Integrais Impróprias

Vinícius Morelli Cortes

16 de agosto de 2023

1 Introdução

Nosso objetivo, neste texto, é estender a noção de integral definida para funções e intervalos *ilimitados*. Esta nova noção de integral é chamada de *integral imprópria*.

2 Integrais impróprias em intervalos ilimitados

Definição 1. Seja $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função. Suponha que f seja integrável em $[a, t]$ para todo número real $t > a$. A *integral imprópria de f em $[a, +\infty)$* é definida por

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,dx.$$

Se o limite acima existe e é um número real, dizemos que a integral imprópria é *convergente*; caso contrário, dizemos que é *divergente*.

Analogamente, se $g : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ é uma função integrável em $[s, b]$ para todo número real $s < b$, a *integral imprópria de g em $(-\infty, b]$* é definida por

$$\int_{-\infty}^b g(x)\,dx = \lim_{s\to-\infty} \int_s^b g(x)\,dx.$$

Definição 2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função integrável em qualquer intervalo fechado e limitado. Se as duas integrais impróprias

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx \tag{1}$$

são convergentes, definimos a *integral imprópria de f em $\mathbb{R}$* por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Observação 1. Nas condições da Definição 2, para todo $a \in \mathbb{R}$ temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

De fato, notemos que

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \left(\int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^t f(x)\,dx \right) = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

e, analogamente,

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{s\to-\infty} \int_s^a f(x)\,dx = \lim_{s\to-\infty} \left(\int_s^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \right) = \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx.$$

Como

$$\int_0^a f(x)\,dx = -\int_a^0 f(x)\,dx,$$

concluímos que

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Observação 2. Se as duas integrais em (1) são iguais a $+\infty$ (respectivamente, $-\infty$), ou ainda se uma delas é convergente e a outra é igual a $+\infty$ (respectivamente, $-\infty$), definimos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty \left(\text{respectivamente, } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = -\infty\right).$$

Observação 3. Se as integrais impróprias

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx$$

são convergentes, então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^t f(x)\,dx.$$

De fato, como os limites

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^0 f(x)\,dx$$

existem, sabemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^t f(x)\,dx &= \lim_{t\to+\infty}\left(\int_0^t f(x)\,dx + \int_{-t}^0 f(x)\,dx\right)\\
&= \lim_{t\to+\infty}\int_0^t f(x)\,dx + \lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^0 f(x)\,dx\\
&= \lim_{t\to+\infty}\int_0^t f(x)\,dx + \lim_{s\to-\infty}\int_s^0 f(x)\,dx\\
&= \int_0^{+\infty} f(x)\,dx + \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

A recíproca *não* é verdadeira: a integral imprópria $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ é divergente, pois

$$\int_0^{+\infty} x\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t x\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^t = \lim_{t\to+\infty}\frac{t^2}{2} = +\infty$$

e, analogamente,

$$\int_{-\infty}^0 x\,dx = -\infty.$$

No entanto,

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^t x\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2}\right) = 0.$$

Vejamos, a seguir, alguns exemplos.

Exemplo 1. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\ln x\Big|_1^t = \lim_{t\to+\infty}\ln t = +\infty.$

Exemplo 2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^t = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right) = 1.$

Exemplo 3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\Big|_1^t = \lim_{t\to+\infty} \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{t^2}-1\right) = +\infty.$

Exemplo 4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} -e^{-x}\Big|_0^t = \lim_{t\to+\infty}(1-e^{-t}) = 1.$

Exemplo 5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4+x^2}\,dx$

No intervalo $[0,+\infty)$, temos

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{4+x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{1}{4+x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2}\arctan(x/2)\Big|_0^t = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2}\arctan(t/2) = \frac{\pi/2}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Como o integrando é uma função par, concluímos que

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{4+x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{4+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

e, portanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Exemplo 6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$

Usando integração por partes, obtemos

$$\int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -e^{-x}(x+1) + c,$$

de modo que

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t xe^{-x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} -e^{-x}(x+1)\Big|_0^t = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{t+1}{e^t}\right) = 1.$$

Exemplo 7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x\,dx$ é divergente, pois o limite

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \sin x\,dx = \lim_{t\to+\infty}(-\cos x)\Big|_0^t = \lim_{t\to+\infty}(1-\cos t)$$

não existe (justifique).

