

DINÂMICA DE UM PONTO MATERIAL

1. Movimento de ponto material vinculado a uma curva plana

Nesta aula estudaremos, com o auxílio de simulações numéricas, o movimento de uma pequena esfera P no interior de um tubo fixo e isento de atrito.

Admitiremos que a esfera seja uma partícula material e que o tubo seja um objeto unidimensional cuja forma se assimile à de uma curva plana \mathcal{C} fixa no espaço e representada pela equação

$$z = f(s) \quad (1 - 1)$$

sendo s a abscissa curvilínea medida ao longo de \mathcal{C} .

Nas condições expostas acima, o tubo deve ser interpretado como um vínculo bidirecional **independente do tempo**.

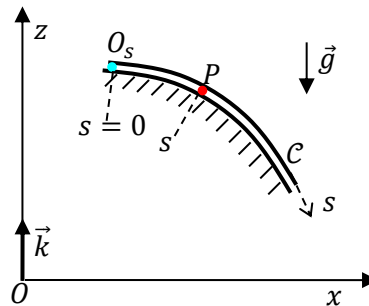


Figura 1. Ponto móvel sobre curva fixa.

Adotaremos a abordagem lagrangeana para obter as equações diferenciais do movimento.

A energia cinética de P é dada por:

$$T = \frac{1}{2} m \cdot \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 \quad (1 - 2)$$

Sendo $z = f(s)$ a equação vincular algébrica que restringe o movimento de P , o trabalho virtual elementar realizado pela força-peso em um deslocamento virtual admissível

$$\delta z = \frac{\partial f}{\partial s} \delta s = f'(s) \delta s \quad (1 - 3)$$

é dado por:

$$\delta \tau = -mg \vec{k} \cdot \delta z \vec{k} = -mg f'(s) \delta s \quad (1 - 4)$$

O trabalho virtual calculado acima pode ser expresso como:

$$\delta \tau = Q_s \delta s \quad (1 - 5)$$

em que

$$Q_s = -mg f'(s) \quad (1 - 6)$$

é a **força generalizada** atuante ao longo da coordenada curvilínea s .

Calculando-se os termos da equação de Lagrange, tem-se:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = m\dot{s}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) = m\ddot{s}$$

$$\frac{\partial T}{\partial s} = 0$$

$$Q_s = -mgf'(s)$$

Portanto, o movimento de P é regido pela seguinte equação diferencial de segunda ordem:

$$\ddot{s} + gf'(s) = 0 \quad (1 - 7)$$

Antes, porém, de se realizar a atividade de simulação computacional da equação diferencial 1-7, considerando-se diferentes curvas percorridas pela partícula P , é conveniente estudar uma equação diferencial fundamental em Dinâmica ¹, pois esse estudo facilitará as análises subseqüentes.

2. Uma equação fundamental em Dinâmica

Muitos problemas de Dinâmica são governados pela equação diferencial **não linear** de primeira ordem

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \varphi(x) \quad (2 - 1)$$

Derivando-se essa equação, resulta:

$$2\dot{x}\ddot{x} = \varphi'(x)\dot{x} \quad (2 - 2)$$

a qual pode ser decomposta em duas equações, a saber:

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow x = const \Rightarrow \varphi(x) = 0 \quad (2 - 3)$$

e

$$\ddot{x} = \frac{\varphi'(x)}{2} \quad (2 - 4)$$

Mostraremos que 2-4 é capaz de descrever **4 tipos de movimentos característicos** e que 2-3 corresponde ao caso trivial de **equilíbrio estático**. Tal comprovação será baseada na análise do gráfico da função $y = \varphi(x)$.

Para tanto, desenvolveremos a equação 2-1 na forma como segue:

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\varphi(x)} \Rightarrow dt = \frac{dx}{\pm\sqrt{\varphi(x)}} \quad (2 - 5)$$

Integrando-se (2-5) entre as posições x_0 e x , chega-se a:

$$t = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\pm\sqrt{\varphi(\xi)}} \quad (2 - 6)$$

A equação acima fornece o **tempo necessário para que P se desloque entre as posições x_0 e x** . A ambigüidade do sinal se resolve a partir da análise da velocidade inicial de P , na forma que segue.

Se, em $t = 0$, $x = x_0$ e $\dot{x}_0 > 0$, a equação 2-6 se escreve como:

¹ Essa equação resulta da formulação do Teorema da Energia Cinética.

$$t = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} \quad (2-7)$$

Porém, se em $t = 0$, $x = x_0$ e $\dot{x}_0 < 0$, 2-6 adquire a forma

$$t = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{-\sqrt{\varphi(\xi)}} \quad (2-8)$$

Passemos agora à análise dos tipos de movimento mencionados anteriormente.

2.1 Caso do equilíbrio estático

Consideremos o gráfico da Fig. 2.

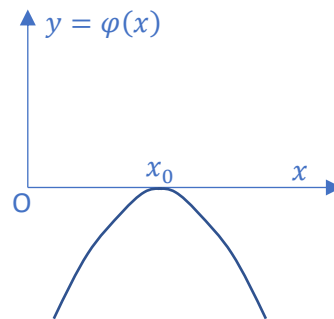


Figura 2. Gráfico de $y = \varphi(x)$ para o caso do equilíbrio estático.

Notemos que, no ponto $x = x_0$, $\varphi(x_0) = 0 \Rightarrow \dot{x}_0 = 0$. Além disso, tem-se $\varphi'(x_0) = 2\ddot{x}_0 = 0 \Rightarrow \ddot{x}_0 = 0$.

Portanto, se, no instante $t = 0$, $x = x_0$, $\dot{x}_0 = 0$ e $\ddot{x}_0 = 0$, então P **permanecerá nessa posição por tempo indeterminado**.

Observe que não há possibilidade de movimento para $x \mid \varphi(x) < 0$, uma vez que $dx/dt \in \mathbb{R}$.

2.2 Caso do movimento periódico

Esse movimento está associado ao gráfico da Fig.3.

