UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA

COLETÂNEA DE EXERCÍCIOS

FÍSICA II - 4302112 - PERÍODO NOTURNO

PROFESSORA RESPONSÁVEL:

LUCY VITÓRIA CREDIDIO ASSALI

SÃO PAULO
1º SEMESTRE/2019

Índice

1 Oscilador Harmônico

1. Uma partícula cuja massa é 0,50 kg move-se em um movimento harmônico simples. O período de oscilação é de 0,10 s e a amplitude do movimento é 0,10 m. Quando a partícula está a 0,050 m da posição de equilíbrio pede-se:

   (a) Qual é a magnitude da força que age sobre a partícula?

   (b) Qual é a sua energia cinética?

   R.: (a) $F = 10\,\pi^2$ N (b) $E = 0,75\,\pi^2$ J

2. Uma partícula oscila em movimento harmônico simples com período $T = 2$ s. O sistema está, inicialmente, na posição de equilíbrio com velocidade escalar de 4 m/s no sentido de x crescente. Escrever as expressões da sua posição $x(t)$, da sua velocidade $v(t)$ e da sua aceleração $a(t)$. Represente graficamente essas funções.

   R.: $x(t) = \frac{4}{\pi}\cos(\pi t - \pi/2); v(t) = -4\,\mathrm{sen}(\pi t - \pi/2); a(t) = -4\pi\cos(\pi t - \pi/2)$.

3. A posição de uma partícula é dada por $x(t) = \mathrm{sen}(2t)$ (SI).

   (a) Qual é o valor máximo de x? Qual é o primeiro instante depois de $t = 0$ s em que ocorre esse máximo?

   (b) Encontre $v(t)$. Qual é a velocidade em $t = 0$ s?

   (c) Encontre $a(t)$. Qual é a aceleração em $t = 0$ s?

   (d) Qual é o valor máximo da aceleração?

   R.: (a) $x_{\text{máx}} = 1$ m e ocorre em $t = \pi/4$ s.

   (b) $v(t) = 2\cos(2t)$ e $v(t = 0) = 2$ m/s.

   (c) $a(t) = -4\,\mathrm{sen}(2t)$ e $a(t = 0) = 0$.

   (d) Ela é máxima quando $t = \dfrac{(2n+1)\pi}{4}$ s, onde n =inteiro.

   Seu módulo é $a = 4$ m/s^2.

4. Um corpo de massa 500 g executa um movimento harmônico simples com um período de 0,5 s. A sua energia total é de 5 J.

(a) Qual é a amplitude das oscilações?

(b) Qual é a velocidade máxima?

(c) Qual é a aceleração máxima?

R.: (a) $A = \sqrt{5}/(2\pi)$ m; (b) $v_{\text{máx}} = 2\sqrt{5}$ m/s; (c) $a_{\text{máx}} = 8\sqrt{5}\,\pi$ m/s^2.

5. Uma partícula de 200 g está presa a uma mola de constante elástica $k = 5$ N/m e pode oscilar livremente sobre uma superfície horizontal sem atrito. Se a massa for deslocada de 5 cm da sua posição de equilíbrio determine:

   (a) O período do seu movimento;

   (b) A máxima velocidade da partícula;

   (c) A máxima aceleração da partícula.

   (d) Expresse o deslocamento, a velocidade e a aceleração da partícula como função do tempo (SI).

   (e) Qual é a energia total do sistema?

   R.: (a) $T = 0,4\pi$ s; (b) $v_{\text{máx}} = 0,25$ m/s; (c) $a_{\text{máx}} = 1,25$ m/s^2.
   (d) $x(t) = 0,05\cos(5t)$; $v(t) = -0,25\,\text{sen}(5t)$; $a(t) = -1,25\cos(5t)$.
   (e) $E = 62,5 \times 10^{-4}$ J.

6. A uma mola de massa desprezível e constante $k = 21$ N/m encontra-se presa ao teto. Na sua extremidade livre é pendurado um bloco de 300 g e o sistema é abandonado sob a ação do peso da massa e da força da mola. O sistema oscila harmonicamente, sem movimento pendular.

   (a) Qual é a elongação vertical (y_e) da mola, distância entre o ponto de equilíbrio da mola sem o bloco e do ponto de equilíbrio do sistema massa-mola?

   (b) Qual é a frequência das oscilações? E a amplitude?

   (c) Escreva a equação do movimento e encontre $y(t)$.

   R.: (a) $y_e = \frac{mg}{k} = 1/7$ m; (b) $\omega_o^2 = \frac{k}{m} = 70\text{s}^{-2} \rightarrow \omega_0 \approx 8,4\ \text{s}^{-1}$ e $A = y_e$.
   (c) $y(t) = \frac{mg}{k}\left[1 + \cos(\omega_0 t)\right] = \frac{1}{7}\left[1 + \cos(\sqrt{70}\,t)\right]$ (m).

7. Um bloco de massa M, capaz de deslizar com atrito desprezível sobre um trilho de ar horizontal, está preso a uma extremidade do trilho por uma mola de massa desprezível e constante elástica k, inicialmente relaxada. Uma bolinha de chiclete de massa m, lançada em direção ao bloco com velocidade horizoltal v, atinge-o no instante $t = 0$ e fica grudada nele. Ache a expressão do deslocamento $x(t)$ do sistema para $t > 0$ s.

   R: $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$ com $A = \dfrac{m\,v}{(m+M)\omega_0}$, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m+M}}$, $\phi = -\pi/2$.

8. Um pêndulo simples é formado por uma massa de 12 kg, suspensa no teto por um fio ideal de comprimento $L = 2,5$ m. O pêndulo está inicialmente parado quando, em $t = 1$ s, a massa recebe um impulso lateral, que lhe confere uma velocidade de 1 cm/s. Escreva a equação diferencial que descreve o movimento, na aproximação de pequenas oscilações. Determine a posição angular $\theta(t)$, onde θ é o ângulo que o fio faz com a direção vertical. Sugestão: utilize $\theta(t) = \theta_0 \mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$.

   R.: $\theta(t) = 0,002\,\mathrm{sen}(2t - 2)$.

9. Um oscilador, com massa de 50 g e período 2,0 s, tem uma amplitude que decresce 5% em cada ciclo. Determine:

   (a) A constante de amortecimento;

   (b) A fração da energia dissipada em cada ciclo;

   (c) O tempo necessário para que a amplitude de oscilação caia à metade do valor inicial.

   R.: (a) $\rho = 2,565$ g/s; (b) $\frac{\Delta E}{E} = 9,75\%$; (c) $t = 27$ s.

10. O movimento de recuo de um canhão é amortecido sob o efeito de um sistema de molas imerso em óleo. A constante elástica do sistema é $k = 7,0 \times 10^4$ N/m e a massa do cano do canhão é 700 kg. Determinar o coeficiente ρ da força de resistência viscosa do óleo para que o cano do canhão volte à posição de equilíbrio o mais depressa possível, sem oscilar.

    R.: $\rho = 1,4 \times 10^4$ N $\cdot$ s/m .

11. Um pêndulo simples oscila com período de 2 segundos e amplitude de 2°. Após dez oscilações completas a amplitude se reduz a 1,5°. Determine a constante de amortecimento γ.

    R.: $\gamma = 0,0288$ s^{-1}.

12. Um corpo de massa $m = 0,5$ kg, oscila sob a ação da força de uma mola, de constante elástica $k = 50,5$ N/m, e de uma força amortecedora $F = -(dx/dt)$. Sabendo-se que em $t = 0$ s o corpo é abandonado a uma distância x_0 da posição de equilíbrio, pede-se:

    (a) Determine $x(t)$.

    (b) Calcule a variação percentual de energia durante o primeiro ciclo de oscilação.

    R.: (a) $x(t) = A\,\mathrm{e}^{-t}\cos(10t + \varphi)$, com $\varphi \simeq 5,7°$ e $A = \frac{x_0}{\cos\varphi}$.
    (b) $\frac{\Delta E}{E} = -0,72 \;\Rightarrow\; 72\%$

13. Um corpo de massa $m = 50$ g está preso a uma mola e oscila livremente com uma frequência angular de 20 rad/s. Este oscilador é posteriormemte colocado num meio cujo coeficiente de atrito viscoso é $\rho = 0,25$ kg/s. Nestas condições, o oscilador é mantido em regime estacionário devido a uma força externa $F = F_0\cos(\omega t)$ onde $F_0 = 0,25$ N e $\omega = 20$ rad/s. Determine para esta última situação:

    (a) A equação diferencial que descreve o movimento, explicitando os valores numéricos dos coeficientes e indicando suas respectivas unidades;

    (b) A amplitude do movimento;

    (c) Em que instantes a elongação, em módulo, é máxima.

    Subitamente, a força externa é desligada, num instante em que a elongação é máxima. Determine, para esta nova situação:

    (d) A equação diferencial que descreve o movimento, explicitando os valores numéricos dos coeficientes e indicando suas respectivas unidades;

    (e) A frequência angular de oscilação ω'.