Exemplo 8. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln x\,dx$

Usando novamente integração por partes, temos

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c.$$

Logo, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln x\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \ln x\,dx = \lim_{t\to+\infty} x(\ln x - 1)\Big|_1^t = \lim_{t\to+\infty+}(\underbrace{t(\ln t-1)}_{\to+\infty}+1) = +\infty.$

3 Integrais impróprias de funções ilimitadas em intervalos limitados

Definição 3. Seja $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ uma função ilimitada. Suponha que f seja integrável em $[a, t]$ para todo número real $t \in [a, b)$. A *integral imprópria de f em $[a, b]$* é definida por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx.$$

Se o limite acima existe e é um número real, dizemos que a integral imprópria é *convergente*; caso contrário, dizemos que é *divergente*.

Analogamente, se $g : (a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função ilimitada e integrável em $[s, b]$ para todo número real $s \in (a, b]$, a *integral imprópria de g em $[a, b]$* é definida por

$$\int_a^b g(x)\,dx = \lim_{s\to a^+} \int_s^b g(x)\,dx.$$

Observação 4. Assim como fizemos na Definição 2 e na Definição 2, se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ é uma função ilimitada nos intervalos $(a, a+\delta]$ e $[b-\delta, b)$ para algum $0 < \delta < b - a$, a *integral imprópria de f em (a, b)* é definida por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^p f(x)\,dx + \int_p^b f(x)\,dx,$$

sempre que a soma acima fizer sentido, onde $p \in (a, b)$.

Exemplo 9. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{s\to 0^+} \int_s^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{s\to 0^+} \ln x\Big|_s^1 = \lim_{s\to 0^+} (-\ln s) = +\infty.$

Exemplo 10. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{s\to 0^+} \int_s^1 \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{s\to 0^+} -\frac{1}{2x^2}\Big|_s^1 = \lim_{s\to 0^+} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2} - 1\right) = +\infty.$

Exemplo 11. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{s\to 0^+} \int_s^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{s\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_s^1 = \lim_{s\to 0^+} 2(1-\sqrt{s}) = 2.$

Exemplo 12. $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$

Procedendo como fizemos no Exemplo 8, concluímos que

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{s\to 0^+} \int_s^1 \ln x\,dx = \lim_{s\to 0^+} x(\ln x - 1)\Big|_s^1 = \lim_{s\to 0^+} (-1 - s(\ln s - 1)) = \lim_{s\to 0^+} (-1 + s - \underbrace{s\ln s}_{\to 0}) = -1.$$

Exemplo 13. $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

Fazendo a mudança de variável $x = 3\sin u$, $u \in [-\pi/2, \pi/2]$, obtemos $dx = 3\cos u\,du$ e

$$\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = 3\int \frac{\cos u}{3\cos u}\,du = u + c = \arcsin(x/3) + c.$$

Deste modo, $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \lim_{t\to 3^-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \lim_{t\to 3^-} \arcsin(x/3)\Big|_0^t = \lim_{t\to 3^-} \arcsin(t/3) = \frac{\pi}{2}.$

Exemplo 14. $\int_0^1 \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$

Escrevendo $u = \ln x$, obtemos $du = \frac{1}{x}\,dx$ e

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \int \frac{1}{u^2}\,du = -\frac{1}{u} + c = -\frac{1}{\ln x} + c.$$

Agora, vamos escolher um número real $a \in (0,1)$ e analisar separadamente o que ocorre nos intervalos $[0,a]$ e $[a,1]$. No primeiro intervalo, temos

$$\int_0^a \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \lim_{s\to 0^+} \int_s^a \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \lim_{s\to 0^+} -\frac{1}{\ln x}\bigg|_s^a = \lim_{s\to 0^+}\left(\frac{1}{\ln s} - \frac{1}{\ln a}\right) = -\frac{1}{\ln a}.$$