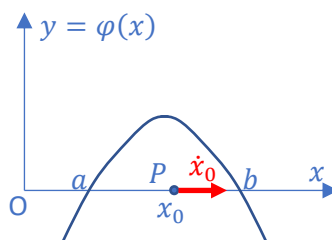


Figura 3. Gráfico de $y = \varphi(x)$ associado ao movimento periódico.

Admitiremos que, no instante $t = 0$, $x = x_0$, $a < x_0 < b$, $\dot{x}_0 > 0$.

Notemos ainda que o gráfico da Fig. 2 indica que

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=a} &= 2\dot{x}(a) > 0 \\ \left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=b} &= 2\dot{x}(b) < 0 \end{aligned} \quad (2.2 - 1)$$

Em tal caso, o movimento de P é restrito ao intervalo $[a, b]$ onde $\varphi(x) > 0$. Além disso, é possível demonstrar que

$$t = \int_{x_0}^b \frac{d\xi}{\sqrt{f(\xi)}} \quad (2.2 - 2)$$

converge para um valor finito à medida que $x \rightarrow b$. A partir dessa posição, em que $\dot{x}(b) = \sqrt{\varphi(b)} = 0$, como $\ddot{x}(b) = \frac{\varphi'(b)}{2} < 0$, o sinal da velocidade de P se inverte, de modo que P passa a se movimentar para a esquerda, atingindo a posição $x = a$ com velocidade nula (pois $\varphi'(a) = \sqrt{\varphi(a)} = 0$) após o tempo

$$t = \int_{x_0}^b \frac{d\xi}{\sqrt{f(\xi)}} + \int_b^a \frac{d\xi}{-\sqrt{f(\xi)}} \quad (2.2 - 3)$$

Como, em $x = a$, a aceleração de P é positiva ($\ddot{x}(a) = \frac{\varphi'(a)}{2} > 0$), a velocidade de P se torna positiva e P passa a mover-se em direção à posição $x = b$, onde ocorre uma nova reversão no sentido de seu movimento.

Vê-se, claramente, que o movimento examinado é periódico, com período dado por:

$$\Pi = 2 \int_a^b \frac{d\xi}{\sqrt{f(\xi)}} \quad (2.2 - 4)$$

2.3. Caso do movimento limitado no espaço, mas ilimitado no tempo

Esse movimento está associado ao gráfico da Fig. 4, onde a abscissa $x = c$ é uma raiz dupla de $y = \varphi(x)$.

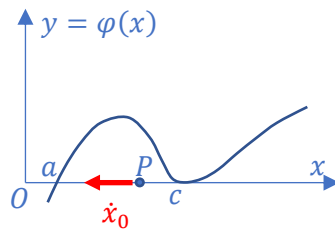


Figura 4. Gráfico de $y = \varphi(x)$ para o movimento limitado no espaço e ilimitado no tempo.

Admitindo-se que, no instante inicial, $a < x_0 < c$ e $\dot{x}_0 < 0$, P deverá atingir a abscissa $x = a$ após o tempo

$$t = \int_{x_0}^a \frac{d\xi}{-\sqrt{\varphi(\xi)}} \quad (2.3 - 1)$$

Nessa posição, a velocidade de P muda de sinal, e este passa a se mover para a direita. No entanto, $x = c$ é uma raiz dupla de $y = \varphi(x)$ e pode-se demonstrar que P jamais conseguirá atingir o ponto $x = c$, uma vez que a integral dada por

$$t = \int_a^c \frac{d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} \quad (2.3 - 2)$$

diverge, ou seja, $t \rightarrow \infty$ à medida que $x \rightarrow c$. Assim, conclui-se que **P tende assintoticamente à posição $x = c$** .

Portanto, o movimento examinado é limitado no espaço ($a < x < c$), mas ilimitado no tempo.

2.4. Caso do movimento limitado no tempo, mas ilimitado no espaço

Consideremos a função $y = \varphi(x)$ ilustrada na Fig. 5 a seguir.

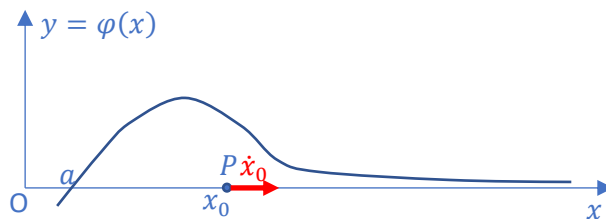


Figura 5. Gráfico de $y = \varphi(x)$ para movimento limitado no tempo, mas ilimitado no espaço.

Admitindo-se que, no instante $t = 0$, $x = x_0 > a$ e $\dot{x}_0 > 0$, o tempo necessário para que P se afaste indefinidamente de sua posição original, é dado por

$$t = \int_{x_0}^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} \quad (2.4 - 1)$$

Caso essa integral convirja para um valor limitado, o movimento de P será limitado no tempo, mas ilimitado no espaço.

2.5. Caso do movimento ilimitado no tempo e no espaço

Consideremos a função $y = \varphi(x)$ ilustrada na Fig. 6 abaixo.

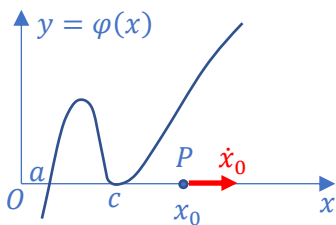


Figura 6. Esquema geométrico correspondente ao movimento ilimitado no tempo e no espaço.

Suporemos que, no instante $t = 0$, $x_0 > c$, $\dot{x}_0 > 0$ e que a integral

$$t = \int_{x_0}^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} \rightarrow \infty \quad (2.5 - 1)$$

divirja para $x \rightarrow \infty$. Nessas circunstâncias, o movimento de P é ilimitado no tempo e ilimitado no espaço.

3. Exemplo de movimento de partícula vinculada a curva plana: Ponto material vinculado a toroide

Consideremos a Fig. 7, na qual uma esfera de raio desprezível se move no interior de um toroide de centro O e raio r , fixo no espaço. Admitiremos que a área da seção circular do toroide seja igual à da esfera e que o atrito entre ambos seja desprezível.

