DEF. Dois sistemas lineares são equivalentes se eles possuem o mesmo conjunto solução.

OBS. Se S_1 e S_2 são inconsistentes, então o conjunto solução de ambos é vazio, e, portanto, eles são equivalentes.

LISTA 1

5)

c) $$\begin{cases} x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = b \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{L_2' = L_2 - L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & b-2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2' \leftrightarrow L_3'}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & b-2 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 2 \\ z = b-2 \end{cases}$$

R. O sistema terá única solução qualquer que seja $b \in \mathbb{R}$.

7)

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1-a & -2 & 2-2a \\ 2 & 3 & -(2+a) & 1 \end{array}\right)$$

$\sim$

$L_2' = L_2 - L_1$

$L_3' = L_3 - L_1$

$L_4' = L_4 - 2L_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -2+a & 1 \\ 0 & -a & -2+a & 2-2a \\ 0 & 1 & -2+a & 1 \end{array}\right]$$

$\sim$

$L_3'' = L_3' + aL_2'$

$L_4'' = L_4' - L_2'$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -2+a & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{a^2-a-2} & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

pode ser 0 ou não

• OBS.

$$a^2 - a - 2 = 0 \iff a = 2 \text{ ou } a = -1.$$

SOMA DAS RAÍZES = 1
PRODUTO DAS RAÍZES = -2

• PRIMEIRO CASO: $a = 2$.

Nesse caso, a matriz é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \qquad \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x = -1 + 2z \\ y = 1 \end{cases}$$

S.P.I.
(possui infinitas soluções)

$$S = \{(-1+2z, 1, z) : z \in \mathbb{R}\}.$$

↳ conjunto solução

• SEGUNDO CASO: $a = -1$.

Nesse caso, a matriz é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) . \quad \begin{cases} x+y+z=0 \\ y-3z=1 \\ 0=3 \end{cases}$$

O sistema é inconsistente (isto é, não possui soluções).

$S = \emptyset$.

↳ Conjunto solução

• TERCEIRO CASO: $a \neq 2$, e $a \neq -1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -2+a & 1 \\ 0 & 0 & \underbrace{a^2-a-2}_{\neq 0} & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) .$$

Nesse caso, o número de incógnitas é igual ao número de pivôs, e, portanto, o sistema é possível e determinado (isto é, possui uma única solução).

LISTA 2

2)

a) Se $AB = AC$, então $B = C$.

SOL. $\boxed{\text{FALSO!}}$

Se $A = O_n$, se $B = I_n$, e se $C = -I_n$,

$$AB = O_n B = O_n = O_n C, \text{ mas } B \neq C.$$

b) Se $A^2 = A$, então, ou $A = O_n$, ou $A = I_n$.

Sol.
FALSO!

De fato,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

mas $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O_2$, e $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_2$.

d) Se $AB = O_n$, então, ou $A = O_n$, ou $B = O_n$.

FALSO!

De fato,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\neq O_2}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\neq O_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{= O_2}.$$

4) Seja $y \neq 0$, e seja $A := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{y} \\ y & 1 \end{pmatrix}$.

Mostre que $A^2 = 2A$.

SOLUÇÃO.

De fato,

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{y} \\ y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{y} \\ y & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+1 & \frac{1}{y}+\frac{1}{y} \\ y+y & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2.\frac{1}{y} \\ 2y & 2 \end{pmatrix}$$

$$= 2\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{y} \\ y & 1 \end{pmatrix} = 2A.$$