E, no segundo intervalo,

$$\int_a^1 \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \lim_{t\to 1^-} \int_a^1 \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \lim_{t\to 1^-} -\frac{1}{\ln x}\bigg|_a^t = \lim_{t\to 1^-}\left(\frac{1}{\ln a} - \frac{1}{\ln t}\right) = +\infty.$$

Concluímos, portanto, que

$$\int_0^1 \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \int_0^a \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx + \int_a^1 \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = +\infty.$$

Exemplo 15. $\int_0^{\pi/2} \tan x\,dx$

Escrevendo $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ e usando a mudança $u = \cos x$, temos $du = -\sin x\,dx$ e

$$\int \tan x\,dx = -\int \frac{1}{u}\,du = -\ln|u| + c = -\ln|\cos x| + c.$$

Assim, $\int_0^{\pi/2} \tan x\,dx = \lim_{t\to\pi/2^-} \int_0^t \tan x\,dx = \lim_{t\to\pi/2^-} (-\ln|\cos x|)\Big|_0^t = \lim_{t\to\pi/2^-} (-\ln(\cos t)) = +\infty.$

Exemplo 16. $\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx = \lim_{t\to\pi/2^-} \int_0^t \sec x\,dx = \lim_{t\to\pi/2^-} \ln|\sec x + \tan x|\Big|_0^t = \lim_{t\to\pi/2^-} \ln(\sec t + \tan t) = +\infty.$

4 Combinando as definições anteriores

As Definições 1 e 3 podem ser combinadas de modo similar ao que fizemos na Definição 2.

Definição 4. Seja $f : (a,+\infty) \to \mathbb{R}$ uma função. Suponha que f seja integrável em qualquer intervalo fechado e limitado contido em $(a,+\infty)$ e que f seja ilimitada em $(a, a+\delta]$ para algum $\delta > 0$. Se existe $b > a$ tal que as duas integrais impróprias

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_b^{+\infty} f(x)\,dx \tag{2}$$

são convergentes, definimos a *integral imprópria de f em $[a,+\infty)$* por

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Fica a cargo do leitor enunciar versões das Observações 1, 2 e 3 no contexto da Definição 4, fazendo as modificações naturais, bem como elaborar a definição análoga para um intervalo da forma $(-\infty, b)$.

Exemplo 17. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln x\, dx$

Decorre imediatamente dos Exemplos 8 e 12 que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln x\, dx = +\infty$.

Exemplo 18. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\, dx$

Fazendo a mesma mudança de variável do Exemplo 14, obtemos

$$\int \frac{1}{x\ln x}\, dx = \ln|\ln x| + c.$$

Dado um número real $a > 1$, temos

$$\int_1^a \frac{1}{x\ln x}\, dx = \lim_{s\to 1^+} \int_1^a \frac{1}{x\ln x}\, dx = \lim_{s\to 1^+} \ln|\ln x|\Big|_s^a = \lim_{s\to 1^+} (\ln(\ln a) - \ln(\ln s)) = +\infty$$

e, analogamente,

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\, dx = \lim_{t\to +\infty} \int_a^t \frac{1}{x\ln x}\, dx = \lim_{t\to +\infty} \ln|\ln x|\Big|_a^t = \lim_{t\to +\infty} (\ln(\ln t) - \ln(\ln a)) = +\infty.$$

Deste modo, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\, dx = +\infty$.

Exemplo 19. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx$

Usando mais uma vez a mudança de variável do Exemplo 14,

$$\int \frac{\ln x}{x}\, dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + c.$$

Dado um número real $a > 0$, notemos que

$$\int_0^a \frac{\ln x}{x}\, dx = \lim_{s\to 0^+} \int_s^a \frac{\ln x}{x}\, dx = \lim_{s\to 0^+} \frac{(\ln x)^2}{2}\Big|_s^a = \lim_{s\to 0^+} \frac{1}{2}((\ln a)^2 - (\ln s)^2) = -\infty$$

e, por outro lado,

$$\int_a^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx = \lim_{t\to +\infty} \int_a^t \frac{\ln x}{x}\, dx = \lim_{t\to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{2}\Big|_a^t = \lim_{t\to +\infty} \frac{1}{2}((\ln t)^2 - (\ln a)^2) = +\infty.$$

Assim, a integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx$ é divergente.