Isso posto, descreveremos a equação vincular em termos do parâmetro θ , ângulo medido desde o ponto A até uma posição arbitrária P da esfera.

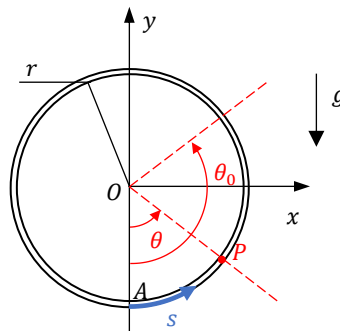


Figura 7. Ponto material vinculado a toroide circular fixo.

Para esse problema, a energia cinética, a energia potencial e o lagrangeano, são dados, respectivamente, por:

$$T = \frac{1}{2} m \left[\frac{d}{dt} (s(\theta)) \right]^2 = \frac{1}{2} m [\dot{s}(\theta)]^2 = \frac{1}{2} m [r\dot{\theta}]^2 = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 \quad (3-1)$$

$$V = mgr(1 - \cos \theta) \quad (3-2)$$

e

$$L = T - V = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - mgr(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + mgr \cos \theta - mgr \quad (3-3)$$

Calculando-se os termos da equação de Lagrange, ou seja,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = m r^2 \ddot{\theta} \quad (3-4)$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgr \sin \theta \quad (3-5)$$

chega-se à equação diferencial de segunda ordem que governa o movimento de P , dada por:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{r} \sin \theta = 0 \quad (3-6)$$

TAREFA 1

Adote nesta tarefa e nas 5 que lhe sucedem, os dados a seguir:

Material da esfera: cobre ($\rho = 8,94 \text{ g/cm}^3$);

Raio da esfera: $r_p = 1 \text{ mm}$;

Raio do toroide: $r = 1 \text{ m}$;

Aceleração local da gravidade: $g = 9,80 \text{ m/s}^2$

Execute as seguintes ações:

- Represente em espaço de estados a equação diferencial 3-6.
- Implemente as chamadas à função **ode** do **Scilab** para integrar as equações diferenciais de primeira ordem obtidas no item (a).
- Simule o movimento de P para as seguintes condições iniciais: 1ª) $\theta_0 = -1^\circ, \dot{\theta}_0 = 0$; 2ª) $\theta_0 = 2\pi/3, \dot{\theta}_0 = 0$; 3ª) $\theta_0 = 179^\circ, \dot{\theta}_0 = 0$. Em seguida, utilizando a função **plot** do **Scilab**, construa os seguintes gráficos: $\theta = \theta(t)$; $\dot{\theta} = \dot{\theta}(t)$; $\ddot{\theta} = \ddot{\theta}(\theta)$; $V = V(t)$; $T = T(t)$; $E(t) = V(t) + T(t)$.
- Utilize um método elementar de derivação numérica para obter, a partir de $\dot{\theta} = \dot{\theta}(t)$, o gráfico de $\ddot{\theta} = \ddot{\theta}(t)$. Aplique esse método para construir esses gráficos para as três condições iniciais mencionadas no item (c).
- Analise os resultados obtidos em (c) e (d).

Obs 1: O intervalo Δt de integração deve ser escolhido de forma a que as curvas obtidas a partir do processo de integração numérica sejam suaves.

Obs 2: O tempo total de integração deve ser escolhido de forma a que seja possível observar, para os casos de movimento periódico, ao menos dois ciclos do movimento.

4. Exemplo de aplicação da equação diferencial 2-1

Tomando como referência a Fig. 8, e considerando que o sistema é conservativo, tem-se:

$$\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - mgr \cos \theta = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}_0^2 - mgr \cos \theta_0 = h \quad (4-1)$$

em que h , a **energia mecânica** do sistema, é expressa como

$$h = mgr\eta \quad (4-2)$$

sendo $r \cdot \eta$ a altura associada à **energia potencial equivalente à energia mecânica** do sistema.

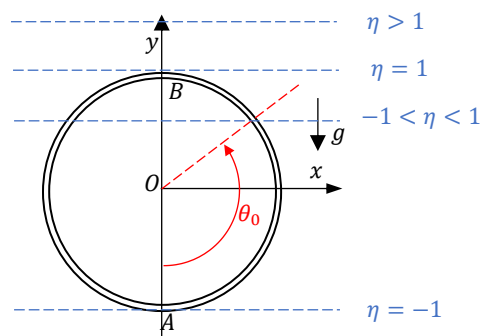


Figura 8. Movimentos característicos de um ponto material vinculado a um aro circular.

Definindo-se o parâmetro

$$\omega^2 = \frac{g}{r} \quad (4-3)$$

chega-se a:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\omega^2(\eta + \cos\theta) \quad (4-4)$$

que é análoga, formalmente, à equação 2-1.

Analisemos, agora, os casos destacados na Fig. 8:

(i) $\eta = -1$

Nesta situação singular, em que $\dot{\theta}_0 = 0$ e $\theta_0 = 0$, P mantém-se permanentemente no ponto de equilíbrio estável A , ou seja, na posição polar $(r, 0)$.

(ii) $-1 < \eta < 1$

Nesta situação, o ponto P realiza movimento periódico no intervalo $[-\theta_0, \theta_0]$.

iii. $\eta = 1$

Se $\dot{\theta}_0 = 0$ e $\theta_0 = \pi$, P mantém-se no ponto de equilíbrio **instável** B , ou seja, na posição polar (r, π) . No entanto, se $\dot{\theta}_0 \neq 0$ e $\theta_0 \neq \pi$, P se move tendendo, assintoticamente, ao ponto de equilíbrio instável B , sem jamais atingi-lo.

iv. $\eta > 1$

Nesta situação, o ponto P realiza movimento rotativo contínuo e periódico.

Deve-se destacar que não há movimento possível para $\eta < -1$.