R.: (a) $\ddot{x} + 5\dot{x} + 400x = 5\cos(20t)$; (b) $A = 0,05$ m; (c) $t = \frac{(2n+1)\pi}{40}$ s.
(d) $\ddot{x} + 5\dot{x} + 400x = 0$; (e) $\omega' = 19,84\ \mathrm{s}^{-1}$.

14. Um corpo de massa $m = 50$ kg está preso a uma mola horizontal de constante elástica $k = 1,125\times10^4$ N/m. Uma força harmônica, de amplitude $F_{\text{máx}} = 45$ N, atua sobre o corpo ao longo da direção horizontal. Considerando-se a existência de atrito viscoso com o coeficiente $\rho = 100,0\ \mathrm{N\cdot s/m}$, determine para o regime estacionário:

    (a) A frequência de ressonância;

    (b) A amplitude máxima de ressonância;

    (c) A defasagem entre o máximo da força harmônica e o máximo da amplitude.

    R.: (a) $\omega_{\mathrm{R}} = 14,93\ \mathrm{s}^{-1}$; (b) $A_{\mathrm{R}} = 0,03$ m; (c) $\varphi \approx 86,2°$.

15. Mostre que o valor médio da variação da energia, no tempo, de um oscilador amortecido forçado é nulo, ou seja, mostre que $\overline{\dfrac{dE}{dt}} = 0$.

    R.: A expressão que descreve a variação da energia total em função do tempo é: $\dfrac{dE}{dt} = \dot{x}[m\ddot{x} + kx]$. Como

$$\begin{aligned} x(t) &= A(\omega)\cos(\omega t + \varphi) \\ \dot{x}(t) &= -\omega A(\omega)\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi) \\ \ddot{x}(t) &= -\omega^2\, x(t), \end{aligned}$$

então, substituindo estas equações na expressão de $\frac{dE}{dt}$, temos:

$$\frac{dE}{dt} = A^2 m\omega\left[\omega^2 - \omega_0^2\right]\,\mathrm{sen}^2\left[(\omega t + \varphi)\right] \Rightarrow \overline{\frac{dE}{dt}} = 0.$$

16. Considere um sistema massa-mola imerso em um meio viscoso numa oscilação harmônica forçada. Determine:

    (a) A potência média fornecida ao sistema massa-mola;

    (b) A potência fornecida ao sistema quando há ressonância.

R.: (a) $\overline{P}(\omega) = \dfrac{\gamma F_0^2}{2m} \dfrac{\omega^2}{\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2\right]}$.

(b) Na ressonância $\omega_R = \omega_0$ e $\overline{P}(\omega) = \frac{F_0^2}{2m\gamma}$.

2 Ondas mecânicas e sonoras

17. A função de onda de uma onda harmônica numa corda, no SI, é dada por

$$y(x,t) = 0,001\,\text{sen}\,[62,8x + 314t]$$

(a) Em que sentido a onda avança e qual a sua velocidade?

(b) Calcular o comprimento de onda, a frequência e o período da onda;

(c) Qual a aceleração máxima de um ponto da corda?

R.: (a) A onda avança no sentido negativo do eixo x com velocidade $v = 5$ m/s; (b) $\lambda = 10$ cm, $\tau = 0,02$ s e $\nu = 50$ Hz; (c) $a_{\text{máx}} = 98,6$ m/s^2.

18. Mostrar explicitamente que as seguintes funções são soluções da equação de onda:

(a) $y(x,t) = k(x + vt)$;

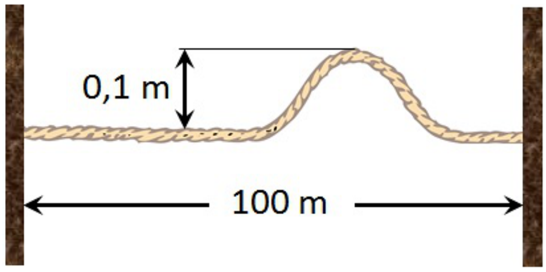
(b) $y(x,t) = A\,\text{e}^{ik(x-vt)}$ (A é uma constante);

(c) $y(x,t) = \ln[k(x - vt)]$.

19. A figura abaixo mostra um pulso em uma corda com as extremidades fixas, de comprimento 100 m. O pulso está se deslocando com velocidade de 40 m/s e é descrito, no SI, pela função

$$y(x,t) = 0,1\,\text{e}^{-4(x-vt)^2},$$

(a) Qual o valor de x, para o qual a velocidade transversal da corda é máxima, em $t = 0$?



(b) Qual a função que representa o pulso refletido, em um instante t, logo após sua primeira reflexão?

(c) Se a massa da corda é 2 kg, qual a tensão T nesta?

(d) Escreva uma equação para $y(x,t)$ que descreva numericamente uma onda senoidal, se deslocando na direção negativa de x, com $\lambda = 5$ m e mesma amplitude da onda anterior, em uma corda muito longa, feita do mesmo material, com a mesma tensão acima, e tal que $y(0,0) = 0$.

R.: (a) $x = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ m; (b) $y(x,t) = -0,1\mathrm{e}^{-4(x+vt)^2}$ m; (c) $T = 32$ N;
(d) $y(x,t) = 0,1\,\mathrm{sen}\left[\frac{2\pi}{5}x + 16\pi t\right]$ m.

20. A figura abaixo mostra duas fotografias, tiradas em instantes de tempo diferentes, de uma corda na qual se propaga, no sentido positivo do eixo x, uma onda harmônica transversal $y(x,t)$. A primeira fotografia (linha cheia) foi tirada no instante de tempo $t = 0$ e a segunda fotografia (linha tracejada) no instante $t = 0,50$ s.

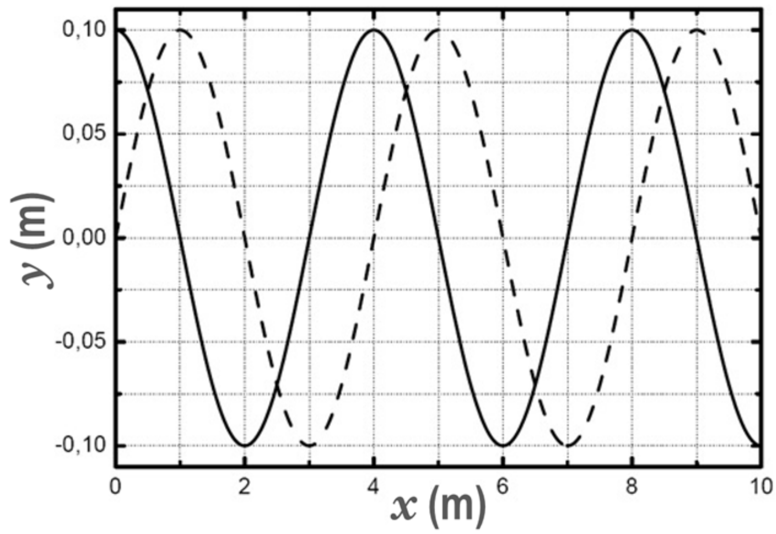
(a) Determine a velocidade v de propagação da onda na corda;

(b) Determine a amplitude, o número de onda, a frequência angular e a constante de fase, escrevendo a equação do perfil de onda $y(x,t)$;

(c) Determine a velocidade transversal máxima ($v_{y,máx}$), de um ponto da corda.

R.: (a) $v = 2$ m/s; (b) $A = 0,1$ m, $k = 0,5\pi$ m^{-1}, $\omega = \pi$ s^{-1}, $\delta = 0$,
$y(x,t) = 0,1\cos\left[\dfrac{\pi}{2}x - \pi t\right]$ m; (c) $v_{y,máx} = 0,1\pi$ m/s.

21. O perfil de uma onda transversal progressiva, em uma corda muito longa, é



dado por:

$$y(x,t) = 2,0 \times 10^{-2} \cos\left[2\pi\left(0,5x + 10t\right)\right] \quad \text{(no SI)}.$$

Determine:

(a) A amplitude de vibração desta corda;

(b) O comprimento de onda e a frequência (em Hz);

(c) O sentido e a velocidade de propagação da onda;

(d) A distância, ao longo da corda, entre dois pontos cuja diferença de fase é $\pi/6$.

R.: (a) $A = 2,0 \times 10^{-2}$ m; (b) $\lambda = 2$ m e $\nu = 10$ Hz; (c) $v = 20$ m/s no sentido negativo do eixo x; (d) $x_2 - x_1 = \frac{1}{6} = 0,17$ m.

22. Determine a amplitude da onda resultante da combinação de duas ondas senoidais que se propagam no mesmo sentido, possuem mesma frequência, têm amplitudes de 3,0 cm e 4,0 cm, e a onda de maior amplitude está com a fase adiantada de $\frac{\pi}{2}$ rad.

