

PEF 3401 - Mecânica das Estruturas II

Revisão de conceitos básicos da Resistência dos Materiais

Prof. Dr. Carlos Eduardo Nigro Mazzilli
Prof. Dr. Guilherme Rosa Franzini
Prof. Dr. Rodrigo Provasi Correia

Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, Brasil

23/08/2022



Índice

- 1 Objetivo
- 2 Equações diferenciais de equilíbrio
- 3 Grau de hiperstaticidade (GH)
- 4 Identificando o grau de hiperstaticidade
- 5 Estruturas simétricas
- 6 Um exemplo simples

Índice

- 1 Objetivo
- 2 Equações diferenciais de equilíbrio
- 3 Grau de hiperstaticidade (GH)
- 4 Identificando o grau de hiperstaticidade
- 5 Estruturas simétricas
- 6 Um exemplo simples

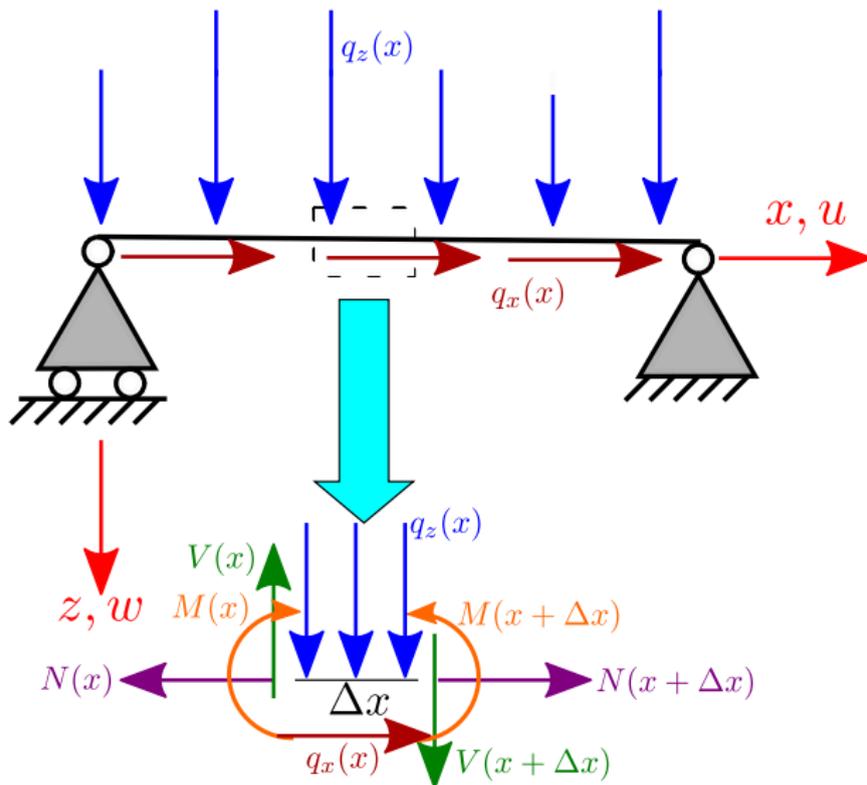
Objetivo

- Retomar conceitos básicos da Resistência dos Materiais como diagramas de esforços solicitantes, grau de hiperstaticidade de estruturas e análise de estruturas fechadas. Esses conceitos serão fundamentais no desenvolvimento da disciplina PEF 3401 - Mecânica das Estruturas II.
- Como o documento faz uma revisão, aspectos elementares como o cálculo de reações de apoio são assumidos como de amplo domínio da turma.

Índice

- 1 Objetivo
- 2 Equações diferenciais de equilíbrio
- 3 Grau de hiperestaticidade (GH)
- 4 Identificando o grau de hiperestaticidade
- 5 Estruturas simétricas
- 6 Um exemplo simples

Equações diferenciais de equilíbrio



Equações diferenciais de equilíbrio

Considere o elemento ilustrado na Figura acima. Isolando um pequeno elemento de comprimento Δx e imaginando que os carregamentos externos $q_x(x)$ e $q_z(x)$ possam ser tomados como constantes ao longo do elemento, o equilíbrio impõe que:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -N(x) + q_x \Delta x + N(x + \Delta x) = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_z = 0 \rightarrow -V(x) + q_z \Delta x + V(x + \Delta x) = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sum M_P = 0 &\rightarrow -M(x) - q_z(x) \frac{(\Delta x)^2}{2} - V(x + \Delta x) \Delta x + M(x + \Delta x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{M(x + \Delta x) - M(x)}{\Delta x} - q_z(x) \frac{\Delta x}{2} - V(x + \Delta x) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

onde P é o ponto mais à esquerda do elemento estudado.