TAREFA 2

- (a) Utilizando um único par de eixos cartesianos (θ, φ) , desenhe os gráficos da função $\varphi(\theta) = 2\omega^2(\eta + \cos\theta)$ para os seguintes valores de η : $-1, 0.5, 1, 1.5$.
- (b) Adote as seguintes condições iniciais: 1ª) $\theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = 0$; 2ª) $\theta(0) = \pi, \dot{\theta}(0) = 0$. Em seguida, simule o movimento de P durante 10s e construa os gráficos $\theta = \theta(t)$, $\dot{\theta} = \dot{\theta}(t)$ e $\ddot{\theta} = \ddot{\theta}(t)$.
- (c) Determine o instante (caso exista) em que P , posto em repouso na posição angular $\theta = \pi$, inicia o seu movimento. Verifique se esse valor se altera com a mudança do método de integração numérica.
- (d) Partindo da posição inicial $\theta_0 = 0$, determine a velocidade angular de P compatível com um movimento limitado no espaço, mas ilimitado no tempo (Dica: admita que a posição final de P seja $\theta_f = \pi$). Em seguida, utilize essas condições iniciais para simular o movimento de P durante um tempo suficiente para que o desvio relativo da posição angular final (isto é, π) seja menor do que 10^{-4} . Para esse caso, construa os gráficos $\theta = \theta(t)$, $\dot{\theta} = \dot{\theta}(t)$ e $\ddot{\theta} = \ddot{\theta}(t)$. Analise os resultados.

Retornando à equação 4-4, isto é,

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\omega^2(\eta + \cos\theta)$$

obtem-se a função $t = t(\theta)$ através de uma simples integral definida, ou seja,

$$t = \pm \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\omega \sqrt{2(\eta + \cos \theta)}} \quad (4 - 5)$$

em que o sinal “+” deve ser usado quando a trajetória for percorrida no sentido crescente de θ e o sinal “-” em caso contrário.

Embora essa equação possua solução analítica, é mais simples obter a curva $t = t(\theta)$ por meio da aplicação de métodos de integração numérica.

TAREFA 3

- Utilizando a função **integrate** do **Scilab**, determine o período do movimento de P admitindo que este parta do repouso nas posições angulares $\theta(0) = \{1^\circ, 22,5^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 179^\circ, 179,5^\circ\}$. (Dica: utilize as equações 2.2-4 e 4-5).
- Sendo Π o período do movimento, construa o gráfico $\Pi = \Pi(\theta(0))$.
- Mostre, por meio dos resultados da simulação, que o período do movimento de P pode ser determinado pela fórmula $\Pi = 2\pi/\bar{\omega}$, onde $\bar{\omega}$ é a velocidade angular média de P .
- Analise os resultados anteriores.

A partir do diagrama de corpo livre mostrado na Fig.9, pode-se determinar a evolução da força normal aplicada pelo tubo toroidal à esfera P .

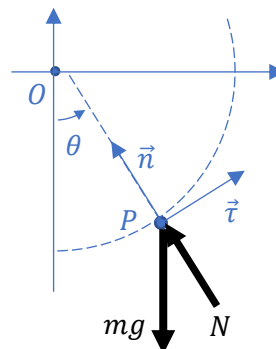


Figura 9. Diagrama de corpo livre da partícula P .

Notemos que as componentes tangencial e normal da aceleração de P são dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} a_\tau &= -g \sin \theta \\ a_n &= r^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned} \quad (4 - 6)$$

Aplicando-se a segunda lei de Newton ao longo da direção \vec{n} , tem-se:

$$N - mg \cos \theta = mr^2 \dot{\theta}^2$$

ou seja,

$$|\vec{N}| = |mg \cos \theta + mr^2 \dot{\theta}^2| \quad (4 - 7)$$

TAREFA 4

- (a) Estabeleça condições iniciais $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$ tais que o parâmetro η , definido pela equação 4-2, satisfaça à desigualdade $\eta > 1$.
- (b) Simule o movimento de P para as condições iniciais do item (a) por um tempo t tal que P realize duas rotações completas aproximadamente. Em seguida, construa os seguintes gráficos: 1) $\theta = \theta(t)$; 2) $\dot{\theta} = \dot{\theta}(t)$; 3) $|\vec{N}| = |mg \cos \theta(t) + mr^2 \dot{\theta}^2(t)|$; 4) $V = V(t)$; 5) $T = T(t)$; 6) $E = V(t) + T(t)$. Analise os resultados obtidos.

Os diversos estados de movimento da partícula P podem ser visualizados em um mapa denominado **retrato do espaço de fases** (Fig.10), no qual são construídas as curvas $\dot{\theta} = \dot{\theta}(\theta)$ geradas para distintas condições iniciais $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$.

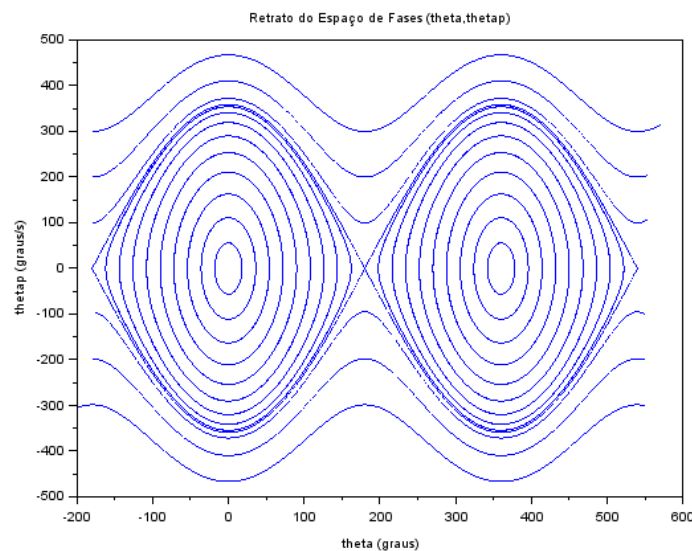


Figura 10. Retrato do espaço de fases.

