<u>Primeira Lista de Mecânica Quântica: 17/8/23</u>

<u>Griffiths, Capítulo I</u>

1. Esteja seguro de entender os desenvolvimentos que nos levaram às seguintes relações:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j} \qquad\qquad m\frac{d}{dt}\langle x\rangle = \langle p\rangle \qquad\qquad \frac{d}{dt}\langle p\rangle = \langle -\frac{\partial V}{\partial x}\rangle$$

2. Uma função $f(x)$ é dita autofunção de um operador A se $Af(x) = af(x)$, onde a é uma constante denominada autovalor de A. Mostre que uma onda plana, $e^{i(kx-\omega t)}$, é autofunção do operador momento linear com autovalor $\hbar k$.

3. Considere que as funções de onda $\psi_n(x,t)$, $n = 1, 2, ..., N$ satisfaçam a Eq. de Schrödinger. Mostre que qualquer combinação linear das mesmas, $\sum_n c_n\psi_n(x,t)$, com c_n constantes, também satisfaz essa equação. Isso se deve à linearidade dessa equação, uma característica necessária para garantir o princípio de superposição.

4. A normalização da função de onda exige que $\int \psi^*(x,t)\psi(x,t)dx = cte$, o que assegura que a probabilidade total de achar a partícula é uma constante. Mostre, utilizando a Eq. de Schödinger dependente do tempo para um potencial $V(x,t)$, que de fato *cte* independe do tempo, validando assim escolhê-la constante, usualmente a unidade.

5. Mostre que para quaisquer duas soluções (normalizáveis) da Eq. de Schr. temos

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(x,t)^*\psi_2(x,t)dx = 0 \ .$$

   Este resultado engloba o anterior.

6. Considere a função $\psi(x,0) = A(a^2 - x^2)$ no intervalo $-a \le x \le a$ e $\psi(x,0) = 0$ caso contrário, com A e a constantes. Se ela representa a função de onda em $t = 0$ de uma partícula em movimento unidimensional, qual a unidade de ψ? Determine a constante de normalização A.

7. Calcule a corrente de probabilidade correspondente à função de onda (partícula livre) $\psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$. Expresse em termos da velocidade $v = p/m = \hbar k/m$

e $|A|^2$. Compare essa expressão com a corrente de cargas q num fio cujos portadores tem velocidade v e densidade volumétrica n. Que grandeza faz o papel do produto nq?

8. Determine a corrente de probabilidade nos seguintes casos: (a) função de onda puramente real; (b) função de onda puramente imaginária.

9. Sendo P_{ab} a probabilidade de uma partícula ser encontrada no intervalo $a < x < b$, mostre que $dP_{ab}/dt = j(a,t) - j(b,t)$, sendo $j(x,t)$ a corrente de probabilidade.

10. A autofunção do estado fundamental de uma partícula de massa m vinculada a se mover livremente apenas entre $x = -L/2$ e $x = L/2$ é dada por $\phi(x) = A\cos(\pi x/L)$ (veremos isso no capítulo seguinte). Determina a constante de normalização A. Calcule os valores esperados dos operadores x, p, x^2 e p^2 nesse estado. Justifique alguns de seus resultados usando argumentos de simetria.

11. De posse dos resultados do item anterior, expresse Δx e Δp e mostre que $\Delta x\,\Delta p \sim 0.568\,\hbar > \hbar/2$, satisfazendo assim o princípio de incerteza de Heisenberg. Observe que a incerteza na posição da partícula realmente é da ordem de L, como esperado, certo?

12. Uma partícula está submetida ao potencial harmônico $V(x) = m\omega^2 x^2/2$. Utilizando as Eq. de Ehrenfest, obtenha que

$$\langle x \rangle = A\cos(\omega t + \phi) \quad \text{e} \quad \langle p \rangle = -m\omega A \sin(\omega t + \phi) \ ,$$

sendo A e ϕ constantes arbitrárias dependentes de condições iniciais. Refaça o exercício para $V(x) = -\alpha x$, com α constante. Nesses dois casos, observe que as médias seguem as equações clássicas correspondentes, característica específica dos potenciais $V(x) \sim x^n$ com $n = 0, 1$ ou 2.