam (M_1, d_1) e (M_2, d_2) espaços métricos. Dizemos que a função $\varphi : M_1 \to M_2$ é um "homeomorfismo entre os espaços métricos (M_1, d_1) e (M_2, d_2)" se esta for bijetora, contínua e sua inversa também for contínua. Dizemos que dois espaços métricos são "homeomórficos" se existir um homeomorfismo entre eles.*

Note-se que se $\varphi : M_1 \to M_2$ é um homeomorfismo então sua inversa $\varphi^{-1} : M_2 \to M_1$ também o é.

O seguinte exercício mostra que os homeomorfismos entre dois espaços métricos são exatamente as funções contínuas bijetoras que identificam (bijetivamente) os abertos destes dois espaços. Por esta razão, dizemos que espaços homeomórficos são "topologicamente equivalentes".

Exercício 331 *Sejam (M_1, d_1) e (M_2, d_2) espaços métricos homeomórficos. Mostre que, para todo homeomorfismo $\varphi : M_1 \to M_2$ a função $O_1 \mapsto \varphi(O_1)$ define uma bijeção $\tau_1 \to \tau_2$. Mostre também que, reciprocamente, toda função contínua bijetora $\varphi : M_1 \to M_2$ tal, que, para todo $O_1 \in \tau_1$, vale $\varphi(O_1) \in \tau_2$, é um homeomorfisimo.*

Definição 332 (isometrias e espaços métricos equivalentes) *Sejam (M_1, d_1) e (M_2, d_2) espaços métricos. Dizemos que a função $\varphi : M_1 \to M_2$ é uma "isometria" se, para todo $p_1, p_1' \in M_1$, vale*

$$d_2(\varphi(p_1), \varphi(p_1')) = d_1(p_1, p_1') \ ,$$

isto é, se esta função preserva distâncias. Dizemos que (M_1, d_1) e (M_2, d_2) são "espaços métricos equivalentes" se existir uma isometria bijetora $M_1 \to M_2$.

Exercício 333 *Mostre que toda isometria entre espaços métricos é contínua e que a inversa de uma isometria bijetora é também uma isometria. Em particular, toda isometria bijetora é um homeomorfismo e espaços métricos equivalentes são sempre homeomórficos.*

Definição 334 (espaços normados equivalentes) *Sejam $(X_1, \|\cdot\|_1)$ e $(X_2, \|\cdot\|_2)$ espaços normados. Dizemos que estes são "espaços normados equivalentes" se existir uma função $\varphi : X_1 \to X_2$ que seja linear, bijetora e preserve a norma, isto é, que seja tal, que, para todo $x_1 \in X_1$, valha*

$$\|\varphi(x_1)\|_2 = \|x_1\|_1 \ .$$

Note-se que se $(X_1, \|\cdot\|_1)$ e $(X_2, \|\cdot\|_2)$ são espaços normados equivalentes então $(X_1, d_{\|\cdot\|_1})$ e $(X_2, d_{\|\cdot\|_2})$ são espaços métricos equivalentes.

Definição 335 (sequências convergentes e de Cauchy) *Seja (M, d) um espaço métrico e seja uma sequência $p_n \in M$, $n \in \mathbb{N}$.*

i.) *$(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma "sequência de Cauchy" se, para todo $\epsilon > 0$, existe um $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal, que, para todo $n, n' \geq N_\epsilon$, vale $d(p_{n'}, p_n) \leq \epsilon$.*

ii.) *Dizemos que a sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é "convergente" se existe um $p \in M$ tal, que, para todo $\epsilon > 0$, existe um $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal, que, para todo $n \geq N_\epsilon$, vale $d(p, p_n) \leq \epsilon$. Neste caso usamos a notação*

$$p = \lim_{n\to\infty} p_n$$

e dizemos que p é o "limite" da sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

iii.) *Seja $\Omega \subseteq M$ um subconjunto não vazio e $p_n \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência convergente. Dizemos que esta "converge em Ω" se vale*

$$\lim_{n\to\infty} p_n \in \Omega \ .$$

iv.) *Sejam subconjuntos $\tilde{\Omega} \subseteq \Omega \subseteq M$. Dizemos que $\tilde{\Omega}$ é "denso" em Ω se, para todo $p \in \Omega$, existir uma sequência convergente $p_n \in \tilde{\Omega}$, $n \in \mathbb{N}$, tal, que valha*

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p \ .$$

Exercício 336 *Seja M um conjunto não vazio qualquer e sejam d_1 e d_2 duas métricas em M tais, que $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$. Seja $p_n \in M$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência qualquer.*

i.) *Mostre que esta sequência é convergente em (M, d_1) se, e somente se, for convergente em (M, d_2) e que, neste caso, os limites coincidem.*

ii.) Mostre que se M é um espaço vetorial e d_1 e d_2 são métricas associadas a normas em M, então $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em (M, d_1) se, e somente se, for também de Cauchy em (M, d_2).