Exemplo 20. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\, dx$

Escrevendo $u = \sqrt{x}$, obtemos $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$ e

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\, dx = 2\int \frac{1}{u^2+1}\, du = 2\arctan u + c = 2\arctan(\sqrt{x}) + c.$$

Assim, dado $a > 0$, temos

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\, dx = \lim_{s\to 0^+} \int_s^a \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\, dx = \lim_{s\to 0^+} 2\arctan(\sqrt{x})\Big|_s^a = 2\arctan(\sqrt{a})$$

e também

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx = \lim_{t\to+\infty} 2(\arctan(\sqrt{t}) - \arctan(\sqrt{a})) = \pi - 2\arctan(\sqrt{a}).$$

Logo, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx = \pi$.

Exemplo 21. $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(x+1) - \ln x)\,dx$

Usando integração por partes (verifique), obtemos

$$\begin{aligned}\int (\ln(x+1) - \ln x)\,dx &= (x+1)\ln(x+1) - x\ln x + c\\ &= (x+1)(\ln(x+1) - \ln x) + \ln(x+1) + c\\ &= x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \ln(x+1) + c.\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_1^{+\infty} (\ln(x+1) - \ln x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \ln(x+1)\right)\Bigg|_1^t = \lim_{t\to+\infty}\left(\underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^t}_{\to\ln e=1} + \underbrace{\ln(t+1)}_{\to+\infty} - 2\ln 2\right) = +\infty$$

e, analogamente,

$$\int_0^1 (\ln(x+1) - \ln x)\,dx = \lim_{s\to0^+}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \ln(x+1)\right)\Bigg|_s^1 = \lim_{s\to0^+}\left(2\ln 2 - \underbrace{s\ln\left(1+\frac{1}{s}\right)}_{\to0} - \underbrace{\ln(s+1)}_{\to0}\right) = 2\ln 2,$$

pois $\displaystyle\lim_{s\to0^+} s\ln\left(1+\frac{1}{s}\right) = 0$ (verifique, usando a Regra de L'Hospital). Logo, $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(x+1) - \ln x)\,dx = +\infty$.

5 Critérios de Convergência

Frequentemente, estamos interessados apenas em determinar se uma dada integral imprópria é convergente ou divergente. Esta última seção é dedicada ao estudo de dois critérios simples para analisar a convergência de uma integral imprópria. Os critérios serão enunciados para integrais da forma $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$; os outros casos podem ser obtidos fazendo as mudanças naturais no enunciado. O primeiro critério, o Teorema 1, é uma consequência da observação a seguir.

Lema 1. *Seja $F : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ uma função crescente.*

(i) Se F é limitada superiormente e $S = \sup\{F(t) : t \geq a\}$, então $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} F(t) = S$.

(ii) Se F não é limitada superiormente, então $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} F(t) = +\infty$.

Demonstração. (i) Vamos mostrar, por definição, que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} F(t) = S$. Fixado $\varepsilon > 0$, como $S-\varepsilon$ não é limitante superior do conjunto $\{F(t) : t \geq a\}$, existe $t_0 \geq a$ tal que $F(t_0) > S - \varepsilon$. Como F é crescente, temos

$$t \geq t_0 \implies F(t) \leq F(t_0) \implies S - \varepsilon < F(t) \leq S \implies |F(t) - S| < \varepsilon.$$

Logo, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} F(t) = S$.

(ii) Usaremos novamente a definição. Fixado $M > 0$, como F não é limitada superiormente, existe $t_0 > a$ tal que $F(t_0) > M$. Agora, como F é crescente, temos

$$t \geq t_0 \implies F(t) \geq F(t_0) > M \implies F(t) > M.$$

Isto significa que $\lim_{t\to+\infty} F(t) = +\infty$, como desejado. □

Teorema 1 (Critério da Comparação). *Sejam $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ duas funções integráveis em $[a, t]$ para todo número real $t > a$ e tais que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para todo $x \geq a$. Então temos:*

(i) Se $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ é convergente, então $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ também é convergente.