R.: $y(x,t) = 5,0 \,\text{sen}\,(kx - \omega t + 0,93)$ cm.

23. Uma onda estacionária resulta da soma de duas ondas transversais progressivas dadas, no SI, por:

$$\begin{cases} y_1(x,t) = 0,05\cos(\pi x - 4\pi t) \\ y_2(x,t) = 0,05\cos(\pi x + 4\pi t) \end{cases}$$

(a) Qual é o menor valor positivo de x que corresponde a um nodo?

(b) Em quais instantes, no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 0,5$ s, a partícula em $x = 0$ terá velocidade nula?

R.: (a) $x = 0,5$ m; (b) $t = 0$ s, $t = 0,25$ s e $t = 0,5$ s.

24. Uma corda que está presa em suas extremidades em $x = 0$ e $x = L$, submetida a uma tensão de 96 N, oscila no terceiro harmônico de uma onda estacionária. O deslocamento transversal da corda é dado, no SI, por:

$$y(x,t) = 5\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,\mathrm{sen}(6\pi t)\ .$$

(a) Qual é o comprimento L da corda?

(b) Qual é a massa da corda?

(c) Calcule a velocidade transversal máxima de um ponto situado sobre um ventre da onda;

(d) Se a corda oscilar no quinto harmônico, qual será o período de oscilação?

R.: (a) $L = 6\,\mathrm{m}$; (b) $m = 4,0\,\mathrm{kg}$; (c) $v_{y,máx} = 30\pi\,\mathrm{m/s}$; (d) $\tau_5 = 0,2\,\mathrm{s}$.

25. Uma corda oscila de acordo com a equação

$$y(x,t) = 12\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right)\cos(40\pi t)\ ,$$

onde as unidades utilizadas são o centímetro e o segundo.

(a) Quais são a amplitude e a velocidade escalar das ondas cuja superposição dá essa oscilação?

(b) Qual é a distância D entre os nodos?

(c) Qual é a velocidade de uma partícula da corda na posição $x = 1,5$ cm quando $t = \frac{9}{8}$ s?

R.: (a) $A = 6\,\text{cm}$ e $v = 120\,\text{cm/s}$; (b) $D = 3$ cm; (c) $\dfrac{\partial y}{\partial t} = 0$.

26. Uma corda uniforme, de 20 m de comprimento e massa de 2 kg, está esticada sob uma tensão de 10 N. Faz-se oscilar transversalmente uma extremidade da corda, com amplitude de 3 cm e frequência de 5 oscilações por segundo. O deslocamento inicial da extremidade é de 1, 5 cm para cima.

    (a) Ache a velocidade de propagação v e o comprimento de onda λ da onda progressiva gerada na corda;

    (b) Escreva, como função do tempo, o deslocamento transversal y de um ponto da corda situado à distância x da extremidade que se faz oscilar, após ser atingido pela onda e antes que ela chegue à outra extremidade;

    (c) Calcule a intensidade I da onda progressiva gerada.

    R.: (a) $v = 10\,\text{m/s}$ e $\lambda = 2,0\,\text{m}$; (b) $y(x,t) = 0,03\cos\left(\pi x - 10\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$;
    (c) $I = \frac{9\pi^2}{200}$ W.

27. A corda de um violino tem uma densidade linear de massa de 0,5 g/m e está sujeita a uma tensão de 80 N, afinada para uma frequência $\nu = 660$ Hz no primeiro harmônico.

    (a) Qual a velocidade de propagação de onda nessa corda?

    (b) Qual o comprimento da corda?

    (c) Para tocar a nota "lá", cuja frequência é 880 Hz, prende-se a corda com um dedo, de forma a utilizar apenas uma fração f de seu comprimento. Qual o valor de f?

    R.: (a) $v = 400$ m/s; (b) $L = \frac{10}{33}$ m; (c) $f = \frac{3}{4}$.

28. Uma corda sob tensão T_i oscila no terceiro harmônico com uma frequência ν_3, e as ondas na corda tem comprimento de onda λ_3. Se aumentarmos a tensão da corda para $T_f = 4T_i$, de forma que a corda continue a oscilar no terceiro harmônico, qual será:

    (a) A frequência de oscilação em termos de ν_3?

(b) O comprimento da onda em termos de λ_3?

R: (a) $\nu = 2\,\nu_3$; (b) $\lambda = \lambda_3$.

29. Uma corda de 120 cm de comprimento é esticada entre suportes fixos. Quais são os três comprimentos de onda mais longos, para ondas estacionárias, nesta corda? Esboce as ondas estacionárias correspondentes. O que muda, em relação aos três comprimentos de onda mais longos, se esta mesma corda estiver fixa em apenas um suporte, de forma que a outra extremidade seja presa em um anel, sem peso, que pode deslizar sem atrito ao longo de uma haste?

    R.: Fixa nas extremidades: $\lambda_1 = 2,40\,\text{m}$, $\lambda_2 = 1,20\,\text{m}$, $\lambda_3 = 0,80\,\text{m}$.

    R.: Fixa em uma extremidade: $\lambda_1 = 4,80\,\text{m}$, $\lambda_2 = 1,60\,\text{m}$, $\lambda_3 = 0,96\,\text{m}$.

30. Uma corda, submetida a uma tensão de 200 N e presa em ambas as extremidades, oscila no segundo harmônico de uma onda estacionária. O deslocamento da corda é dado, no SI, por:

$$y(x,t) = \frac{1}{10}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\text{sen}\left(12\pi t\right)\ ,$$

    onde $x = 0$ numa das extremidades da corda.

    (a) Qual é o comprimento da corda?

    (b) Qual é a velocidade escalar das ondas na corda?

    (c) Qual é a massa da corda?

    R.: (a) $L = 4$ m; (b) $v = 24$ m/s; (c) $m = \dfrac{25}{18} \approx 1,39$ kg.

31. Um alto-falante de um aparelho de som emite 1 W de potência sonora na frequência $\nu = 100$ Hz. Admitindo que o som se distribui uniformemente em todas as direções, determine, num ponto situado a 2 m de distância do alto-falante:

    (a) O nível sonoro (β) em db;

    (b) A amplitude da onda de pressão;

(c) A amplitude da onda de deslocamento (utilize $\rho_{\mathrm{Ar}} = 1,3$ kg/m^3 e $v_{\mathrm{som}} = 340$ m/s);

(d) A que distância do alto-falante o nível sonoro estaria 10 db abaixo do calculado em (a).

R.: (a) $\beta = 103$ db; (b) $\mathbb{P} = 4,2$ N/m^2; (c) $\mathbb{U} = 0,015$ mm;

(d) $r = 6,3$ m

32. Uma experiência de demonstração divertida consiste em mudar a tonalidade da voz enchendo a boca de gás hélio (He): uma voz grave transforma-se em aguda (cuidado: não procure fazer isso por sua conta! Inalar hélio é perigoso, podendo levar a sufocação). Para explicar o efeito, admita que os componentes de onda associados a voz são determinados pelas dimensões das cordas vocais, laringe e boca, estas funcionando como cavidades ressonantes, de modo que a variação de tonalidade seria devida unicamente à variação da velocidade do som (embora isto não seja bem correto).

(a) Calcule a velocidade do som no gás He a $T = 20$ °C, sabendo que a constante universal dos gases R vale 8,314 J/(mol K) e que o He é um gás monoatômico de massa atômica $m = 4$ g/mol e $\gamma = 1,66$;

(b) Explique o efeito, calculando a razão entre as frequências do som no He e no ar, para o mesmo comprimento de onda (adote $v_{\mathrm{Ar}} = 340$ m/s);

R.: (a) $v = 1006$ m/s; (b) $\dfrac{\nu_{\mathrm{He}}}{\nu_{\mathrm{Ar}}} = 2,96$

33. Que comprimento deve ter um tubo de orgão, aberto numa extremidade e fechado na outra, para produzir, como tom fundamental, a nota dó da escala musical média, $\nu = 262$ Hz a 15 °C quando a velocidade do som no ar é de 341 m/s? Qual é a variação de frequência $\Delta\nu$ quando a temperatura sobe para 25 °C? Dados: $m_{\mathrm{Ar}} = 28,9$ g/mol, $\gamma_{\mathrm{Ar}} = 1,4$ e $R = 8,314$J/(mol K).

R.: $L = 32,5$ cm e $\Delta\nu = 4,8$ Hz

34. O tubo de Kundt, que costumava ser empregado para medir a velocidade do som em gases, é um tubo de vidro que contém o gás, fechado numa extremidade por

uma tampa M que se faz vibrar com uma frequência ν conhecida (por exemplo, acoplando-a a um alto-falante) na outra por um pistão que se faz deslizar, variando o comprimento do tubo. O tubo contém um pó fino (serragem, por exemplo). Ajusta-se o comprimento do tubo com o auxílio do pistão até que ele entre em ressonância com a frequência ν, o que se nota pelo reforço da intensidade sonora emitida. Observa-se então que o pó fica acumulado em montículos igualmente espaçados, de espacamento $\Delta\ell$, que se pode medir.