Observação 337

i.) Pela primeira parte do último exercício, a convergência de sequências em espaços métricos é uma propriedade topológica.

ii.) O mesmo não é verdade, em geral, para a propriedade de Cauchy: Existem conjuntos M, métricas d_1 e d_2 em M, $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$, e sequências $p_n \in M$, $n \in \mathbb{N}$, que são de Cauchy em (M, d_1) mas não o são em (M, d_2).

iii.) Pela segunda parte do exercício, a propriedade de Cauchy é uma propriedade topológica para sequências em espaços normados. *Em particular, no caso de espaços de dimensão finita, devido ao Teorema 324, não é necessário especificar a norma com respeito à qual a convergência ou propriedade de Cauchy de sequências é considerada.*

Exercício 338 *Seja (M, d) um espaço métrico e $p_n \in M$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência convergente. Mostre que esta é necessariamente de Cauchy e que seu limite é único.*

Em geral, porém, sequências de Cauchy em espaços métricos não são convergentes. Tal fato motiva a seguinte definição:

Definição 339 (espaços completos e poloneses) *Dizemos que um espaço métrico é "completo" se toda sequência de Cauchy neste espaço for convergente. Espaços normados completos são chamados "espaços de Banach". Um espaço métrico completo é dito ser "polonês" se este for separável.*

Espaços normados de dimensão finita são sempre de Banach:

Teorema 340 (completude de espaços normados de dimensão finita) *Toda sequência de Cauchy em um espaço normado de dimensão finita é convergente.*

Este último teorema é bem conhecido e não o demonstraremos aqui.

Exercício 341 *Mostre que espaço normados de dimensão finita são sempre espaços poloneses.*

Espaços métricos arbitrários não completos podem sempre ser "completados", como mostraremos a seguir, por meio de um argumento bem conhecido e atribuído a Cauchy.

Seja (M, d) um espaço métrico qualquer. Denotar-se-á por $\mathcal{Y}(M, d)$ o conjunto de todas as sequências de Cauchy em (M, d). Dizemos que duas sequências de Cauchy $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}, (p'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são equivalentes se for verdadeiro que

$$\lim_{n\to\infty} d(p_n, p'_n) = 0 \ .$$

Neste caso escrevemos $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (p'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Note-se que $\sim$ define uma relação de equivalência em $\mathcal{Y}(M, d)$ e que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (p'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sempre que $(p'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for subsequência de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Todo $p \in M$ será visto como a sequência constante $(p_n = p)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{Y}(M, d)$. Denotar-se-á por $\bar{M}$ o conjunto $\mathcal{Y}(M, d)/\sim$, isto é, a coleção das classes de equivalência de $\sim$. Observe-se que, para todo $p, p' \in M$, vale $p \sim p'$ em $\mathcal{Y}(M, d)$ se, e somente se, $p = p'$. Deste modo, M será identificado com o subconjunto de $\bar{M}$ das classes de equivalência de sequências constantes.

Definimos a função simétrica $\tilde{d} : \mathcal{Y}(M, d) \times \mathcal{Y}(M, d) \to [0, \infty)$ por

$$\tilde{d}((p_n)_{n\in\mathbb{N}}, (p'_n)_{n\in\mathbb{N}}) \doteq \limsup_{n\to\infty} d(p_n, p'_n) \ .$$

Exercício 342 *Para um espaço métrico qualquer* (M, d)*, mostre que* $\tilde{d} : \mathcal{Y}(M, d) \times \mathcal{Y}(M, d) \to [0, \infty)$ *tem as seguintes propriedades:*

i.) *Para todas sequências* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}, (p'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{Y}(M, d)$ *e* $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}, (q'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{Y}(M, d)$ *tais, que* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(p'_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (q'_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, vale*

$$\tilde{d}((p_n)_{n\in\mathbb{N}}, (p'_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \tilde{d}((q_n)_{n\in\mathbb{N}}, (q'_n)_{n\in\mathbb{N}}) .$$

Em particular, $\tilde{d}((p_n)_{n\in\mathbb{N}}, (p'_n)_{n\in\mathbb{N}}) = 0$ *se* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (p'_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*

ii.) *Para todas sequências* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}, (p'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{Y}(M, d)$*,*

$$\tilde{d}((p_n)_{n\in\mathbb{N}}, (p'_n)_{n\in\mathbb{N}}) = 0$$

somente se $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (p'_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*

iii.) *Para todas sequências* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}, (p'_n)_{n\in\mathbb{N}}, (p''_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{Y}(M, d)$*, tem-se*

$$\tilde{d}((p_n)_{n\in\mathbb{N}}, (p''_n)_{n\in\mathbb{N}}) \leq \tilde{d}((p_n)_{n\in\mathbb{N}}, (p'_n)_{n\in\mathbb{N}}) + \tilde{d}((p'_n)_{n\in\mathbb{N}}, (p''_n)_{n\in\mathbb{N}}) .$$

iv.) *Para toda sequência* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{Y}(M, d)$*, vale*

$$\lim_{N\to\infty} \tilde{d}((p_n = p_N)_{n\in\mathbb{N}}, (p_n)_{n\in\mathbb{N}}) = 0 .$$

Pelo último exercício, existe uma métrica $\bar{d}$ em $\bar{M}$ definida pela condição

$$\bar{d}([(p_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(p'_n)_{n\in\mathbb{N}}]) = \tilde{d}((p_n)_{n\in\mathbb{N}}, (p'_n)_{n\in\mathbb{N}}) , \quad (p_n)_{n\in\mathbb{N}}, (p'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{Y}(M, d) ,$$

onde $[(p_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ e $[(p'_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ denotam, respectivamente, as classes de equivalência das sequências de Cauchy $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(p'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Esta métrica coincide com a métrica original d em $M \subseteq \bar{M}$ e M é denso em $\bar{M}$ (como já sugerido pela própria notação).

