1

Denotemos $B_\epsilon(\boldsymbol{x}) := \{\boldsymbol{y} : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \leq \epsilon\}$. Um ponto $\boldsymbol{x}^*$ é dito *minimizador local* de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sujeita a $\boldsymbol{x} \in X$ quando existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\boldsymbol{x} \in B_\epsilon(\boldsymbol{x}^*) \cap X$ tenhamos

$$f(\boldsymbol{x}^*) \leq f(\boldsymbol{x}).$$

Defina adequadamente *minimizador global*, e os conceitos correspondentes de *maximizador* local e global e prove que a tarefa de maximização pode ser reduzida à de minimização.

2

Mostre que se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é crescente, então um minimizador de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ também é minimizador de $g \circ f$. Mostre que se g é estritamente crescente, então $\boldsymbol{x}^*$ é um minimizador de f se e somente se $\boldsymbol{x}^*$ é um minimizador de $g \circ f$. Encontre um exemplo que mostra que se g não for estritamente crescente, mesmo que seja não-decrescente, então um minimizador de $f \circ g$ pode não ser minimizador de f.

3

Prove que um minimizador $\boldsymbol{x}^*$ de uma função diferenciável $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ satisfaz $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$.

4

Dizemos que o gradiente ∇f de uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é Lipschitz quando existe $L > 0$ tal que, para quaisqer, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, vale

$$\|\nabla f(\boldsymbol{x}) - \nabla f(\boldsymbol{y})\| \leq L\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|.$$

Encontre um exemplo de função com gradiente Lipschitz e um exemplo com gradiente que não é Lipschitz.

5

Calcule o gradiente e a hessiana da função de quadrados mínimos $f(\boldsymbol{x}) = \|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2^2$.

6

Prove que se um ponto $\boldsymbol{x}^*$ satisfaz, para uma função duas vezes diferenciável $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$ e possui $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^*)$ definida positiva, então $\boldsymbol{x}^*$ é minimizador local de f.

7

Considere o problema de minimizar $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ sujeito a $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ onde $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$. Suponha que $\boldsymbol{x}^0$ é tal que $A\boldsymbol{x}^0 < \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{x}^0 > \boldsymbol{0}$. Prove que $\boldsymbol{x}^0$ não pode ser um minimizador do problema. Dica: observe que se as desigualdades são satisfeitas, então existe um ponto da forma $\boldsymbol{x}^0 - \lambda c$ com $\lambda > 0$ que ainda satisfaz as restrições e que tem valor de função objetivo menor do que $\boldsymbol{x}^0$.

8

Dizemos que $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$ é uma direção de descida para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a partir de $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ quando existe $\Lambda > 0$ tal que para todo $\lambda \in (0, \Lambda]$ temos

$$f(\boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{d}) < f(\boldsymbol{x}).$$

Prove que se f é diferenciável em $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{d}^T \nabla f(\boldsymbol{x}) < 0$, então $\boldsymbol{d}$ é uma direção de descida.

9

Mais que isso, seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável em $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\boldsymbol{d}^T \nabla f(\boldsymbol{x}) < 0$. Prove que para qualquer $\sigma \in [0, 1)$ fixo, existe $\Lambda > 0$ tal que para todo $\lambda \in (0, \Lambda]$ temos:

$$f(\boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{d}) < f(\boldsymbol{x}) + \sigma \lambda \boldsymbol{d}^T \nabla f(\boldsymbol{x}).$$

10

Considere a sequência $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ gerada por

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} - \lambda_k \nabla f(\boldsymbol{x}^{(k)})$$

onde λ_k é um minimizador de $g(\lambda) := f\big(\boldsymbol{x}^{(k)} - \lambda_k \nabla f(\boldsymbol{x}^{(k)})\big)$ restrita a $\lambda \in [0, \infty)$. Prove que quaisquer duas sucessivas direções tomadas pelo método são ortogonais entre si.

11

Exercícios de revisão (a partir da página 8) do linvro da Ana Friedlander (selecione os interessantes, ou seja, os que você tem mais dúvidas).

12

Exercícios 2.1-2.9 do livro da Ana Friedlander.

13

Exercícios 4.2-4.6 do livro da Ana Friedlander.