(a) A que correspondem as posições dos topos dos montículos?

(b) Qual e a relação entre $\Delta\ell$, ν e a velocidade do som no gás?

(c) Com o tubo cheio de CO_2 a 20°C e $\nu = 880$ Hz, o espaçamento médio medido é de 15,2 cm. Qual é a velocidade do som no CO_2 a 20°C?

R.: (c) $v \approx 267,5$ m/s.

35. Um trem se desloca com velocidade igual a 25 m/s e o ar está calmo. A frequência da nota do apito do trem é igual a 400 Hz, emitida no centro do mesmo.Considere a velocidade do som no referencial de repouso da atmosfera como sendo 340 m/s. Qual é o comprimento de onda das ondas sonoras:

(a) Na parte dianteira do trem?

(b) Na parte traseira do trem?

Qual é a frequência do som que um ouvinte, parado em uma estação de trem, escuta quando ele:

(c) Vê o trem se aproximando?

(d) Vê o trem se afastando?

R.: (a) $\lambda = 0,79$ m; (b) $\lambda = 0,91$ m; (c) $\nu = 431,7$ Hz;
(d) $\nu = 372,6$ Hz.

36. Um trem se desloca com velocidade igual a 30 m/s e o ar está calmo. A frequência da nota do apito do trem é igual a 262 Hz. Considere a velocidade do som no referencial de repouso da atmosfera como sendo 340 m/s. Qual é a frequência ouvida por um passageiro, no interior de um trem que se move em sentido contrário ao do primeiro trem, a 18 m/s, supondo que:

(a) Os trens se aproximam?

(b) Os trens se afastam?

R.: (a) $\nu \approx 303$ Hz ; (b) $\nu \approx 228$ Hz.

37. Um trem-bala move-se com velocidade de 60 m/s para leste. O apito do trem emite um som com frequência 400 Hz. Considere a velocidade do som no referencial de repouso da atmosfera como sendo 340 m/s.

    (a) Determine a frequência do som do apito que uma pessoa na estação ouve ao observar o trem partir;

    (b) Considere, agora, a presença de vento soprando para oeste com velocidade de 10 m/s. Determine a frequência que a pessoa na estação irá detectar;

    (c) Considere, agora, que o trem move-se em uma trajetória circular. Qual a frequência do som percebida por alguém no centro da circunferência descrita pelo trem?

    R.: (a) $\nu_S = 340$ Hz; (b) $\nu_P = 341$ Hz; (c) $\nu_C = 400$ Hz.

38. Dois diapasões idênticos podem oscilar a 440 Hz. Um indivíduo está localizado em algum lugar na linha entre os dois diapasões. Considerando que a velocidade do som, no referencial de repouso da atmosfera, é 330 m/s, calcule a frequência de batimentos captada por esse indivíduo se:

    (a) Ele permanece parado e os diapasões se movem para a direita com velocidade de 30 m/s;

    (b) Os diapasões estiverem parados e o indivíduo se movendo para a direita com velocidade de 30 m/s.

    R.: (a) 80,7 Hz; (b) 80,0 Hz.

39. Dois trens viajam em sentidos opostos, sobre trilhos paralelos, com velocidades de mesma magnitude. Um deles vem apitando. A frequência do apito percebida por um passageiro do outro trem varia entre os valores de 348 Hz, quando estão se aproximando, e 259 Hz, quando estão se afastando. A velocidade do som no ar é de 340 m/s.

(a) Qual é a magnitude da velocidade dos trens (em km/h)?

(b) Qual é a frequência do apito?

R.: (a) $v \approx 90,7$ km/h; (b) $\nu \approx 300$ Hz.

3 Temperatura e Calor

40. (Moysés) Uma barra retilínea é formada por uma parte de latão soldada em outra de aço. A 20°C, o comprimento total da barra é de 30 cm, dos quais 20 cm de latão e 10 cm de aço. Os coeficientes de dilatação linear são $1,9 \times 10^{-5}\,(°\text{C})^{-1}$ para o latão e $1,1 \times 10^{-5}\,(°\text{C})^{-1}$ para o aço. Qual é o coeficiente de dilatação linear da barra?

    R.: $\alpha = 1,63 \times 10^{-5}\,(°\text{C})^{-1}$

41. (Moysés) Num relógio de pêndulo, o pêndulo é uma barra metálica, projetada para que seu período de oscilação seja igual a 1 s. Verifica-se que, no inverno, quando a temperatura média é de 10 °C, o relógio adianta, em média, 55 s por semana. No verão, quando a temperatura média é de 30 °C, o relógio atrasa, em média, 1 minuto por semana. Encontre:

    (a) O coeficiente de dilatação linear do metal do pêndulo;

    (b) A temperatura que o relógio funcionaria com precisão.

    R.: (a) $\alpha = 9,5 \times 10^{-6}\,(°\text{C})^{-1}$; (b) $T = 19,6\,°\text{C}$

    Resolução:

    O pêndulo em questão é um pêndulo físico. Portanto, se o comprimento da barra é ℓ, seu centro de massa está em $\ell/2$ e o período do pêndulo, como projetado (temperatura T_0), pode ser calculado através de:

$$\tau_0 = 2\,\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g}} = 2\,\pi\sqrt{\frac{L_0}{g}}\,, \quad \text{onde} \quad L_0 = L_{equivalente} = \frac{2\ell}{3}$$

$$\Longrightarrow \quad 1 = (2\,\pi)^2 \left[\frac{L_0}{10}\right] \quad \Longrightarrow \quad L_0 = 0,253303\,\mathrm{m}$$

Inverno: Sabendo que o relógio, em uma semana, adianta 55 s, vamos calcular a variação do período $\Delta\tau_{0i}$ utilizando regra de três:

$$\left\{\begin{array}{l} 55\,\mathrm{s} \Longrightarrow (7)(24)(60)(60)\,\mathrm{s} \\ \Delta\tau_{0i} \Longrightarrow 1\,\mathrm{s} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{r} \Delta\tau_{0i} = 9,09\times 10^{-5}\,\mathrm{s} \\ \tau_i = 0,9999091\,\mathrm{s} \end{array}$$

Assim, sabendo o período de oscilação do pêndulo no inverno, podemos calcular o comprimento da barra

$$0,9999091 = (2\,\pi)^2 \left[\frac{L_i}{10}\right] \quad \Longrightarrow \quad L_i = 0,253280\,\mathrm{m}$$

e, com isso, temos que no inverno (temperatura $T = 10\,°\mathrm{C}$), a variação de comprimento da barra é $\Delta L_i = L_i - L_0 = -2,3\times 10^{-5}\,\mathrm{m}$, levando à

$$\Delta L_i = \alpha L_0(10 - T_0) = -2,3\times 10^{-5}\,\mathrm{m}$$

Verão: Sabendo que o relógio, em uma semana, atrasa 1 minuto, vamos calcular a variação do período $\Delta\tau_{0v}$ utilizando regra de três:

$$\left\{\begin{array}{l} 60\,\mathrm{s} \Longrightarrow (7)(24)(60)(60)\,\mathrm{s} \\ \Delta\tau_{0v} \Longrightarrow 1\,\mathrm{s} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{r} \Delta\tau_{0v} = 9,92\times 10^{-5}\,\mathrm{s} \\ \tau_v = 1,0000992\,\mathrm{s} \end{array}$$

Assim, sabendo o período de oscilação do pêndulo no verão, podemos calcular o comprimento da barra

$$1,0000992 = (2\,\pi)^2 \left[\frac{L_v}{10}\right] \quad \Longrightarrow \quad L_v = 0,253328\,\mathrm{m}$$

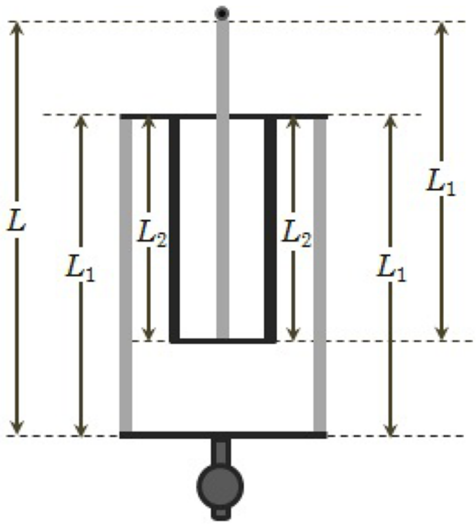
e, com isso, temos que no verão (temperatura $T = 30\,°\mathrm{C}$), a variação de comprimento da barra é $\Delta L_v = L_v - L_0 = 2,5\times 10^{-5}\,\mathrm{m}$, levando à

$$\Delta L_v = \alpha L_0(30 - T_0) = 2,5\times 10^{-5}\,\mathrm{m}$$

Juntando as equações para ΔL_i e ΔL_v, temos o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta L_i = -2,3 \times 10^{-5} = \alpha L_0(10 - T_0) \\ \Delta L_v = \ \ 2,5 \times 10^{-5} = \alpha L_0(30 - T_0) \end{array} \right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} T_0 = 19,6\,^\circ\mathrm{C} \\ \alpha = 9,5 \times 10^{-6}\,(^\circ\mathrm{C})^{-1} \end{array}$$