Mostraremos a seguir que o espaço métrico $(\bar{M}, \bar{d})$ é completo.

Lema 343 *Para todo espaço métrico* (M, d)*,* $(\bar{M}, \bar{d})$ *é um espaço métrico completo.*

Demonstração: Seja $([(p_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}])_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy qualquer em $(\bar{M}, \bar{d})$. Como $(p'_k)_{k\in\mathbb{N}} \sim (p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ para toda subsequência $(p'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de uma sequência de Cauchy arbitrária $(p_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{Y}(M, d)$, podemos supor, sem restrição à generalidade, que, para todo $n \in \mathbb{N}$, vale

$$d(p_k^{(n)}, p_{k'}^{(n)}) \leq 2^{-\min\{k,k'\}} , \quad k, k' \in \mathbb{N} .$$

Com efeito, toda sequencia de Cauchy $(p_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{Y}(M, d)$ possui uma subsequência $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ que verifica a cota acima. Em particular, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se,

$$\bar{d}([(p_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}], [p_n^{(n)}]) = \tilde{d}((p_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}, p_n^{(n)}) \leq 2^{-n}.$$

De modo análogo, como toda sequência de Cauchy converge se, e somente se, alguma de suas subsequencias converge, podemos também supor que

$$\bar{d}([(p_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}], [(p_k^{(n')})_{k\in\mathbb{N}}]) \leq 2^{-\min\{n,n'\}} , \quad n, n' \in \mathbb{N} .$$

Assim, tem-se que, para todo $n, n' \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} d(p_{n'}^{(n')}, p_n^{(n)}) &= \bar{d}([p_{n'}^{(n')}], [p_n^{(n)}]) \\ &\leq \bar{d}([p_{n'}^{(n')}], [(p_k^{(n')})_{k\in\mathbb{N}}]) + \bar{d}([(p_k^{(n')})_{k\in\mathbb{N}}], [(p_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}]) + \bar{d}([(p_k^{(n)})]_{k\in\mathbb{N}}, [p_n^{(n)}]) \\ &\leq 2^{-n'} + 2^{-\min\{n,n'\}} + 2^{-n} \leq 2^{2-\min\{n,n'\}} \ . \end{aligned}$$

Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \bar{d}([(p_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}], [(p_k^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}]) &\leq \bar{d}([(p_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}], [p_n^{(n)}]) + \bar{d}([p_n^{(n)}], [(p_k^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}]) \\ &= 2^{-n} + \tilde{d}(p_n^{(n)}, (p_k^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}) \\ &\leq 2^{-n} + \sup_{k\geq n} d(p_n^{(n)}, p_k^{(k)}) \leq 2^{-n} + 2^{2-n} \end{aligned}$$

e, portanto, a sequência $([(p_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}])_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $[(p_k^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}]$ em $(\bar{M}, \bar{d})$. □

Definição 344 (completamento de um espaço métrico) *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer, não necessariamente completo. Dizemos que o espaço métrico $(\bar{M}, \bar{d})$ é um "completamento" de (M, d) se $M \subseteq \bar{M}$ é denso em $\bar{M}$, a métrica $\bar{d}$ coincide com d em M, e $(\bar{M}, \bar{d})$ é completo.*

Pela discussão acima, todo espaço métrico possui um completamento. Este é único até isomorfismo de espaços métricos:

Proposição 345 (existência e unicidade do completamento) *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer, não necessariamente completo. Então existe um espaço métrico $(\bar{M}, \bar{d})$ completo tal, que $M \subseteq \bar{M}$ é denso em $\bar{M}$ e a métrica $\bar{d}$ coincide com d em M. Isto é, (M, d) possui um completamento. $(\bar{M}, \bar{d})$ é único até uma equivalência de espaços métricos, ou seja, se um segundo espaço métrico completo $(\bar{M}', \bar{d}')$ também é completamento de (M, d) então existe uma isometria bijetora $\varphi : \bar{M}' \to \bar{M}$. Neste caso, φ pode ser escolhida tal, que $\varphi(p) = p$ para todo $p \in M \subseteq \bar{M}' \cap \bar{M}$.*

Demonstração: Exercício.

Exercício 346 *Mostre que se M é um espaço vetorial e d a métrica associada a uma norma $\|\cdot\|$ em M então o completamento $(\bar{M}, \bar{d})$ de (M, d) pode ser escolhido tal, que também $\bar{M}$ é um espaço vetorial, M um subespaço vetorial de $\bar{M}$ e $\bar{d}$ a métrica associada a uma norma $\|\cdot\|^{\sim}$em $\bar{M}$. Neste caso dizemos que $(\bar{M}, \|\cdot\|^{\sim})$ é um "completamento de espaço normado" para $(M, \|\cdot\|)$. Demostre também que dois completamentos de um espaço normado para $(M, \|\cdot\|)$ são necessariamente espaços normados equivalentes.*

De modo alternativo às Definições 315 (ii) e 325, é possível definir conjuntos fechados e funções contínuas em termos de convergência de sequências:

Exercício 347

i.) *Seja (M, d) um espaço métrico, $\Omega \subseteq M$ um subconjunto fechado e $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de Ω, convergente em (M, d). Mostre que esta sequência converge em Ω.*

ii.) *Sejam (M_1, d_1) e (M_2, d_2) dois espaços métricos e $f : M_1 \to M_2$ uma função contínua no ponto $p_1 \in M_1$. Mostre que, para toda sequência $(p'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente em (M_1, d_1) tal, que $\lim_{n\to\infty} p'_n = p_1$, tem-se que a sequência (imagem) $(f(p'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge em (M_2, d_2) e vale*

$$\lim_{n\to\infty} f(p'_n) = f(p_1) \ .$$

Com efeito, as condições no último exercício para conjuntos serem fechados e funções serem contínuas não são somente necessárias, mas são também suficientes:

Teorema 348

i.) *Seja (M, d) um espaço métrico e $\Omega \subseteq M$ um subconjunto não vazio. Ω é fechado se, e somente se, para toda sequência $p_n \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, que converge em (M, d), vale $\lim_{n\to\infty} p_n \in \Omega$, isto é, tal sequência converge em Ω.*

ii.) *Sejam (M_1, d_1) e (M_2, d_2) dois espaços métricos e $f : M_1 \to M_2$ uma função. Esta é contínua no ponto $p_1 \in M_1$ se, e somente se, para toda sequência $(p'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente em (M_1, d_1) tal, que $\lim_{n\to\infty} p'_n = p_1$, a sequência (imagem) $(f(p'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge em (M_2, d_2) e vale*

$$\lim_{n\to\infty} f(p'_n) = f(p_1) \ .$$

Exercício 349 *Seja (M, d) um espaço métrico e $\Omega \subseteq M$ um subconjunto qualquer. Mostre que o fecho de Ω é dado por:*

$$\overline{\Omega} = \{p \in M \ : \ p = \lim_{n\to\infty} p_n \textit{ para uma seq. } p_n \in \Omega,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Conclua desta igualdade que Ω é denso em $\overline{\Omega}$. Mostre que se $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço normado e $\tilde{X} \subseteq X$ um subespaço vetorial então o fecho de $\tilde{X}$ também é um subespaço vetorial de X.

Exercício 350 *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer e $\tilde{M} \subseteq M$ um subconjunto não vazio. Recorde-se que a restrição da métrica d a $\tilde{M}$ definine um novo espaço métrico $(\tilde{M}, \tilde{d})$. (Ver Exercício 323.) Suponha que (M, d) é completo. Mostre que se $\tilde{M}$ é fechado então também $(\tilde{M}, \tilde{d})$ é completo. Mostre, de modo mais geral, que o completamento de $(\tilde{M}, \tilde{d})$ pode ser identificado com o fecho de $\tilde{M}$ munido da restrição da métrica d a este fecho.*

Definição 351 (subsequências) *Seja M um conjunto não vazio qualquer e sejam duas sequências $p_n, p'_n \in M$, $n \in \mathbb{N}$, Dizemos que $(p'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma "subsequência" da sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se existe uma função $k \mapsto n_k$* estritamente crescente *tal, que, para todo $k \in \mathbb{N}$, vale $p'_k = p_{n_k}$. Ou seja, $(p'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a sequência que se obtém a partir da sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eliminado-se os pontos p_n com índice $n \in \mathbb{N}$ fora do conjunto*

$$\{n_k \ : \ k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N} \ .$$

Notação: "$(p_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$" denota uma subsequência genérica da sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

As seguintes propriedades simples de subsequências são bastante úteis:

Exercício 352 *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer.*

i.) *Mostre que toda subsequência de uma sequência de Cauchy em (M, d) é também uma sequência de Cauchy em (M, d).*

ii.) *Mostre que toda subsequência de uma sequência convergente em (M, d) é também uma sequência convergente e tem o mesmo limite da primeira sequência.*

iii.) *Mostre que se uma sequência de Cauchy em (M, d) possui uma subsequência que converge em (M, d) então também é convergente.*

Definição 353 (subconjuntos compactos) *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer. O subconjunto não vazio $\Omega \subseteq M$ é dito ser "(sequencialmente) compacto", se toda sequência $p_n \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, possuir uma subsequência que converge em Ω. Se toda sequência $p_n \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, possuir uma subsequência que converge em M, mas não necessariamente em Ω, então Ω é "relativamente compacto".*

A compacidade e a compacidade relativa de um subconjunto de um espaço métrico (M, d) são propriedades topológicas, isto é, dependem somente da topologia τ_d, e não de outras propriedades da métrica d, já que se referem somente à convergência de subsequências, que é uma propriedade topológica, como já comentado acima.