No limite $\Delta x \rightarrow 0$, naturalmente surgem as derivadas dos esforços solicitantes com relação à coordenada x , indicada por ()':

$$N'(x) = -q_x(x) \quad (4)$$

$$V'(x) = -q_z(x) \quad (5)$$

$$M'(x) = V(x) \quad (6)$$

Equações diferenciais de equilíbrio

- As Equações diferenciais de equilíbrio (Eqs. 4-6) não apenas permitem que calculemos os esforços solicitantes pelas correspondentes integrações (**cuidado com as constantes de integração**) mas também avaliar aspectos qualitativos dos diagramas.
- Essa análise qualitativa nos permite identificar prontamente alguns erros. Por exemplo, em regiões da estrutura onde a força cortante é uma constante não nula, o momento fletor deve variar linearmente. Em regiões onde a força cortante é nula, $M'(x) = V(x) = 0$ e, portanto, o diagrama de momento fletor é constante (que pode ou não ser 0).

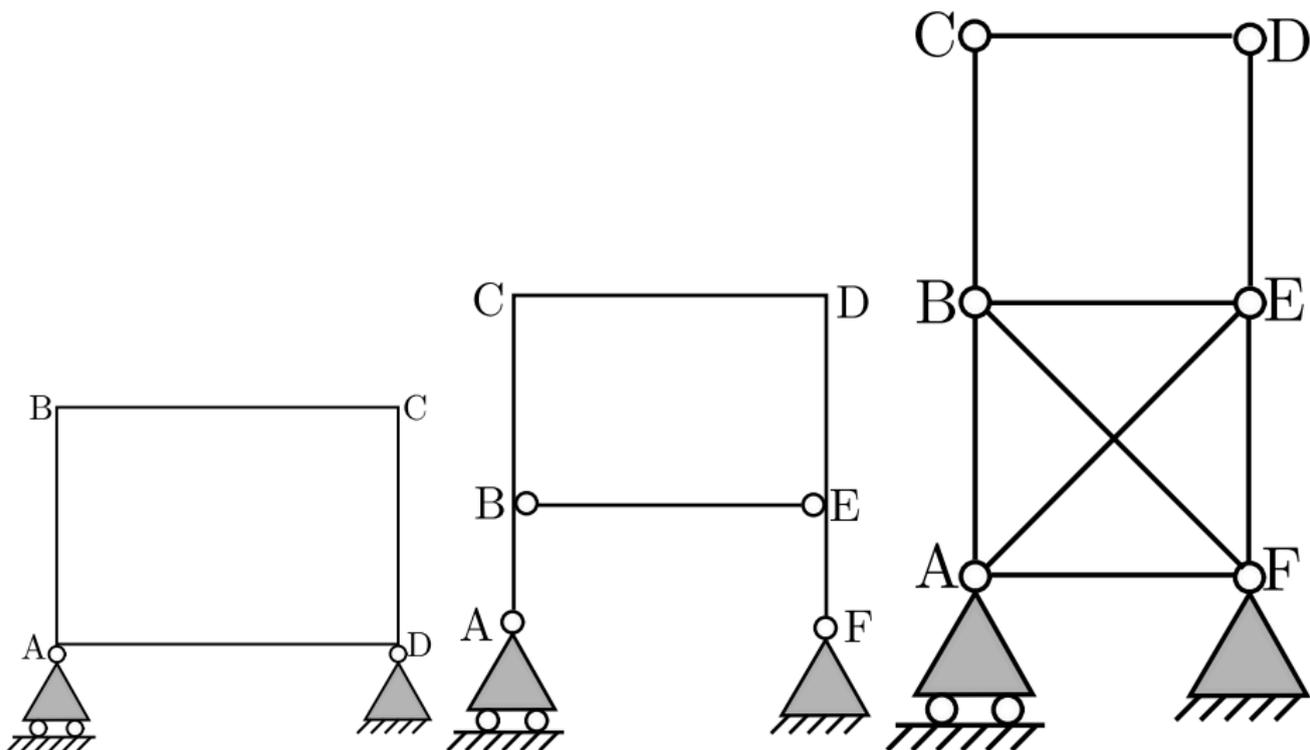
Índice

- 1 Objetivo
- 2 Equações diferenciais de equilíbrio
- 3 Grau de hiperestaticidade (GH)**
- 4 Identificando o grau de hiperestaticidade
- 5 Estruturas simétricas
- 6 Um exemplo simples

Definição

- Seja uma estrutura com v incógnitas vinculares e seja n o número de equações de equilíbrio. Uma condição necessária mas não suficiente para que uma estrutura seja externamente isostática é $n = v$. Se, além de externamente isostática, for possível obter os esforços solicitantes em todos os pontos da estrutura, ela será classificada como isostática.
- Dois exemplos clássicos de estruturas externamente isostáticas mas classificadas como (internamente) hiperestáticas incluem o quadro fechado ilustrado na Figura a seguir (à esquerda) e o pórtico com o reforço da barra bi-articulada ilustrado na porção central da mesma figura. Nessas duas estruturas, embora de posse das reações de apoio, não é possível a determinação completa dos esforços solicitantes.
- Caso o sistema estrutural seja caracterizado por movimento de corpo rígido em sua totalidade ou mesmo em um trecho localizado, esse sistema é classificado como hipostático.
- Em uma treliça com n nós, b barras e v incógnitas vinculares, a clássica relação $2n = b + v$ é condição necessária mas não suficiente para configurá-la como isostática. Como contra-exemplo, note que a treliça da Figura a seguir, à direita, respeita essa relação mas permite um movimento de corpo rígido localizado na sua porção superior.