42. (Moysés) A figura abaixo mostra um esquema possível de construção de um pêndulo cujo conprimento L não seja afetado pela dilatação térmica. As três barras cinzas verticais, cada uma com comprimento L_1, são feitas de aço, cujo coeficiente de dilatação térmica linear é $1,1 \times 10^{-5}$ $(^\circ\mathrm{C})^{-1}$. As duas barras pretas verticais, de comprimento L_2, são feitas de alumínio, cujo coeficiente de dilatação térmica linear é $2,3 \times 10^{-5}$ $(^\circ\mathrm{C}^{-1})$. Determine L_1 e L_2 de modo a manter $L = 0,5$ m. R.: $L_1 = 47,9$ cm e $L_2 = 45,8$ cm



43. (Moysés) Um tubo cilíndrico delgado de seção uniforme, feito de um material de coeficiente de dilatação linear α, contém um líquido de coeficiente de dilatação volumétrica β. À temperatura T_0, a altura da coluna líquida é h_0.

    (a) Qual é a variação Δh da altura da coluna quando a temperatura sobe de $1\,^\circ\mathrm{C}$?

    (b) Se o tubo é de vidro ($\alpha = 9 \times 10^{-6}\,(^\circ\mathrm{C})^{-1}$) e o líquido é mercúrio ($\beta = 1,8 \times 10^{-4}\,(^\circ\mathrm{C})^{-1}$), mostre que este sistema não constitui um bom termômetro, do ponto de vista prático, calculando Δh para $h_0 = 10$ cm.

R.: (a) $\Delta h = h_0(\beta - 2\alpha)$ e (b) $\Delta h = 0,016$ mm.

44. (Moysés) Uma chaleira de alumínio, contendo água em ebulição a 100°C, está sobre uma chama. O raio do fundo da chaleira é de 7,5 cm e sua espessura é de 2 mm. A condutividade térmica do alumínio é 0,49 cal/(s cm °C). A chaleira vaporiza 1 litro de água em 5 minutos. O calor de vaporização da água, a 100°C, é de 540 cal/g. A que temperatura está o fundo da chaleira? Despreze as perdas pelas superfícies laterais.

    R.: $T = 104,2\,°\mathrm{C}$

45. (Moysés) Num país frio, a temperatura sobre a superfície de um lago caiu a -10°C e começa a formar-se uma camada de gelo sobre o lago. A água sob o gelo permanece a 0°C: o gelo flutua sobre ela e a camada de espessura crescente em formação serve como isolante térmico, levando ao crescimento gradual de novas camadas de cima para baixo.

    (a) Exprima a espessura ℓ da camada de gelo formada, decorrido um tempo t do início do processo de congelamento, como função da condutividade térmica k do gelo, da sua densidade ρ_{gelo} e calor latente de fusão L_f, bem como da diferença de temperatura ΔT entre a água e a atmosfera acima do lago. Sugestão: Considere a agregação de uma camada de espessura dx à camada já existente, de espessura x, e integre em relação a x.

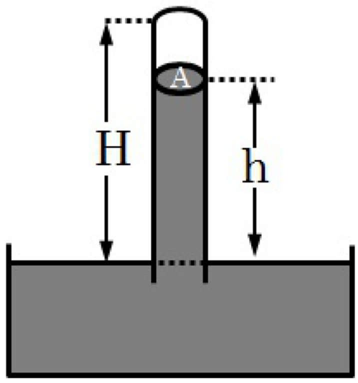
    (b) No exemplo acima, calcule a espessura da camada de gelo 1 h após iniciar-se o congelamento, sabendo que $k = 4 \times 10^{-3}$ cal/(s cm °C), $\rho_{\mathrm{gelo}} = 0,92$ g/cm^3 e $L_f = 80$ cal/g.

    R.: (a) $\ell = \sqrt{\dfrac{2k(\Delta T)t}{\rho_{\mathrm{gelo}} L_f}}$ e (b) $\ell = 1,98$ cm

3.1 Gases Ideais e Segunda Lei da Termodinâmica

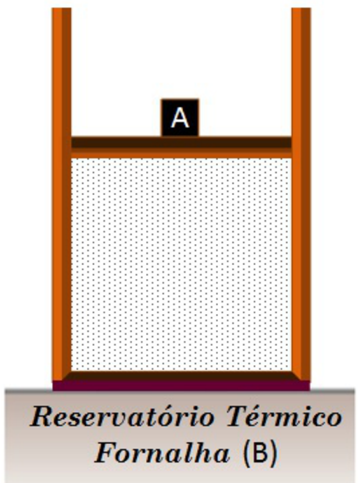
46. O tubo de vidro de um barômetro de mercúrio tem secção reta de área A = 1 cm^2 e altura H = 90 cm acima da superfície livre do reservatório de mercúrio.

A altura da coluna barométrica é de h = 735 mm, num dia em que a temperatura ambiente é de 20°C e a pressão atmosférica é de 750 mm/Hg. Sabendo que $\rho_{\mathrm{Hg}} = 13,6 \times 10^3\,\mathrm{kg/m}^3$, calcule a quantidade de ar (em moles) aprisionada no espaço acima da coluna de mercúrio. (Moysés)



R.: $n = 1,3 \times 10^{-5}$ moles

47. Uma caldeira de uma máquina (figura abaixo), com paredes adiabáticas, contém uma certa quantidade de gás aprisionada entre um êmbolo adiabático, sem atrito e massa desprezível, sustentando um bloco de chumbo (A) na parte superior, e um fundo diatérmico em contato com uma fornalha (B). A fornalha comporta-se como um reservatório térmico e é, inicialmente, mantida a uma temperatura constante. Explique a relação entre temperatura (T), pressão (P), volume (V) e energia interna (U) iniciais e finais nas seguintes circunstâncias:



(a) O bloco é trocado por um mais pesado;

(b) Retira-se o bloco;

(c) Aumenta-se a temperatura da fornalha;

(d) Diminui-se a temperatura da fornalha.

48. Um mol de um gás ideal ($C_V = \frac{3}{2}R$) se expande lentamente até ocupar um volume igual ao dobro do volume inicial, realizando um trabalho igual a 300 J neste processo. Calcule o calor fornecido ao gás e a variação da energia interna do gás, sabendo que o processo é:

(a) Isotérmico; (b) Adiabático; (c) Isobárico.

R.: (a) $\Delta U = 0$ e $Q = 300$ J; (b) $\Delta U = -300$ J e $Q = 0$;
(c) $\Delta U = 450$ J e $Q = 750$ J.

49. Dois recipientes fechados estão ligados um ao outro por um tubo capilar de volume desprezível. Os recipientes, de mesma capacidade de 1 ℓ, contêm gás oxigênio (massa molecular 32 g), inicialmente à temperatura de 25°C e pressão de 1 atm. (adaptado do Moysés)

(a) Calcule a massa, em gramas, de O_2 contida nos recipientes;

(b) Determine o novo valor da pressão na situação em que o gás de um dos recipientes é aquecido até a temperatura de 100°C, enquanto a temperatura do gás do outro recipiente permanece inalterada;

(c) Considerando a situação descrita em (b) e desprezando a condução de calor através do capilar, determine quantas gramas de O_2 passam de um lado para o outro.

R.: (a) $m = 2,62$ g; (b) $P = 1,1$ atm; (c) $\Delta m = 0,15$ g.

50. (Moysés) Um mol de um gás ideal, com $\gamma = 7/5$, está contido num recipiente, inicialmente a 1 atm e 27°C. A partir deste estado inicial, o gás é, sucessivamente: (i) comprimido isobaricamente até 3/4 do volume inicial V_0; (ii) aquecido, a volume constante, até voltar à temperatura inicial; (iii) expandido a pressão constante até voltar ao volume inicial; (iv) resfriado, a volume constante, até voltar à pressão normal (inicial). Pede-se:

(a) Desenhe o diagrama P-V associado ao ciclo;

(b) Calcule o trabalho total realizado pelo gás;

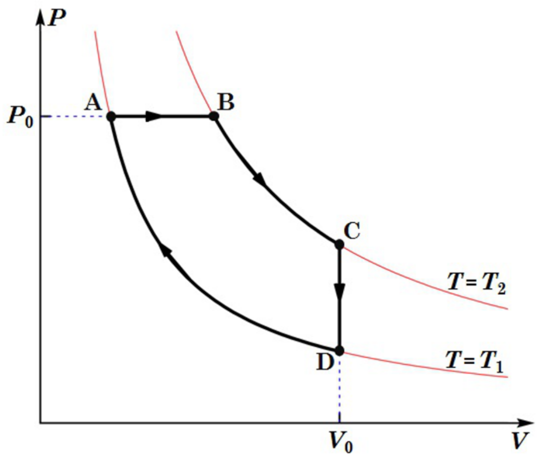
(c) Calcule o calor total fornecido ao gás nas etapas (i) e (ii);

(d) Calcule as temperaturas máxima e mínima atingidas;

(e) Calcule a variação da energia interna no processo (i) + (ii).