Exemplo 354 *O subconjunto $\Omega \doteq (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ (com a métria usual) não é compacto: A sequência (de Cauchy) $x_n \doteq 1/n \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, não possui subsequência que seja convergente em Ω. Com efeito, todas as subsequências de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem como limite o ponto $0 \notin \Omega$.*

O seguinte exercío implica que $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ é, ao menos, um conjunto relativamente compacto:

Exercício 355 *Mostre que o subconjunto $\Omega \doteq [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ é compacto em $(\mathbb{R}, d)$, onde a métrica d é definida por: $d(x, x') \doteq |x - x'|$, $x, x' \in \mathbb{R}$.*

Sugestão: Para uma sequência $x_n \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, arbitrária fixa, defina intervalos $\mathcal{I}_k \subseteq \Omega$, $k \in \mathbb{N}$, tais, que:

i.) $\mathcal{I}_{k+1} \subseteq \mathcal{I}_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

ii.) $\mathcal{I}_k$, $k \in \mathbb{N}$, tem comprimento 2^{-k}.

iii.) Para todo $k \in \mathbb{N}$, existem *infinitos* $n \in \mathbb{N}$ tais, que $x_n \in \mathcal{I}_k$.

Por construção, existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal, que, para todo $k \in \mathbb{N}$, vale $x_{n_k} \in \mathcal{I}_k$. Note-se que tal subsequência é uma sequência de Cauchy.

Com efeito, obviamente, todo subconjunto de um subconjunto compacto é relativamente compacto. O seguinte exercício enuncia um espécie de recíproca desta afirmação:

Exercício 356 *Mostre que o fecho de um subconjunto relativamente compacto de uma espaço métrico arbitrário é um subconjunto compacto dete espaço.*

Observe-se ainda que há uma relação importante entre compacidade e completeza:

Exercício 357 *Seja (M, d) um espaço métrico compacto. Mostre que este espaço é necessariamente completo.*

No que segue discutiremos uma definição equivalente de compacidade em espaços métricos que não faz referência direta à métrica, mas somente à topologia destes espaços. Recorde-se que a compacidade é uma propriedade topológica.

Seja (M, d) um espaço métrico e $\Omega \subseteq M$ um subconjunto qualquer. Dizemos que a família de subconjuntos $O_i \subseteq M$, $i \in I$, é um "recobrimento aberto" de Ω se vale

$$\Omega \subseteq \cup\{O_i : i \in I\}$$

e $O_i \in \tau_d$ (isto é, O_i é aberto) para todo $i \in I$. A compacidade de subconjuntos pode ser caracterizada pela seguinte propriedade de recobrimentos abertos:

Exercício 358 *Seja (M, d) um espaço métrico e $\Omega \subseteq M$ um subconjunto. Suponha que, para todo recobrimento aberto de Ω, $O_i \in \tau_d$, $i \in I$, existe um subconjunto* finito *de índices $J \subseteq I$ tal, que vale*

$$\Omega \subseteq \cup\{O_j : j \in J\} .$$

Mostre que Ω é compacto.

Sugestão: Use a seguinte adaptação da sugestão dada para o exercício anterior:

1. Por simplicidade e sem perda de generalidade, suponha que (M, d) é um espaço métrico completo. Com efeito, se (M, d) não fosse completo então poder-se-ia utilizar o completamento deste espaço métrico: Pelo Exercício 323, Ω tem a propriedade de recobrimento acima também no completamento de (M, d).

2. Mostre que Ω é necessariamente fechado.

3. Considere, para todo $m \in \mathbb{N}$, o recobrimento aberto de Ω dado por $B_{1/m}(p)$, $p \in \Omega$.

4. Mostre que, para uma sequência qualquer $x_n \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, existem subsequências $(x^{(m)}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ desta e pontos $p_m \in \Omega$ tais, que $x^{(m)}_{n_k} \in B_{1/m}(p_m)$, $k \in \mathbb{N}$, e, para todo $m \in \mathbb{N}$, $(x^{(m+1)}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é subsequência de $(x^{(m)}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

5. Considere a "sequência diagonal" $(x^{(k)}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Pelo último exercício, a propriedade dos recobrimentos abertos dada acima para subconjuntos de um espaço métrico é uma condição suficiente para a compacidade destes. Demonstraremos no final desta seção que esta propriedade é também uma condição necessária para a compacidade em espaços métricos. Com efeito, para espaços topológicos gerais esta propriedade de recobrimentos é a *definição* de compacidade, enquanto a Definição 353 se refere à propriedade de "compacidade sequencial". Assim, em espaços métricos a compacidade e a compacidade sequencial são propriedades equivalentes. O mesmo não é verdade em espaços topológicos gerais.

A propriedade de recobrimentos abertos acima é equivalente à seguinte propriedade de subconjuntos fechados:

Lema 359 (propriedade da interseção finita de fechados) *Seja (M, d) um espaço métrico. As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) Para todo $O_i \in \tau_d$, $i \in I$, recobrimento aberto de M, existe um subconjunto finito *de índices $J \subseteq I$ tal, que vale*

$$M = \cup\{O_j : j \in J\} .$$

ii) Para toda família de subconjuntos fechados $F_i \subseteq M$, $i \in I$, tal, que para todo subconjunto finito *de índices $J \subseteq I$, vale*

$$\cap\{F_j : j \in J\} \neq \emptyset ,$$

tem-se que

$$\cap\{F_i : i \in I\} \neq \emptyset .$$

Demonstração:

1. Suponha que i.) é verdadeira e considere uma família de fechados como em ii.). Se valesse

$$\cap\{F_i : i \in I\} = \emptyset$$

então teríamos:

$$M = \emptyset^c = (\cap\{F_i : i \in I\})^c = \cup\{F_i^c : i \in I\} .$$

Ou seja, $F_i^c \in \tau_d$, $i \in I$, seria um recobrimento aberto de M. Note-se que complementos de subconjuntos fechados são abertos.