TAREFA 5

- (a) Escrever um algoritmo em **Scilab** para construir o retrato do espaço de fases do problema estudado neste capítulo.
- (b) Utilizar esse algoritmo para desenhar o retrato do espaço de fases do referido problema.
- (c) Descrever o movimento de P a partir da análise do retrato do espaço de fases obtido no item (b).
- (d) Supondo que a partícula também esteja sujeita a uma força viscosa $F = -c \cdot r \dot{\theta}$, pede-se: 1º) escrever as equações do movimento de P na forma de espaço de estados; 2º) construir o retrato do espaço de fases para os seguintes casos: 1) $c < 2m\omega$ (amortecimento sub-crítico); 2) $c = 2m\omega$ (amortecimento crítico); 3) $c > 2m\omega$ (amortecimento super-crítico).
- (e) Descrever o movimento de P a partir dos retratos de fase obtidos no item (d).

5. Solução analítica para o problema descrito pela equação 3-6

Retomemos a equação (4-4), ou seja:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\omega^2(\eta + \cos \theta) \quad (5 - 1)$$

Nos próximos tópicos, analisaremos os três casos típicos de movimento regido pela equação acima, a saber: **periódico**, **assintótico** e **circular**.

5.1. Movimento pendular periódico

Admitindo-se que $-1 < \eta < 1$, utilizaremos a seguinte definição:

$$\eta = -\cos \alpha \quad (5.1 - 1)$$

onde α é o ângulo-limite do movimento pendular.

Dessa forma, pode-se escrever:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\omega^2(\cos \theta - \cos \alpha) \quad (5.1 - 2)$$

Introduzindo-se na equação acima a identidade trigonométrica

$$\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

e definindo-se

$$k = \sin \frac{\alpha}{2} \quad (5.1 - 4)$$

obtem-se:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 4\omega^2 \left(k^2 - \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \quad (5.1 - 5)$$

onde $-\alpha < \theta < \alpha$

Para facilitar o processo de integração da equação 5.1-5, Euler introduziu a famosa mudança de variáveis

$$\varphi = \sin^{-1} \left(\frac{1}{k} \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (5.1 - 6)$$

a qual representa um mapa $\theta \mapsto \varphi$, onde $\theta \in [-\alpha, \alpha]$ e $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

De (5.1-6) resulta:

$$\sin \frac{\theta}{2} = k \sin \varphi \quad (5.1 - 7)$$

Introduzindo-se (5.1-7) em (5.1-5), obtém-se:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 4k^2\omega^2(1 - \sin^2 \varphi) \quad (5.1 - 8)$$

Derivando-se (5.1-7) em relação ao tempo, tem-se:

$$\cos \frac{\theta}{2} \dot{\theta} = k \cos \varphi \dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\theta} = 2k \frac{\cos \varphi}{\cos \frac{\theta}{2}} \dot{\varphi} \quad (5.1 - 9)$$

Elevando-se ao quadrado a equação acima e notando que

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = 1 - k^2 \sin^2 \varphi \quad (5.1 - 10)$$

resulta:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 4k^2 \frac{1 - \sin^2 \varphi}{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \quad (5.1 - 11)$$

Igualando-se (5.1-8) e (5.1-11), ou seja, fazendo-se

$$4k^2 \omega^2 (1 - \sin^2 \varphi) = 4k^2 \frac{1 - \sin^2 \varphi}{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

obtém-se, após desenvolvimento algébrico,

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \omega^2 (1 - k^2 \sin^2 \varphi) \quad (5.1 - 12)$$

Antes de prosseguir, é importante analisarmos o parâmetro k . Das equações (5.1-4) e (5.1-1), obtém-se:

$$k^2 = \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} = \frac{1 + \eta}{2} \quad (5.1 - 13)$$

Da equação (4-2), o parâmetro η se expressa como

$$\eta = \frac{h}{mgr} \quad (5.1 - 14)$$

em que h é a energia mecânica total do sistema.

Deste ponto em diante, admitiremos que a partícula P **INICIE SEU MOVIMENTO A PARTIR DA POSIÇÃO $\theta_0 = 0$ COM VELOCIDADE ANGULAR INICIAL $\dot{\theta}_0$** . Em tais circunstâncias, a sua energia mecânica total é

$$h = \frac{1}{2} mr^2 \dot{\theta}_0^2 - mgr \cos \theta_0 = \frac{1}{2} mr^2 \dot{\theta}_0^2 - mgr \quad (5.1 - 15)$$

de modo que η é dado por:

$$\eta = -1 + \frac{r \dot{\theta}_0^2}{2g} = -1 + \frac{\dot{\theta}_0^2}{2\omega^2} \quad (5.1 - 16)$$

Portanto, o parâmetro k^2 é dado por:

$$k^2 = \left(\frac{\dot{\theta}_0}{2\omega}\right)^2 \quad (5.1 - 17)$$

Deve-se acrescentar a hipótese de que $0 < k < 1$, ou seja, de que a partícula P realiza movimento pendular plano, jamais atingindo a posição angular $\theta = \pi$.

Concluída a análise do parâmetro k , retornemos à equação diferencial (5.1-12), ou seja:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \omega^2(1 - k^2 \sin^2 \varphi)$$

Para integrá-la, separamos, inicialmente, os termos dependentes de t e de φ , obtendo a fórmula

$$t = \frac{1}{\omega} \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \quad (5.1 - 18)$$

que permite determinar o tempo requerido para que a partícula P se mova entre as posições angulares 0 e φ .

Expressando-se 5.1-18 na forma

$$u = \omega t = F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \quad (5.1 - 19)$$

adquire-se uma visão diferente dessa equação: a função $F(\varphi, k)$ fornece o comprimento u do arco percorrido pela partícula P durante o tempo t , comprimento esse dado pela **integral elíptica de primeira espécie** indicada no lado direito da equação.

A função $F(\varphi, k)$ admite valores no intervalo $[-K, K]$, onde

$$K = K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \quad (5.1 - 20)$$

é chamada de **integral elíptica completa de primeira espécie**. (Note que K é o arco correspondente a $1/4$ do período do movimento).