R.: (b) $W = 208$ J; (c) $Q = 624$ J; (d) $T_{\text{máx}} = 400$ K e $T_{\text{mín}} = 225$ K; (e) $\Delta U = 0$.

51. (Moysés) Um mol de um gás ideal descreve o ciclo ABCDA, no plano (P, V), representado na figura abaixo, onde $T = T_1$ e $T = T_2$ são isotermas. Calcule o trabalho total associado ao ciclo, em função de P_0, V_0, T_1 e T_2.



R.: $W = R(T_2 - T_1) + RT_2 \ln\left(\dfrac{P_0V_0}{RT_2}\right) - RT_1 \ln\left(\dfrac{RT_1}{P_0V_0}\right)$.

52. Gás nitrogênio (N_2), contido no interior de um recipiente que pode se expandir, é resfriado de 50°C até 10°C, mantendo-se a pressão constante e igual a 3×10^5 Pa. O calor total liberado pelo gás é igual a $2,5 \times 10^4$ J. Suponha que o gás possa ser tratado como um gás ideal e utilize $R = 8,31$ J/(mol K) para a constante universal dos gases ideais.

(a) Calcule o número de moles do gás;

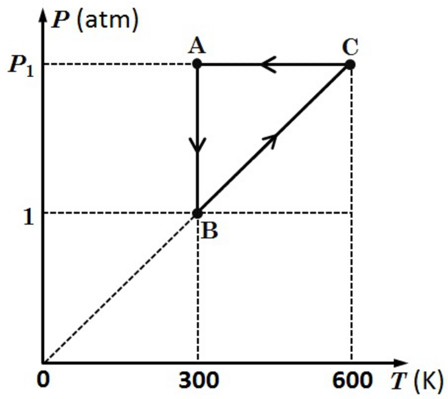
(b) Calcule a variação da energia interna do gás;

(c) Ache o trabalho realizado pelo gás;

(d) Qual seria o calor libertado pelo gás, para a mesma variação de temperatura, caso o volume permanecesse constante?

R.: (a) $n = 21,57$ moles; (b) $\Delta U = -32,17$ kJ; (c) $W = 7,17$ kJ;
(d) $Q = 32,17$ kJ.

53. (Moysés) 0,1 mol de um gás ideal, com $C_V = \frac{3}{2}R$, descreve o ciclo representado na figura abaixo, no plano (P, T).



(a) Represente o ciclo no plano (P-V), indicando P (em atm) e V (em ℓ), associados aos pontos A, B e C;

(b) Calcule ΔW, ΔQ e ΔU para cada uma das etapas AB, BC e CA e para o ciclo.

R.: (b)

Processo	ΔW (J)	ΔQ (J)	ΔU (J)
AB	173	173	0
BC	0	374	374
CA	-249	-623	-374
Ciclo	-76	-76	0

54. (Moysés) Um mol de um gás ideal, com $C_V = \frac{3}{2}R$, a 17°C, tem sua pressão reduzida à metade por um dos quatro processos seguintes: (i) a volume constante; (ii) isotermicamente; (iii) adiabaticamente; (iv) por expansão livre. Para um volume inicial V_i, calcule, para cada um dos quatro processos, o volume e a temperatura finais, ΔW e ΔU. Utilize $R = 8,31$ J/(mol K).

R.:

Processo	V_{final}	T_{final} (K)	ΔW (J)	ΔU (J)
(i)	V_i	145	0	-1807
(ii)	$2\,V_i$	290	1671	0
(iii)	$1,52\,V_i$	219	-885	-885
(iv)	$2\,V_i$	290	0	0

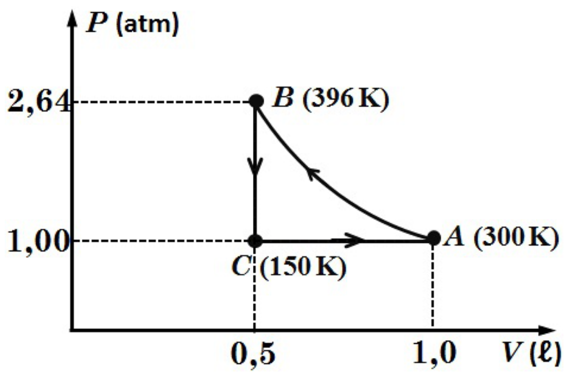
55. (Moysés) 1 ℓ de H_2 (para o qual $\gamma = 7/5$), à pressão de 1 atm e temperatura de 27°C, é comprimido adiabaticamente até o volume de 0,5 ℓ e depois resfriado, a volume constante, até voltar a pressão inicial. Finalmente, por expansão isobárica, volta à situação inicial.

    (a) Represente o processo no plano (P, V), indicando P (atm), V (ℓ) e T (K) para cada vértice do diagrama;

    (b) Calcule o trabalho total realizado;

    (c) Calcule ΔU e ΔQ para cada etapa.

    R.: (a)



(b) $W = -30,2$ J

(c)

Processo	ΔU (J)	ΔQ (J)
AB	80,9	0
BC	-207,5	-207,5
CA	126,6	177,3

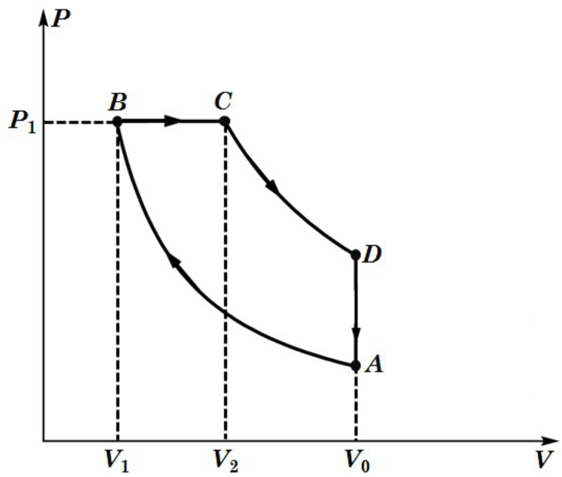
56. (Moysés) Uma usina termoelétrica moderna opera com vapor de água superaquecido, a temperaturas da ordem de 500°C, e é resfriada com água de rio, tipicamente a 20°C. Devido a inúmeros tipos de perdas, a eficiência máxima que se consegue atingir, na prática, é da ordem de 40%. Que fração da eficiência máxima idealmente possível para esses valores isto representa?

    R.: 64,4%

57. Um mol de um gás ideal diatômico ($\gamma = 7/2$) descreve um ciclo quadrado $ABCDA$ no diagrama P-V. Os valores das pressões e dos volumes nos vértices do ciclo são: $P_A = P_D = 1\,\text{bar}$; $V_A = V_B = 20\,\ell$; $P_B = P_C = 2\,\text{bar}$; $V_C = V_D = 30\,\ell$ (Obs.: $1\,\text{bar} = 10^5\,\text{Pa}$).(adaptado do Moysés)
   (a) Desenhe o ciclo no diagrama P-V e calcule o valor da temperatura em seus vértices (pontos A, B, C e D);
   (b) Calcule a eficiência de um motor térmico operando segundo este ciclo;
   (c) Compare o resultado (b) com a eficiência máxima ideal associada às temperaturas extremas do ciclo.

   R.: (a) $T_A = 244\,\text{K}$; $T_B = 488\,\text{K}$; $T_C = 732\,\text{K}$; $T_D = 366\,\text{K}$;
   (b) $\eta = 8,3\%$; (c) $\eta_{\text{máx}} = 66,7\% > 8,3\%$.

58. (Moysés) O ciclo Diesel, representado na figura abaixo, esquematiza o que ocorre num motor Diesel de 4 tempos, onde os trechos AB e CD são adiabáticas. A taxa de compressão adiabática $r_c = V_0/V_1$ é maior que no motor a gasolina (ciclo de Otto), permitindo que o combustível inflame sem necessidade da centelha de ignição. Esta etapa ocorre à pressão constante e está representada pelo trecho BC do ciclo. A taxa de expansão adiabática, no trecho CD é $r_e = V_0/V_2$. (adaptado do Moysés)



   (a) Mostre que o rendimento do ciclo é dado por

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma}\left[\frac{T_D - T_A}{T_C - TB}\right] = 1 - \frac{1}{\gamma}\left[\frac{(1/r_e)^\gamma - (1/r_c)^\gamma}{(1/r_e) - (1/r_c)}\right]$$

(b) Calcule η para $\gamma = 1,4$, $r_e = 5$ e $r_c = 15$.