2. Neste caso, por i.), existe um $J \subseteq I$ finito tal, que

$$M = \cup\{F_j^c : j \in J\} .$$

Disto concluímos que

$$\emptyset = (\cup\{F_j^c : j \in J\})^c = \cap\{F_j : j \in J\} .$$

3. Isto contradiz uma propriedade da família $F_i \subseteq M$, $i \in I$. Portanto, i) implica ii.).

4. A demonstração da implicação oposta é similar.

Em aplicações, a compacidade de conjuntos é muito comumente utilizada sob a forma da segunda afirmação do último lema.

A seguir discutiremos diversas propriedades de subconjuntos de espaços métricos e de funções entre tais espaços, relacionadas à compacidade.

Definição 360 (subconjuntos limitados) *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer. Dizemos que o subconjunto $\Omega \subseteq M$ é "limitado" em (M, d) se para alguma constante $C < \infty$, tem-se que, para todo $p, p' \in \Omega$, vale $d(p, p') \leq C$.*

De modo equivalente, $\Omega \subseteq M$ é limitado se, e somente se, para todo $p \in M$, existe um $R_p < \infty$ tal, que $\Omega \subseteq B_{R_p}(p)$.

Exercício 361 *Mostre que a propriedade de ser limitado para um subconconjunto de um espaço métrico não é uma propriedade topológica. Isto é, demonstre que existe um conjunto M, um subconjunto $\Omega \subseteq M$ e duas métricas, d e d', em M tais, que $\tau_d = \tau_{d'}$ e Ω é limitado em (M, d), mas não o é em (M, d').*

As seguintes propriedades de compactos são muito importantes:

Exercício 362 *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer.*

i.) *Mostre que todo subconjunto compacto $\Omega \subseteq M$ é necessariamente fechado e limitado.* Sugestão*: Para provar que todo compacto é fechado, use o critério do Teorema 348 (i) e o item (iii) do Exercício 352.*

ii.) *Seja $K \subseteq M$ compacto e $\Omega \subseteq K$ fechado. Mostre que Ω é também compacto.* Sugestão*: Use o critério do Teorema 348 (i).*

A primeira parte do último exercício tem a seguinte consequência importante para a métrica de Hausdorff:

Exercício 363 *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer e seja $\mathcal{K}(M, d)$ o conjunto de todos os subconjuntos compactos não vazios de M. Mostre que, para todo, $\Omega, \Omega' \in \mathcal{K}(M, d)$, vale $d_{\mathrm{H}}(\Omega, \Omega') < \infty$. Em particular, $(\mathcal{K}(M.d), d_{\mathrm{H}})$ é um espaço métrico.*

A compacidade é herdada na construção de Hausdorff:

Teorema 364 *Se (M, d) é um espaço métrico compacto então $(\mathcal{K}(M, d), d_{\mathrm{H}})$ também o é.*

O último teorema é bem conhecido na teoria de espaços métricos e não o demonstraremos aqui, pois é dado somente como complemento e não intervirá no que segue. Recorde-se aqui que espaços métricos compactos são automaticamente completos. Em particular, pelo teorema do ponto fixo de Banach, se a transformação $\varphi : \mathcal{K}(M, d) \to \mathcal{K}(M, d)$ é uma contração uniforme em $(\mathcal{K}(M, d), d_{\mathrm{H}})$ então esta possui um ponto fixo único. Note-se que é por intermédio desta observação que muitos conjuntos ditos "fractais" são definidos e estudados.

Definição 365 (propriedade de Heine-Borel) *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer. Dizemos que este espaço tem a "propriedade de Heine-Borel" se todo subconjunto fechado e limitado deste espaço for compacto, isto é, se vale a recíproca da primeira parte do Exercício 362.*

Nem todo espaço métrico possui a propriedade de Heine-Borel:

Exercício 366 *Seja o espaço métrico (M, d), onde $M \doteq \mathbb{Q}$ e $d(x, x') \doteq |x - x'|$, $x, x' \in M$. Mostre que existe um subconjunto deste espaço que é fechado e limitado, porém não compacto. Isto é, (M, d) não tem a propriedade de Heine-Borel.*

Pelo Exercício 362, todo espaço métrico compacto possui a propriedade de Heine-Borel. Um outro exemplo muito importante de espaços métricos com esta propriedade é o dos espaços normados de dimensão finita:

Teorema 367 (Bolzano-Weierstrass) *Todo espaço normado de dimensão finita possui a propriedade de Heine-Borel, a saber, todo subconjunto não vazio em um tal espaço é compacto se, e somente se, for fechado e limitado.*

O último teorema será provado, em exercício logo abaixo, para um caso especial.