(ii) Se $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$, então $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx = +\infty$.

Demonstração. Consideremos as funções $F, G : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ dadas por

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,dx \quad \text{e} \quad G(t) = \int_a^t g(x)\,dx.$$

Afirmamos que F e G são crescentes. De fato, dados $t_2 \geq t_1 \geq a$, temos

$$F(t_2) = \int_a^{t_2} f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^{t_1} f(x)\,dx}_{F(t_1)} + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx}_{\geq 0} \geq F(t_1)$$

e, analogamente, $G(t_2) \geq G(t_1)$. Notemos também que $F(t) \leq G(t)$ para todo $t \geq a$, pois

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,dx \leq \int_a^t g(x)\,dx = G(t).$$

(i) Como, por hipótese, o limite $\lim_{t\to+\infty} G(t) = \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ existe e é um número real, o Lema 1 assegura que G é limitada superiormente; e, como $F(t) \leq G(t)$ para todo $t \geq a$, F também é limitada superiormente. Aplicando novamente o Lema 1, concluímos que o limite $\lim_{t\to+\infty} F(t) = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ também existe e é um número real, isto é, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ é convergente.

(ii) Como $\lim_{t\to+\infty} F(t) = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$, o Lema 1 garante que F não é limitada superiormente e, portanto, G também não é limitada superiormente. Aplicando mais uma vez o Lema 1, deduzimos que $\lim_{t\to+\infty} G(t) = \int_a^{+\infty} g(x)\,dx = +\infty$, como queríamos. □

Para aplicar o Critério da Comparação, é conveniente ter em mente o resultado a seguir, cuja demonstração é deixada como exercício.

Proposição 1. *Seja $r > 0$ um número real.*

(i) Se $r > 1$, então $\int_0^1 \frac{1}{x^r}\,dx = +\infty$ e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r}\,dx$ é convergente.

(ii) Se $0 < r < 1$, então $\int_0^1 \frac{1}{x^r}\,dx$ é convergente e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r}\,dx = +\infty$.

(iii) Se $r = 1$, então $\int_0^1 \frac{1}{x^r}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r}\,dx = +\infty$.

Exemplo 22. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x^3}\, dx$ é convergente, pois

$$0 \leq \frac{\cos^2 x}{x^3} \leq \frac{1}{x^3}, \forall x > 0,$$

e a integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx$ é convergente.

Exemplo 23. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x + e^x}\, dx$ é convergente, pois

$$0 < \frac{1}{x + e^x} \leq \frac{1}{e^x}, \forall x \geq 0,$$

e a integral $\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx$ é convergente, de acordo com o Exemplo 4.

Exemplo 24. $\int_1^{+\infty} \frac{1 + \cos^2 x}{\sqrt{x}(2 - \sin x)}\, dx = +\infty$, pois, para todo $x \geq 1$,

$$1 \leq 2 - \sin x \leq 3 \implies \frac{1}{2 - \sin x} \geq \frac{1}{3} \implies \frac{1 + \cos^2 x}{\sqrt{x}(2 - \sin x)} \geq \frac{1 + \cos^2 x}{3\sqrt{x}} \geq \frac{1}{3\sqrt{x}}$$

e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{3\sqrt{x}}\, dx = +\infty$.

Exemplo 25. $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^6 + 1}}\, dx$

Para encontrar uma estimativa para o integrando que nos permita aplicar o Critério da Comparação, será conveniente analisar, primeiramente, o intervalo $[1, +\infty)$. Para todo $x \geq 1$ temos

$$x^6 + 1 \geq x^6 \implies \sqrt{x^6 + 1} \geq x^3 \geq 1 \implies 0 < \frac{1}{\sqrt{x^6 + 1}} \leq \frac{1}{x^3} \implies 0 < \frac{x}{\sqrt{x^6 + 1}} \leq \frac{1}{x^2}.$$

Como a integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ é convergente, sabemos que $\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^6 + 1}}\, dx$ também é convergente. Logo,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^6 + 1}}\, dx = \int_0^{1} \frac{x}{\sqrt{x^6 + 1}}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^6 + 1}}\, dx$$

é convergente.