É importante destacar que a forma da função $F(\varphi, k)$ varia significativamente com o valor do parâmetro k (chamado de **módulo**). No caso, por exemplo, de se ter $k = \sin \frac{\alpha}{2} \approx 0$, a equação (5.1-19) se reduz à equação trivial

$$u = \omega t = F(\varphi, 0) = \varphi \quad (5.1 - 21)$$

aplicável tão somente quando $\varphi \approx 0$, ou seja, nas situações em que a partícula realiza pequenas oscilações (ditas **harmônicas**) em torno da posição de equilíbrio estável, e a equação diferencial (3-6) adquire a forma linearizada

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{r} \theta = 0 \quad (5.1 - 22)$$

tendo, por solução

$$\theta(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (5.1 - 23)$$

Legendre calculou a integral elíptica de primeira espécie da equação (5.1-19), construindo uma tabela para valores de k e de φ tomados, respectivamente, nos intervalos $0 < k < 1$ e $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Todavia, foram Abel, Gauss e Jacobi que tiveram a ideia de inverter a função $u = F(\varphi, k)$, de modo a obter a função inversa $\varphi = am(u, k)$, a qual é denominada **amplitude de Jacobi**.

Deve-se destacar que o problema da inversão da função $u = F(\varphi, k)$ é semelhante ao da inversão da integral

$$u = \int_0^y \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \sin^{-1} y \quad (5.1 - 24)$$

que, como sabemos, produz como resultado

$$y = \sin u$$

Para o problema do movimento pendular plano, sob condições iniciais $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 < 2\sqrt{\frac{g}{r}}$, a função $\varphi = am(u, k)$ tem forma geométrica e propriedades similares às da função $y = \sin u$, **mas seus valores não se situam no intervalo $[-1, 1]$** . É essa a razão pela qual se constrói o mapa $\varphi = am(u, k) \mapsto \sin \varphi$, gerando-se a nova função

$$\operatorname{sn}(u, k) = \operatorname{sn}(\omega t, k) = \sin \varphi = \sin(am(\omega t, k)) \quad (5.1 - 25)$$

chamada de **função elíptica de Jacobi sn**.

Utilizando-se as funções elípticas de Jacobi, e supondo-se que, em $t = 0$, $\theta = 0$ e $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$, a solução da equação diferencial 5.1-12 é dada por:

$$\sin \varphi(t) = \operatorname{sn}(\omega t, k) \quad (5.1 - 26)$$

Introduzindo-se 5.1-7 na expressão acima, resulta, finalmente:

$$\sin \left[\frac{\theta(t)}{2} \right] = k \cdot \operatorname{sn}(\omega t, k) \quad (5.1 - 27)$$

Além da função **sn**, convém ainda destacar as funções elípticas de Jacobi **cn** e **dn**, dadas, respectivamente, por:

$$\operatorname{cn}(u, k) = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(u, k)} \quad (5.1 - 28)$$

e

$$\operatorname{dn}(u, k) = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u, k)} \quad (5.1 - 29)$$

Pode-se demonstrar que essas três funções obedecem às seguintes relações:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\operatorname{sn}(u, k)) &= \operatorname{cn}(u, k) \cdot \operatorname{dn}(u, k) \\ \frac{d}{dt}(\operatorname{cn}(u, k)) &= -\operatorname{sn}(u, k) \cdot \operatorname{dn}(u, k) \\ \frac{d}{dt}(\operatorname{dn}(u, k)) &= -k^2 \operatorname{sn}(u, k) \cdot \operatorname{cn}(u, k) \end{aligned} \quad (5.1 - 30)$$

Na Fig. 11 apresentam-se gráficos dessas 3 funções.

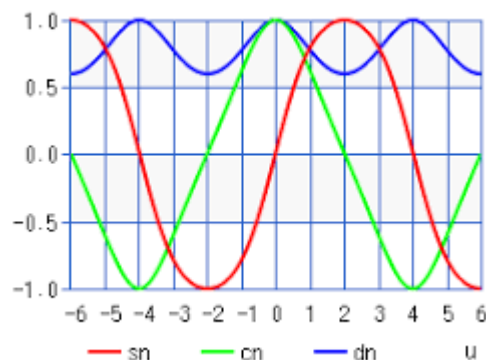


Figura 11. Gráficos das funções elípticas **sn**, **cn** e **dn**.

5.2. Movimento assintótico

Nesse caso, $\eta = 1$, de modo que a equação (4-4) assume a forma:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\omega^2(1 + \cos \theta) \quad (5.2 - 1)$$

Como

$$\cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 \quad (5.2 - 2)$$

resulta:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 4\omega^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (5.2 - 1)$$

Extraindo-se a raiz quadrada de ambos os lados da equação acima, tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\theta}{2}\right) = \omega \cos \left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (5.2 - 2)$$

Fazendo-se a separação de variáveis na equação anterior, resulta a **equação diferencial exata**

$$\omega dt = \frac{d(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} \quad (5.2 - 3)$$

que, integrada, resulta em

$$\omega t = \log \left[\sec \left(\frac{\theta}{2}\right) + \tan \left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (5.2 - 4)$$

Da equação acima, conclui-se que:

$$\sec \left(\frac{\theta}{2}\right) + \tan \left(\frac{\theta}{2}\right) = e^{\omega t} \quad (5.2 - 5)$$

Invertendo-se a equação anterior, ou seja, fazendo-se

$$\frac{1}{\sec \left(\frac{\theta}{2}\right) + \tan \left(\frac{\theta}{2}\right)} = e^{-\omega t} \quad (5.2 - 6)$$

obtem-se:

$$\sec \left(\frac{\theta}{2}\right) - \tan \left(\frac{\theta}{2}\right) = e^{-\omega t} \quad (5.2 - 7)$$