Um outro fato muito importante a respeito de conjuntos compactos, é que a imagem destes através de uma função contínua é também compacta:

Lema 368 *Sejam (M_1, d_1) e (M_2, d_2) dois espaços métricos e $f : M_1 \to M_2$ uma função contínua. Para todo subconjunto $\Omega_1 \subseteq M_1$ compacto em (M_1, d_1), a imagem $f(\Omega_1) \subseteq M_2$ é compacta em (M_2, d_2).*

Demonstração: Seja $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência arbitrária no conjunto imagem $f(\Omega_1) \subseteq M_2$. Então existe uma sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\Omega_1 \subseteq M_1$ tal, que $q_n = f(p_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Como Ω_1 é compacto, existe uma subsequência $(p_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge em Ω_1. Pelo Teorema 348 (ii), a subsequência $q_{n_k} \doteq f(p_{n_k}) \in f(\Omega_1)$, $k \in \mathbb{N}$, converge em M_2 e tem-se

$$\lim_{k\to\infty} q_{n_k} = \lim_{k\to\infty} f(p_{n_k}) = f\left(\lim_{k\to\infty} p_{n_k}\right) \in f(\Omega_1) \; .$$

□

Observe-se que a recíproca do último lema não é verdadeira. O lema tem diversas consequências importantes, como, por exemplo, a seguinte propriedade importante de funções com domínio compacto:

Exercício 369 *Sejam* (M_1, d_1) *e* (M_2, d_2) *dois espaços métricos,* M_1 *compacto, e* $f : M_1 \to M_2$ *uma função contínua bijetora. Mostre que a inversa de* f *é também contínua. Em particular, funções* $M_1 \to M_2$ *bijetoras contínuas são sempre homeomorfismos.*

Sugestão: Utilize o fato de que uma função é contínua se, e somente se, as pré-imagens de fechados através desta função são sempre fechadas.

Exercício 370 *Prove o teorema de Bolzano-Weierstrass para* $(\mathbb{R}, d)$*, onde a métrica* d *é a usual, definida por:* $d(x, x') \doteq |x - x'|$, $x, x' \in \mathbb{R}$.

Sugestão: Proceda da seguinte forma:

1. Usando o Exercício 355 e o Lema 368 para funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas adequadas, mostre que, para todo $L > 0$, $[-L, L] \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto compacto.

2. Pelo Exercício 362 (ii), conclua que todo conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ limitado e fechado é compacto.

Uma propriedade conveniente de espaços métricos compactos, entre várias outras, é a de que a continuidade de funções cujo domínio são tais espaços é equivalente à continuidade uniforme das mesmas:

Proposição 371 *Sejam* (M_1, d_1) *e* (M_2, d_2) *dois espaços métricos, sendo o primeiro compacto. Uma função* $f : M_1 \to M_2$ *é uniformemente contínua se, e somente se, for contínua.*

Demonstração:

1. Como toda função uniformemente contínua é contínua, basta provar que toda função contínua $f : M_1 \to M_2$ é automaticamente uniformemente contínua. Seja então f contínua e suponha que esta função não é uniformemente contínua. Então[7] existe um $\tilde{\epsilon} > 0$ tal, que, para todo $\tilde{\delta} > 0$, existem $p_{\tilde{\delta}}, p'_{\tilde{\delta}} \in M_1$, $d_1(p_{\tilde{\delta}}, p'_{\tilde{\delta}}) < \tilde{\delta}$, tais, que vale
$$d_2(f(p_{\tilde{\delta}}), f(p'_{\tilde{\delta}})) > \tilde{\epsilon} \,. \tag{1}$$

2. Seja $\tilde{\delta}_n \doteq 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, e considere as sequências
$$p_n \doteq p_{\tilde{\delta}_n} \in M_1 \,, \quad p'_n \doteq p'_{\tilde{\delta}_n} \in M_1 \,,$$
$n \in \mathbb{N}$. Como M_1 é compacto, existe uma subsequência $(p_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge em $(M_1 \,, d_1)$. Devido à escolha $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}_{n_k}$, a (sub)sequência $(p'_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ também converge e tem o mesmo limite que $(p_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$:
$$p \doteq \lim_{k\to\infty} p_{n_k} = \lim_{k\to\infty} p'_{n_k} \,.$$

3. Como f é contínua, o Teorema 348 (ii) implica então que
$$\lim_{k\to\infty} f(p_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(p'_{n_k}) = f(p) \,.$$
Em particular, vale
$$\lim_{k\to\infty} d_2(f(p_{n_k}), f(p'_{n_k})) = 0 \,,$$
o que contradiz (1) com $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}_{n_k}$ para um $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Portanto, por absurdo, f é necessariamente uniformemente contínua.

[7]Note-se que a negação de uma sentença do tipo "para todo x vale P" é a snetença "existe um x tal, que não vale P". Reciprocamente, a negação de uma sentença do tipo "existe um x tal, que vale P" é a sentemça "para todo x não vale P". Consequentemente, para negar uma sentença que consiste em vários "para todo" e "existe um" diante de uma proposição "P" devemos trocar todos os "para todo" por "existe um", todos os "existe um" por "para todo", e em seguida negar "P".

□

Demonstraremos a seguir mais algumas propriedades importantes de subconjuntos compactos de espaços métricos, que serão usadas para na demonstração de que subconjuntos compactos têm a propriedade de recobrimentos abertos enunciada no Exercício (358).

Definição 372 (subconjuntos totalmente limitados) *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer. Dizemos que o subconjunto $\Omega \subseteq M$ é "totalmente limitado" em (M, d) se, para todo $\varepsilon > 0$, Existe um subconjunto $\Omega_\varepsilon \subseteq M$* finito *tal, que vale*

$$\Omega \subseteq \cup\{B_\varepsilon(p) : p \in \Omega_\varepsilon\} .$$

Note-se que subconjuntos totalmente limitados são necessariamente limitados, mas a recíproca não é verdadeira em geral.