Exemplo 26. $\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{x^3 + 1}}\, dx$

Fatorando o denominador, obtemos $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$, isto é,

$$\frac{x^3 + 1}{x + 1} = x^2 - x + 1, \forall x \neq -1.$$

É fácil verificar que $x = 1/2$ é o único ponto crítico da função $f(x) = x^2 - x + 1$. Como f é um polinômio de segundo grau com coeficiente dominante positivo, trata-se de um ponto de mínimo global. Logo,

$$f(x) \geq f(1/2) = 3/4, \forall x \in \mathbb{R},$$

de modo que

$$x > -1 \implies \frac{x^3+1}{x+1} \geq \frac{3}{4} \implies 0 < \frac{x+1}{x^3+1} \leq \frac{4}{3} \implies \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^3+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \implies 0 < \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{3(x+1)}}.$$

Como a integral $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$ é convergente (verifique, usando a mudança de variável $u = x+1$), concluímos que $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$ também é convergente.

Exemplo 27. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\ln x}\,dx$

Como a função logaritmo tem concavidade para baixo e a reta tangente ao seu gráfico no ponto $(1,0)$ tem equação $y = x-1$, sabemos que

$$0 < \ln x < x-1, \forall x > 1.$$

Consequentemente,

$$\frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x-1}, \forall x > 1.$$

Agora, como $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{x-1}\,dx = \int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x-1}\,dx = +\infty$ (verifique), resulta que $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{\ln x}\,dx = \int_{2}^{+\infty} \frac{1}{\ln x}\,dx = +\infty$ e, portanto, $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\ln x}\,dx = +\infty$.

Exemplo 28. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \sin(1/x)\,dx$

De acordo com o Limite Trigonométrico Fundamental, sabemos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(1/x)}{1/x} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

Logo, existe $M > 1$ tal que

$$x \geq M \implies \frac{\sin(1/x)}{1/x} > \frac{1}{2} \implies \sin(1/x) > \frac{1}{2x}.$$

Como $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty$, temos $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \sin(1/x)\,dx = +\infty$. (Outra opção é estudar o crescimento da função auxiliar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sin x - \frac{x}{2}$.)

Exemplo 29. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{\sin\left(x^4\right)}\,dx$

Usando novamente o Limite Trigonométrico Fundamental, concluímos que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x}{\sin(x^4)}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^4}{\sin\left(x^4\right)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{y}{\sin y} = 1.$$

Logo, existe $0 < \delta \leq 1$ tal que

$$0 < x \leq \delta \implies \frac{\frac{x}{\sin(x^4)}}{\frac{1}{x^3}} > \frac{1}{2} \implies \frac{x}{\sin\left(x^4\right)} > \frac{1}{2x^3}.$$

Como $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx = +\infty$, temos $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{\sin\left(x^4\right)}\,dx = +\infty$.

Exemplo 30. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(1/x)}{x}\, dx = +\infty$, observando que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos(1/x) = \lim_{y\to 0^+} \cos y = 1$ e argumentando de modo semelhante ao que fizemos no Exemplo 28.

Teorema 2 (Critério do Módulo)**.** *Seja $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a,t]$ para todo número real $t > a$. Se $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ é convergente, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ também é convergente e*

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)\, dx\right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx.$$

Demonstração. Para todo $x \geq a$ temos

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \implies 0 \leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)|.$$

Decorre do Critério da Comparação que a integral $\displaystyle\int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|)\, dx$ é convergente; logo, o limite

$$\lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\, dx = \lim_{t\to+\infty} \left(\int_a^t (f(x) + |f(x)|)\, dx - \int_a^t |f(x)|\, dx \right) = \int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|)\, dx - \int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$$

existe e é um número real, ou seja, a integral $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ é convergente. Para encerrar a demonstração, basta notar que

$$\left|\int_a^t f(x)\, dx\right| \leq \int_a^t |f(x)|\, dx, \forall\, t \geq a,$$

e aplicar o Teorema do Confronto. □

Exemplo 31. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \cos\left(x^2\right)\, dx$