Somando-se 5.2-5 com 5.2-7 e subtraindo-se 5.2-7 de 5.2.5 chega-se às seguintes equações:

$$\sec \left(\frac{\theta}{2}\right) = \cosh(\omega t) \quad (5.2 - 8)$$

$$\tan \left(\frac{\theta}{2}\right) = \sinh(\omega t)$$

Finalmente, das duas equações 5.2-8, resulta:

$$\sin\left[\frac{\theta(t)}{2}\right] = \tanh(\omega t) \quad (5.2 - 9)$$

5.3 Movimento circular periódico

Nesse caso, $\eta > 1$ e a solução da equação diferencial 5.1-12 é apresentada abaixo, sem demonstração:

$$\sin\left[\frac{\theta(t)}{2}\right] = \operatorname{sn}\left[\frac{1}{k}\omega t, k\right] \quad (5.3 - 1)$$

onde

$$k^2 = \frac{2}{1 + \eta} \quad (5.3 - 2)$$

TAREFA 6

a) Utilizando a função **ode** do **Scilab**, integre as equações de primeira ordem relativas à equação diferencial (3-6), admitindo que, no instante inicial, a partícula P esteja na posição $\theta_0 = 0$ e que sua velocidade angular inicial corresponda aos seguintes valores do parâmetro η : (i) $\eta = -0,95$; (ii) $\eta = 0,50$; (iii) $\eta = 0,99$; (iv) $\eta = 2,00$. Para cada um desses casos, construa os gráficos $\theta = \theta(t)$ e $\dot{\theta} = \dot{\theta}(t)$. **OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: Na maioria das implementações computacionais, as funções elípticas de Jacobi usam como parâmetro de entrada o valor k^2 e não o valor k .**

b) Compare os resultados anteriores com as respectivas soluções analíticas 5.1-27, 5.2-9, 5.3-1.

6. Ponto material movendo-se no interior de uma linha tubular em forma de cicloide

Admitiremos que a cicloide seja gerada por uma circunferência de raio r , que rola sem escorregar sobre a reta AB , conforme ilustrado na Fig. 12. Notando que os segmentos de reta PJ e OJ tangenciam a cicloide nos pontos P e $O \equiv O_s$, respectivamente, tem-se, da Geometria elementar:

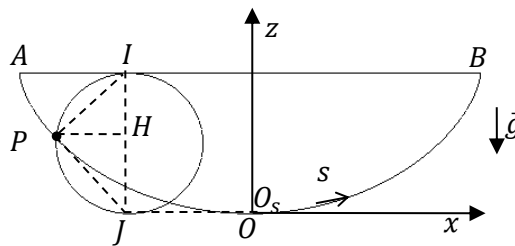


Figura 12. Ponto material vinculado a uma cicloide fixa.

$$\overline{PJ}^2 = \overline{JH} \cdot \overline{JI} = z \cdot 2r \quad (6 - 1)$$

Demonstra-se *facilmente* (isto é uma brincadeira!)², que:

$$\widehat{OP} = 2\overline{PJ} \Rightarrow \overline{PJ} = \frac{1}{2}\widehat{OP} = \frac{s}{2} \quad (6 - 2)$$

² Esse é um dos célebres teoremas sobre a geometria da cicloide que foram demonstrados por Pascal no século XVII.

De (6-1) e (6-2), resulta:

$$z = f(s) = \frac{s^2}{8r} \quad (6-3)$$

Substituindo-se essa expressão na equação (1-7), ou seja, em

$$\ddot{s} + gf'(s) = 0$$

obtem-se a equação diferencial do movimento do ponto P vinculado a um tubo em forma de cicloide e isento de atrito:

$$\ddot{s} + \frac{g}{4r}s = 0 \quad (6-4)$$

Definindo-se

$$\omega^2 = \frac{g}{4r} \quad (6-5)$$

conclui-se que o ponto P realiza **movimento harmônico simples** de período

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 4\pi \sqrt{\frac{2r}{g}} \quad (6-6)$$

Portanto, estando o ponto P vinculado a uma cicloide, o período do movimento **NÃO** depende da sua posição inicial, como ocorre no caso em que P está vinculado a uma circunferência.

Tomando-se por referência a Fig.12, a cicloide pode ser descrita pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = r\theta + r \sin \theta \\ z = -r - r \cos \theta \end{cases} \quad (6-7)$$

em que o parâmetro θ corresponde ao ângulo de rolamento da **circunferência geradora** sobre a reta horizontal AB . Observe que:

- para $P \equiv O$, $\theta = 0$;
- para $P \equiv A$, $\theta = -\pi$;
- para $P \equiv B$, $\theta = \pi$.

Na forma vetorial, as equações (6-7) podem ser escritas como:

$$\vec{P}(\theta) = x_p \vec{i} + z_p \vec{k} = (r\theta + r \sin \theta) \vec{i} - (r + r \cos \theta) \vec{k} \quad (6-8)$$

A partir da equação vetorial (6-8) pode-se determinar o comprimento do arco curvilíneo s , medido entre as posições angulares θ_0 e θ , ou seja:

$$s(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} |\vec{P}'(\theta)| d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{(r + r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta} d\theta = 4r \left(\cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta_0}{2} \right) \quad (6-9)$$

TAREFA 7

- (a) Represente em espaço de estados a equação diferencial de segunda ordem (6-4).
- (b) Considere que o ponto P esteja vinculado a uma linha tubular em forma de cicloide, gerada por uma circunferência de raio $r = 1m$, e adote as seguintes condições iniciais: 1ª) $s_0 = 0$ e $\dot{s}_0 = 0$; 2ª) $s_0 = -r/10$ e $\dot{s}_0 = 0$; 3ª) $s_0 = -4r$ e $\dot{s}_0 = 0$. Em seguida, simule o movimento de P durante um tempo suficiente para observar 3 oscilações completas e, com auxílio da função **plot**, construa os seguintes gráficos: 1) $s = s(t)$; 2) $\dot{s} = \dot{s}(t)$; 3) $\ddot{s} = \ddot{s}(t)$; 4) $\dot{s} = \dot{s}(s)$; 4) $T = T(t)$; 5) $V = V(t)$; 6) $E(t) = T(t) + V(t)$.
- (c) Determine analiticamente o período do movimento de P e compare-o com o obtido nas simulações anteriores.
- (d) Determine o tempo para P percorrer o arco \widehat{AO} e compare-o com o tempo requerido para percorrer o segmento de reta \overline{AO} . Discuta os resultados obtidos.
- (e) Simule o movimento de P para a seguinte condição inicial: $s_0 = -4r$ e $\dot{s}_0 = 1$. Lembrando que o perímetro de uma cicloide é $\lambda = 8r$, note que o ponto P abandona o tubo, suposto aberto nas extremidades. Para lidar com essa situação, utilize a opção '**roots**' da função **ode**, de modo a interromper a simulação quando P estiver prestes a abandonar a linha tubular. (Se preferir, troque a equação do movimento de P no instante em que este estiver saindo da linha, substituindo-a pela de uma partícula que se move sob a ação exclusiva da força peso).