59. O ciclo de Otto é uma esquematização idealizada do que ocorre num motor a gasolina de 4 tempos. O ciclo (ABCDA) consiste de: AB - compressão rápida (adiabática) da mistura de ar com vapor de gasolina, de um volume inicial V_0 para um volume final V_0/r (onde r é a taxa de compressão); BC - aquecimento da mistura, a volume constante, devido à ignição; CD - expansão adiabática dos gases aquecidos, movendo o pistão; DA - queda de pressão a volume constante associada à exaustão dos gases da combustão. A mistura pode ser tratada como um gás ideal de coeficiente adiabático γ. (adaptado do Moysés)

(a) Represente o ciclo deste processo no plano (P, V);

(b) Mostre que o rendimento do ciclo é dado por

$$\eta = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - TB} = 1 - \left[\frac{1}{r}\right]^{\gamma-1}$$

(c) Calcule η para $\gamma = 1,4$ e $r = 10$.

60. Um quilograma de gelo é removido de um congelador, que estava a -15° C, e é aquecido até converter-se totalmente em vapor, a 100° C. Qual é a variação de entropia deste sistema? Dados: calor especifico do gelo: $0,5$ cal/(g $^\circ$C); calor latente de fusão do gelo: $79,6$ cal/g; o calor latente de vaporização da água: $539,6$ cal/g. (adaptado do Moysés)

R.: $\Delta S = 2,079$ cal/K $= 8,702$ J/K.

61. (Moysés) Um cilindro contendo 1 kg de He a 150 atm, em equilíbrio térmico com o ambiente a 17° C, tem um pequeno vazamento através do qual o gás escapa para a atmosfera, até que o tanque se esvazia por completo do hélio.

(a) Qual é a variação de entropia do gás hélio?

(b) Que quantidade de trabalho é desperdiçada por esse processo?

R.: (a) $\Delta S_{\text{gás}} = 1,04 \times 10^4$ J/K; (b) $W_{\text{desperdiçado}} = 3,02 \times 10^6$ J.

62. (Moysés) Uma chaleira contém $1\,\ell$ de água em ebulição. Despeja-se toda a água numa piscina, que está à temperatura ambiente de 20° C.

(a) De quanto variou a entropia da água da chaleira?

(b) De quanto variou a entropia do universo?

R.: (a) $\Delta S_{\text{chaleira}} = -241,4\,\text{cal/K}$; (b) $\Delta S_{\text{universo}} = 31,9\,\text{cal/K}$.

63. (Moysés) Um recipiente de paredes adiabáticas contém $2\,\ell$ de água a 30°C. Coloca-se nele um bloco de 500 g de gelo.

(a) Calcule a temperatura final do sistema (use 80 cal/g para o calor latente de fusão do gelo);

(b) Calcule a variação de entropia do sistema.

R.: (a) $T_f = 8°\text{C}$; (b) $\Delta S = 10,2$ cal/K.

3.2 Teoria Cinética dos Gases

64. Um dos vácuos mais elevados que podem ser produzidos corresponde a uma pressão de 10^{-12} mm/Hg. Nesta pressão, a 27°C, quantas moléculas de ar por cm^3 ainda permanecem?

R.: $3,2 \times 10^4$ moléculas/cm^3

65. Calcule o número médio de moléculas por cm^3 e o espaçamento médio entre as moléculas:

(a) Em água líquida;

(b) Em vapor de água a 1 atm e 100°C (tratado como gás ideal);

(c) No caso (b), calcule a velocidade quadrática média das moléculas.

R.: (a) $n = 3,3 \times 10^{22}$ moléculas/cm^3; (b) $\delta = 3,72 \times 10^{-7}$ cm;

(c) $v_{qm} = 718,92$ m/s.

66. Considere uma amostra de gás argônio em um recipiente a 35°C e pressão de 1,22 atm. Supondo o raio desse átomo igual a $0,71 \times 10^{-10}$ m, calcule a fração do volume do recipiente que é realmente ocupada pelos átomos.

R.: $4,3 \times 10^{-5}$

67. O diâmetro efetivo da molécula de CO_2 é $4,59\times10^{-8}$ cm. Qual é o livre percurso médio de uma molécula de CO_2 para uma densidade de 4,91 kg/m^3?

Resolução:

Como $n_{mol} = m/mm$, onde m = massa de substância e mm = massa molar, que para a molécula de CO_2 é 44 g, temos que $n_{mol} = 4,91/(44\times10^{-3}) = 112$ moles. Assim, o número médio de moléculas por unidade de volume será: $n = n_{mol}N_0 = 112(6\times10^{23}) = 6,7\times10^{25}$ (moléculas de CO_2)/m^3. Com isso, o livre percurso médio de uma molécula de CO_2 será:

$$\bar{\ell} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi n d^2} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi(6,7\times10^{25})(4,59\times10^{-10})^2} = 1,6\times10^{-8}\ \text{m}$$

68. (a) Calcule o expoente adiabático $\gamma = C_P/C_V$ para um gás diatômico a uma temperatura elevada, tal que uma fração x das moléculas se encontram dissociadas em átomos. Verifique que o resultado se reduz aos casos limites esperados quando não há dissociação ou quando ela é total.

(b) Se o valor observado é $\gamma = 1,5$, qual é a porcentagem de dissociação x?

Resolução: Considerando somente os graus de liberdade translacionais:

(a) Sejam:

- $n \Rightarrow$ número inicial de moles de moléculas diatômicas
- $x \Rightarrow$ fração de moles de moléculas que se dissociaram
- $2nx \Rightarrow$ número de moles do gás monoatômico (a multiplicação por 2 se deve ao fato de cada molécula diatômica dar origem a dois átomos)
- $(1-x)n \Rightarrow$ número de moles de moléculas diatômicas que sobraram
- $2nx + (1-x)n = (1+x)n = N \Rightarrow$ número final de moles na mistura (moléculas monoatômicas e diatômicas)

Considerando volume constante, a variação da energia interna do sistema será:

$$dU = dU_{\text{mono}} + dU_{\text{di}} = Q_V = NC_V dT,$$

onde, de acordo com o teorema da equipartição de energia, temos que

$$dU_{\text{mono}} = \frac{3}{2}(2nx)RdT \;\text{ e }\; dU_{\text{di}} = \frac{5}{2}(1-x)nRdT.$$

Assim, a variação da energia interna do sistema fica:

$$(1+x)nC_V dT = \frac{3}{2}(2nx)RdT + \frac{5}{2}(1-x)nRdT \;\Rightarrow\; C_V = \frac{(x+5)}{2(x+1)}\,R$$

Utilizando a relação $C_P = C_V + R$, temos que

$$C_P = \left[\frac{(x+5)}{2(x+1)} + 1\right] R \;\Rightarrow\; \frac{C_P}{C_V} = \gamma = \frac{(3x+7)}{(x+5)}$$

Testando os casos limite:

(i) Não há dissociação ($x = 0$): $\frac{C_P}{C_V} = \gamma = \frac{7}{5} \Rightarrow$ correto para gases diatômicos.

(ii) Dissociação total ($x = 1$): $\frac{C_P}{C_V} = \gamma = \frac{5}{3} \Rightarrow$ correto para gases monotômicos.

(b) Se $\gamma = 1,5 = 3/2$ então

$$\gamma = \frac{3}{2} = \frac{(3x+7)}{(x+5)} \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{3} = 33\%$$

4 Oscilações Harmônicas

4.1 Resumo: oscilações harmônicas forçadas e amortecidas

Neste capítulo apresentamos um resumo sobre oscilações forçadas e amortecidas (texto baseado no livro de física básica do Moysés Nussenzveig). A equação que descreve o movimento harmônico amortecido e forçado de uma partícula de massa m é dada por:

$$m\ddot{x}(t) + \rho\dot{x}(t) + kx(t) = F_0 \cos(\omega t)\,, \tag{1}$$

onde k é a constante elástica da mola, ρ é o coeficiente de amortecimento, devido à uma força externa do tipo $F = -\rho\,(dx/dt)$, e $F_0 \cos(\omega t)$ é a força externa oscilatória, de frequência ω e amplitude F_0, aplicada ao sistema para mantê-lo em regime estacionário. Dividindo a expressão anterior pela massa m obtemos:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t), \tag{2}$$

onde definimos $\gamma = \rho/m$ e $\omega_0^2 = k/m$ (frequência natural). A solução geral da equação (2) é dada por:

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t), \tag{3}$$

onde x_p é a solução particular da equação inomogênea (solução estacionária) e x_h é a solução da equação homogênea (solução transiente):

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0\,. \tag{4}$$

A solução da equação homogênea (4) depende da relação entre ω_0 e γ, levando a três diferentes soluções. Este três diferentes limites são classificados como subcrítico, crítico e supercrítico. A seguir estão apresentadas as soluções transientes para estes três casos.