Vamos usar integração por partes de uma maneira conveniente. Para cada $t \geq 1$ temos

$$\int_1^t \cos\left(x^2\right)\, dx = \int_1^t \frac{1}{x}\left(x\cos\left(x^2\right)\right)\, dx = \left.\frac{\sin\left(x^2\right)}{2x}\right|_1^t + \int_1^t \frac{\sin\left(x^2\right)}{2x^2}\, dx = \frac{\sin\left(t^2\right)}{2t} - \frac{\sin 1}{2} + \int_1^t \frac{\sin\left(x^2\right)}{2x^2}\, dx.$$

Como

$$0 \leq \frac{\left|\sin\left(x^2\right)\right|}{2x^2} \leq \frac{1}{2x^2}, \forall\, x \neq 0,$$

aplicando os Critérios da Comparação e do Módulo concluímos que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(x^2\right)}{2x^2}\, dx$ é convergente. Deste modo, o limite

$$\lim_{t\to+\infty} \left(\underbrace{\frac{\sin\left(t^2\right)}{2t}}_{\to 0} - \frac{\sin 1}{2} + \int_1^t \frac{\sin\left(x^2\right)}{2x^2}\, dx \right) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(x^2\right)}{2x^2}\, dx - \frac{\sin 1}{2}$$

existe e é um número real, isto é, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \cos\left(x^2\right)\, dx$ é convergente.

Encerramos este texto com dois exemplos que revelam que a recíproca do Critério do Módulo *não* é verdadeira.

Exemplo 32. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$

Vamos usar um argumento análogo ao do exemplo anterior. Para cada $t \geq 1$, usando integração por partes, temos

$$\int_1^t \frac{\sin x}{x}\, dx = -\left.\frac{\cos x}{x}\right|_1^t - \int_1^t \frac{\cos x}{x^2}\, dx = \cos 1 - \frac{\cos t}{t} - \int_1^t \frac{\cos x}{x^2}\, dx.$$

Como

$$0 \leq \frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}, \forall x \neq 0,$$

os Critérios da Comparação e do Módulo asseguram que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ é convergente e, portanto, o limite

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left(\cos 1 - \underbrace{\frac{\cos t}{t}}_{\to 0} - \int_1^t \frac{\cos x}{x^2}\,dx\right) = 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

existe e é um número real, isto é, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ é convergente.

Exemplo 33. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$

Observamos primeiramente que

$$|\sin x| \leq 1 \implies \sin^2 x \leq |\sin x| \implies \frac{\sin^2 x}{x} \leq \frac{|\sin x|}{x},$$

para todo $x > 0$. Agora, para cada $t \geq 1$ temos

$$\int_1^t \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \int_1^t \frac{1-\cos(2x)}{2x}\,dx = \int_1^t \frac{1}{2x}\,dx - \int_1^t \frac{\cos(2x)}{2x}\,dx$$

e, usando novamente integração por partes, a última integral do membro direito pode ser escrita como

$$\int_1^t \frac{\cos(2x)}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\bigg|_1^t + \int_1^t \frac{\sin(2x)}{2x^2}\,dx\right) = \frac{\sin(2t)}{4t} - \frac{\sin 2}{4} + \int_1^t \frac{\sin(2x)}{4x^2}\,dx.$$

de modo que

$$\int_1^t \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \int_1^t \frac{1}{2x}\,dx - \frac{\sin(2t)}{4t} + \frac{\sin 2}{4} - \int_1^t \frac{\sin(2x)}{4x^2}\,dx.$$

Como

$$0 \leq \frac{|\sin(2x)|}{4x^2} \leq \frac{1}{4x^2}, \forall x \neq 0,$$

os Critérios da Comparação e do Módulo mais uma vez asseguram que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{4x^2}\,dx$ é convergente. Isto implica que

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left(\underbrace{\int_1^t \frac{1}{2x}\,dx}_{\to+\infty} - \underbrace{\frac{\sin(2t)}{4t}}_{\to 0} + \frac{\sin 2}{4} - \underbrace{\int_1^t \frac{\sin(2x)}{4x^2}\,dx}_{\text{convergente}}\right) = +\infty$$

e uma segunda aplicação do Critério da Comparação garante que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = +\infty$.