Lema 373 *Todo subconjunto compacto em um espaço métrico é totalmente limitado.*

Demonstração: Seja $\Omega \subseteq M$ um subconjunto compacto no espaço métrico (M, d).

1. Suponha que este subconjunto não[8] seja totalmente limitado. Então existe um $\varepsilon > 0$ tal, que para todo subconjunto finito $\widetilde{\Omega} \subseteq \Omega$, existe um $p \in \Omega$ tal, que

$$p \notin \cup\{B_\varepsilon(p) : p \in \widetilde{\Omega}\} .$$

2. Devido a 1., podemos encontrar uma sequência $p_n \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, tal, que, para todo $n \in \mathbb{N}$, vale

$$d(p_n, p_{n-1}), d(p_n, p_{n-2}), \ldots , d(p_n, p_2), d(p_n, p_1) \geq \varepsilon .$$

   Para tanto, use-se um princípio de indução.

3. Uma sequência como em 2. não possui, por construção, subsequências convergentes. Ou seja, neste caso Ω não é compacto. Logo, Ω é totalmente limitado se for compacto.

□

Em espaços métricos completos vale a recíproca do último lema:

Exercício 374 *Seja (M, d) um espaço métrico completo. Prove que todo subconjunto totalmente limitado neste espaço é (sequencialmente) compacto.*

Sugestão: Adapte os passos 3.-5. da sugestão de resolução do Exercício 358.

Definição 375 (número de Lebesgue de um recobrimento) *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer. Seja $O_i \in \tau_d$, $i \in I$, um recobrimento aberto de um dado subconjunto $\Omega \subseteq M$. Dizemos que a constante $\lambda > 0$ é um "número de Lebesgue" para este recobrimento se, para todo $p \in \Omega$, existe $i_p \in I$ tal, que vale $B_\lambda(p) \subseteq O_{i_p}$.*

Lema 376 *Para todo recobrimento aberto de um subconjunto compacto em um espaço métrico qualquer existe um número de Lebesgue $\lambda > 0$.*

Demonstração: Seja $\Omega \subseteq M$ um subconjunto compacto no espaço métrico (M, d).

[8] Note-se que, logicamente, provar uma implicação do tipo "se vale P então vale Q" é o mesmo que provar que "se não vale Q então não vale P".

1. Seja $O_i \in \tau_d$, $i \in I$, um recobrimento aberto de Ω e suponha que não exista um número de Lebesgue $\lambda > 0$ para este recobrimento. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $p_n \in \Omega$ tal, que, para todo $i \in I$, tem-se $B_{1/n}(p_n) \nsubseteq O_i$.

2. Como Ω é compacto, existe uma subsequência $(p_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge em Ω. Seja $p \in \Omega$ o limite desta. Como $O_i \in \tau_d$, $i \in I$, é recobrimento de Ω, existe $i_p \in I$ tal, que $p \in O_{i_p}$. Como O_{i_p} é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal, que $B_\varepsilon(p) \subseteq O_{i_p}$.

3. Como $d(p_{n_k}, p)$ e $1/n_k$ tendem a zero quando $k \to \infty$, segue, pela desigualdade do triângulo, que $B_{1/n_k}(p_{n_k}) \subseteq B_\varepsilon(p)$ para $k \in \mathbb{N}$ suficiente grande. Mas tal conclusão contradiz a propriedade que define a sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Logo, existe um número de Lebesgue $\lambda > 0$ para o recobrimento aberto $O_i \in \tau_d$, $i \in I$, do subconjunto Ω.

$\square$

Proposição 377 *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer. Um subconjunto $\Omega \subseteq M$ é compacto se, e somente, se, para todo recobrimento aberto de Ω, $O_i \in \tau_d$, $i \in I$, existir um subconjunto finito $J \subseteq I$ de índices tal, que vale*

$$\Omega \subseteq \cup\{O_j : j \in J\} .$$

Demonstração: Já foi provado em exercício que todo subconjunto de um espaço métrico com a propriedade acima para recobrimentos abertos é sempre compacto. Suponha então que $\Omega \subseteq M$ seja compacto e seja $O_i \in \tau_d$, $i \in I$, um recobrimento aberto de Ω. Provamos acima que existe um número de Lebesgue, $\lambda > 0$, para este recobrimento. Como subconjuntos compactos de espaços métricos são totalmente limitados, existe um subconjunto finito $\Omega_\lambda \subseteq \Omega$ tal, que

$$\Omega \subseteq \cup\{B_\lambda(p) : p \in \Omega_\lambda\} .$$

Pela definição de número de Lebesgue, para todo $p \in \Omega_\lambda$, existe $i_p \in I$ tal, que $B_\lambda(p) \subseteq O_{i_p}$. Em particular, $J \doteq \{i_p : p \in \Omega_\lambda\} \subseteq I$ é um subconjunto finito de índices tal, que

$$\Omega \subseteq \cup\{O_j : j \in J\} .$$

$\square$

Exercício 378 *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer. Mostre que toda união* finita *e toda interseção arbitrária de subconjuntos compactos deste espaço é um subconjunto compacto.*