7. Ponto material vinculado a barra delgada flexível

Admitiremos que a pequena esfera P , de massa m , esteja vinculada a uma haste delgada e flexível de seção retangular, a qual é engastada em sua outra extremidade, conforme ilustrado na Fig. 13.

Para simplificar a análise, admitiremos ainda que a amplitude do movimento de P na direção vertical seja desprezível e que as propriedades elásticas de flexão da haste sejam caracterizadas por duas constantes de rigidez – k_x e k_y , segundo as direções x e y , respectivamente.

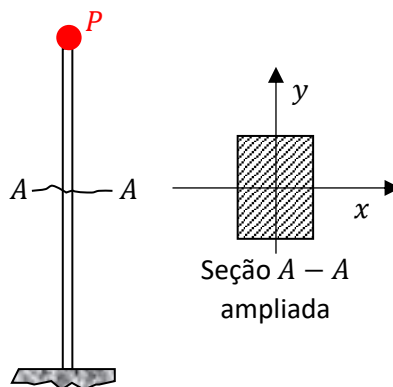


Figura 13. Ponto material vinculado a haste flexível, engastada em sua outra extremidade.

Isso posto, as equações diferenciais que governam o movimento de P no plano xy são:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k_x x \quad (7-1)$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -k_y y$$

Utilizando a nomenclatura

$$\omega_x = \sqrt{\frac{k_x}{m}} \quad , \quad \omega_y = \sqrt{\frac{k_y}{m}} \quad (7-2)$$

obtem-se o sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_x^2 x &= 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \omega_y^2 y &= 0\end{aligned}\tag{7-3}$$

cuja solução analítica, dada por

$$\begin{aligned}x &= a \cos(\omega_x t + \varphi_0^x) \\ y &= b \cos(\omega_y t + \varphi_0^y)\end{aligned}\tag{7-4}$$

representa a superposição de 2 movimentos harmônicos simples segundo as direções x e y , respectivamente, sendo que as constantes de integração $a, b, \varphi_0^x, \varphi_0^y$ são determinadas a partir das condições iniciais.

Alternativamente, as soluções 7-4 podem ser expressas como:

$$\begin{aligned}x &= C_1 \cos(\omega_x t) + C_2 \sin(\omega_x t) \\ y &= D_1 \cos(\omega_y t) + D_2 \sin(\omega_y t)\end{aligned}\tag{7-5}$$

Admitindo-se que, no instante $t = 0$, P esteja na posição $(x_0, y_0) = (a, 0)$ com velocidade $(v_0^x, v_0^y) = (0, v_0)$, obtêm-se:

$$C_1 = a, \quad C_2 = 0, \quad D_1 = 0, \quad D_2 = \frac{v_0}{\omega_y}$$

de modo que a lei do movimento de P fica descrita pelas equações

$$\begin{aligned}x &= a \cos(\omega_x t) \\ y &= b \sin(\omega_y t)\end{aligned}\tag{7-6}$$

A partir deste ponto, analisaremos 3 cenários:

- 1) $\omega_x = \omega_y$
- 2) $\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{Z}$
- 3) $\frac{\omega_x}{\omega_y} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

No **cenário 1**, vê-se que a trajetória de P é uma elipse, pois

$$x^2 = a^2 \cos^2(\omega t) \quad \text{e} \quad y^2 = b^2 \sin^2(\omega t)$$

ou seja,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\tag{7-7}$$

Nesse caso, diz-se que o movimento de P é **elíptico harmônico**, isto é, P descreve uma elipse, enquanto suas projeções segundo as direções x e y realizam movimentos harmônicos simples de mesma frequência angular.

No cenário 2, o movimento de P é **periódico** e suas trajetórias são curvas fechadas denominadas **curvas de Lissajous**.

No cenário 3, o movimento de P é **aperiódico** e suas trajetórias são curvas **não fechadas**.

TAREFA 8

- (a) Represente as equações 7-3 em espaço de estados.
- (b) Implemente a chamada à função **ode** do **Scilab** para integrar as equações diferenciais de primeira ordem obtidas no item (a).
- (c) Adotando $m = 0,1\text{kg}$ e $k_x = k_y = 5 \times 10^3 \text{ N/m}$, simule o movimento de P para condições iniciais que deem origem a uma trajetória: 1) elíptica; 2) retilínea (elipse degenerada, o que ocorre quando $x/y = a/b$ ou $x/y = -a/b$). **OBS:** os valores iniciais de x e y , bem como os de suas velocidades, devem ser pequenos (da ordem de alguns milímetros e de alguns milímetros/segundo, respectivamente) para que a hipótese de pequenas oscilações, implícita no modelo linear 7-1, seja válida.
- (d) Adotando $m = 0,1\text{kg}$, $k_x = 5 \times 10^3 \text{ N/m}$ e $k_y = k_x \frac{n}{m}$, simule o movimento de P para duas condições iniciais distintas, de livre escolha, considerando, em cada caso, $n/m = 1/2$, $n/m = 3/4$ e $n/m = 7/9$. **OBS:** Nos casos (c) e (d), o tempo de simulação deve ser suficiente para gerar trajetórias fechadas.
- (e) Adotando $m = 0,1\text{kg}$, $k_x = 5 \times 10^3 \text{ N/m}$ e $k_y = k_x R$, simule o movimento de P para duas condições iniciais distintas, de livre escolha, considerando $R = \sqrt{2}$ e $R = e$ (número de Euler).
- (f) Analise os resultados obtidos.

Referências bibliográficas

1. Armitage, J.V., Eberlein, W.F., Elliptic Functions. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
2. Bouligand, G., Mécanique Rationnelle. Librairie Vuibert, Paris, 1954.
3. Pars, L.A. A Treatise on Analytical Dynamics. London: Heinemann, 1965.
4. Pérès, J., Mécanique Général. Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1962.