1. **Subcrítico** $(\gamma/2 < \omega_0)$

$$x(t) = A\,\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega' t + \phi)$$

$$\text{sendo } \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - (\tfrac{\gamma}{2})^2}$$

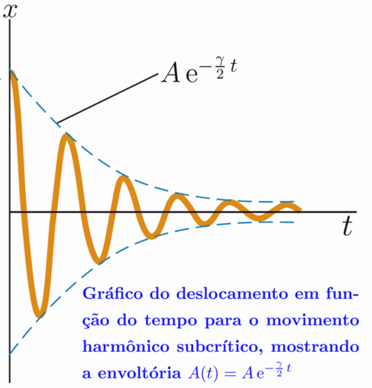


Gráfico do deslocamento em função do tempo para o movimento harmônico subcrítico, mostrando a envoltória $A(t) = A\,\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}$

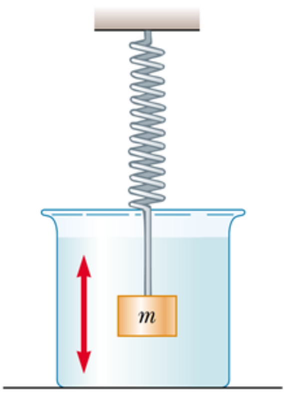
2. **Crítico** $(\gamma/2 = \omega_0)$

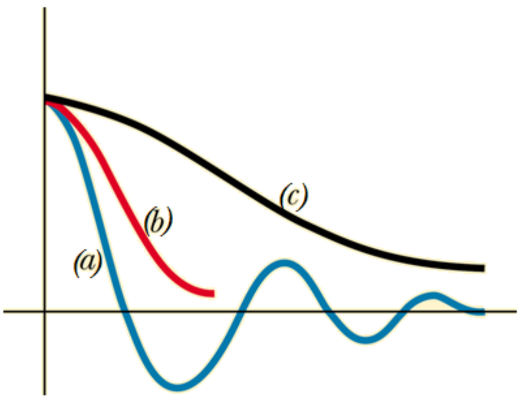
$$x(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}\,[A\,t + B]$$

3. **Supercrítico** $(\gamma/2 > \omega_0)$

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[A\,\mathrm{e}^{\beta t} + B\,\mathrm{e}^{-\beta t}\right] \text{, onde } \beta = \sqrt{(\tfrac{\gamma}{2})^2 - \omega_0^2}$$

Na próxima figura mostramos, no lado esquerdo, um exemplo de um oscilador amortecido representado por uma massa ligada à uma mola e submersa em um meio viscoso e, no lado direito, um gráfico do deslocamento em função do tempo para o movimento de um oscilador com amortecimento nos limites: *(a)* subcrítico; *(b)* crítico e *(c)* supercrítico.





As soluções homogêneas tendem a zero para $t \longrightarrow \infty$, tornando-se desprezíveis para tempos maiores que T_d, chamado tempo de decaimento. Por outro lado, a força externa continua suprindo energia ao sistema indefinidamente de modo que as oscilações forçadas devem persistir e, para $t \gg T_d$, somente as oscilações forçadas irão sobreviver (regime estacionário), correspondendo à solução particular da equação inomogênea. Para encontrarmos esta solução, de modo não muito complicado, primeiramente iremos desenvolver, resumidamente, como escrever um número complexo na forma trigonométrica para, depois, encontrarmos a solução particular da equação (2).

4.2 Forma trigonométrica de um número complexo

Um número complexo pode ser escrito como a soma de um número real e um número imaginário puro:

$$z = x + iy\,, \tag{5}$$

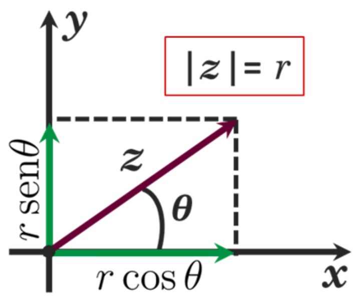
onde a parte real de z é $x = \Re\text{e}[z]$ e a parte imaginária de z é $y = \Im\text{m}[z]$.

O número complexo z pode ser representado geometricamente no plano complexo (coordenadas cartesianas) como um segmento orientado (vetor) da origem ao ponto (x, y).

Podemos escrevê-lo em coordenadas polares utilizando as relações: $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\theta$. Então teremos:

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta) = r\,\mathrm{e}^{i\,\theta}\,,$$

que é a forma trigonométrica do número complexo.



O módulo de z é dado por:

$$\mid z \mid = r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{6}$$

e θ chama-se argumento de z, dado por:

$$\theta = \text{tg}^{-1}(y/x). \tag{7}$$

4.3 Solução particular da equação inomogênea

Vamos escrever a equação (2) para uma função complexa $z(t)$:

$$\ddot{z}(t) + \gamma\dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = \frac{F_0}{m}\,\mathrm{e}^{i\,\omega\,t} \tag{8}$$

e procuremos uma solução da forma:

$$z(t) = C\,\mathrm{e}^{i\,\omega\,t}\,, \tag{9}$$

onde C é uma constante complexa arbitária que precisamos encontrar. Substituindo $z,\ \dot{z} = (i\,\omega)z$ e $\ddot{z} = -\omega^2 z$ na equação (8) obtemos:

$$-\omega^2\,C\,\mathrm{e}^{i\,\omega\,t} + \gamma\,(i\,\omega)\,C\,\mathrm{e}^{i\,\omega\,t} + \omega_0^2\,C\,\mathrm{e}^{i\,\omega\,t} = \frac{F_0}{m}\,\mathrm{e}^{i\,\omega\,t}\,. \tag{10}$$

Simplificando a equação (10) ficamos com:

$$C\left[-\omega^2 + i\,\gamma\,\omega) + \omega_0^2\right] = \frac{F_0}{m}\,, \tag{11}$$

que leva à

$$C = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\,\gamma\,\omega}\,. \tag{12}$$

A constante complexa C, dada pela expressão (12), pode ser escrita como o quociente entre dois números complexos z_1 e z_2, tal que

$$C = \frac{z_1}{z_2}\,, \quad \text{com} \quad z_1 = \frac{F_0}{m} + i\,0 \quad \text{e} \quad z_2 = (\omega_0^2 - \omega^2) + i\,\gamma\,\omega\,. \tag{13}$$

Podemos ainda reescrever o número complexo z_1 como:

$$z_1 = r_1\,\mathrm{e}^{i\,\theta_1}\,,\ \text{onde} \quad r_1 = \frac{F_0}{m} \quad \text{e} \quad \text{tg}\theta_1 = 0 \Rightarrow \theta_1 = 0\,. \tag{14}$$

O número complexo z_2 pode ser escrito na forma

$$z_2 = r_2\,\mathrm{e}^{i\,\theta_2}\,, \text{ onde} \quad r_2 = \sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2} \quad \text{e} \quad \mathrm{tg}\theta_2 = \frac{\gamma\,\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)}\,. \tag{15}$$

Com estas definições podemos reescrever a constante complexa C, equação (13), como:

$$C = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\,\mathrm{e}^{i\,\theta_1}}{r_2\,\mathrm{e}^{i\,\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}\,\mathrm{e}^{i\,(\theta_1-\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}\,\mathrm{e}^{-i\,\theta_2}\,, \tag{16}$$

uma vez que $\theta_1 = 0$. Substituindo os valores de r_1 e r_2 definidos nas equações (14) e (15), podemos reescrever a eq. (16) como:

$$C = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}}\,\mathrm{e}^{-i\,\theta_2} \equiv A\,\mathrm{e}^{i\,\varphi}\,, \tag{17}$$

com

$$\begin{cases} A = \dfrac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}} & \text{e} \\[2em] \varphi = -\theta_2 = -\mathrm{tg}^{\,-1}\left[\dfrac{\gamma\,\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)}\right]\,. \end{cases} \tag{18}$$

A solução particular que procuramos, da equação inomogênea (2) do oscilador amortecido e forçado, é a parte real da solução complexa $z(t)$, ou seja, $x_p(t) = \Re\mathrm{e}[z(t)]$:

$$x_p(t) = \Re\mathrm{e}\{A\,\mathrm{e}^{i\,\varphi}\,\mathrm{e}^{i\,\omega t}\} = \Re\mathrm{e}\{A[\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi][\cos(\omega t) + i\,\mathrm{sen}(\omega t)]\} \tag{19}$$

$$\Longrightarrow \quad x_p(t) = A\,[\cos\varphi\cos(\omega t) - \mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}(\omega t)] = A\,\cos(\omega t-\varphi)\,, \tag{20}$$

onde a constante A e a fase φ são dadas pela expressão (18).