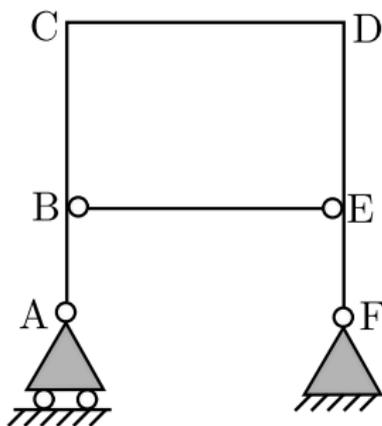
Exemplos que podem trazer dúvidas



Índice

- 1 Objetivo
- 2 Equações diferenciais de equilíbrio
- 3 Grau de hiperestaticidade (GH)
- 4 Identificando o grau de hiperestaticidade**
- 5 Estruturas simétricas
- 6 Um exemplo simples

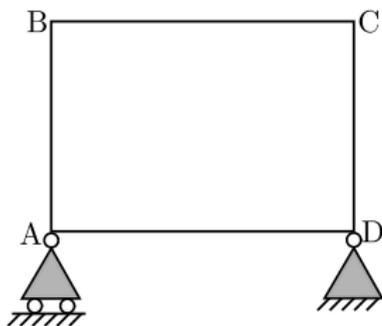
Exemplo 1 - Pórtico reforçado



Como identificar o grau de hiperestaticidade?

- Pensemos de forma construtivista. Se não houvesse a barra BE, teríamos um pórtico com um apoio duplo e um apoio simples. Logo, seria uma estrutura isostática.
- Retomando o problema original e no caso de não haver carregamento aplicado internamente à barra BE, ela vai estar submetida apenas à força normal. Essa força não pode ser determinada por meio das equações de equilíbrio da qual dispomos.
- Assim, a estrutura da Figura à esquerda tem $GH = 1$. Veremos ao longo do curso como resolver essa estrutura para identificar a força normal na barra BE como incógnita hiperestática.
- Importante: A representação gráfica indica que a barra BE não transmite momento fletor para o pórtico ABCDEF. Isso não significa que o momento fletor seja nulo nos pontos B e E pertencentes ao pórtico.

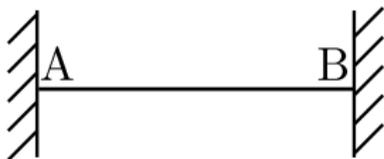
Exemplo 2 - Quadro fechado



Como identificar o grau de hiperestaticidade?

- Novamente, pensemos de forma construtivista. Se o quadro fosse aberto, por exemplo, na metade do comprimento da barra BC, o sistema seria isostático.
- Ao fecharmos a estrutura, devemos considerar na seção que seria aberta os esforços solicitantes correspondentes (força normal, força cortante e momento fletor). Logo, embora essa estrutura seja externamente isostática, ela possui três incógnitas hiperestáticas internas e, portanto, $GH = 3$.
- Importante: Como já visto em outras disciplinas, estruturas simétricas carregadas de força simétrica ou anti-simétrica ajudam a reduzir o número de incógnitas hiperestáticas a serem calculadas. Esse material retomará esse conceito.

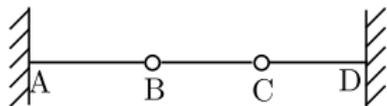
Exemplo 3 - Viga bi-engastada



Como identificar o grau de hiperestaticidade?

- Aqui, temos 6 incógnitas vinculares e três equações de equilíbrio. Logo, $GH = 3$
- No entanto, temos particular interesse na resposta da estrutura na direção transversal. Em teoria de primeira ordem (ou seja, aquela na qual o equilíbrio é formulado na configuração indeformada da estrutura), as forças na direção da barra não influem no equilíbrio na direção transversal.
- Logo, no escopo da disciplina, o interesse é calcular duas incógnitas hiperestáticas (por exemplo, as reações de apoio vertical e de momento no vínculo da direita).
- Importante: O comentário acima é válido no caso de uma única barra. Caso o problema em estudo tivesse foco em uma viga poligonal bi-engastada, deveríamos considerar as três incógnitas hiperestática.

Exemplo 4 - Estrutura apoiada



Como identificar o grau de hiperestaticidade?

- Retomemos aqui o raciocínio construtivista. Imaginando que as articulações em B e C não existam e focando apenas na resposta na direção transversal (portanto, considerando apenas o equilíbrio de força na direção vertical e o equilíbrio de momentos), o sistema tem duas incógnitas hiperestáticas (por exemplo, as reações de apoio vertical e de momento em D).
- Ao inserir uma articulação em C, ganhamos uma equação de equilíbrio, reduzindo o número de incógnitas hiperestáticas para 1.
- A inserção de uma segunda articulação, agora em B, reduz o grau de hiperestaticidade de 1 para 0. Logo, o sistema exibido na Figura ao lado é isostático.
- Podemos interpretar a estrutura ao lado como sendo a viga BC que se apoia nas vigas em balanço AB e CD.

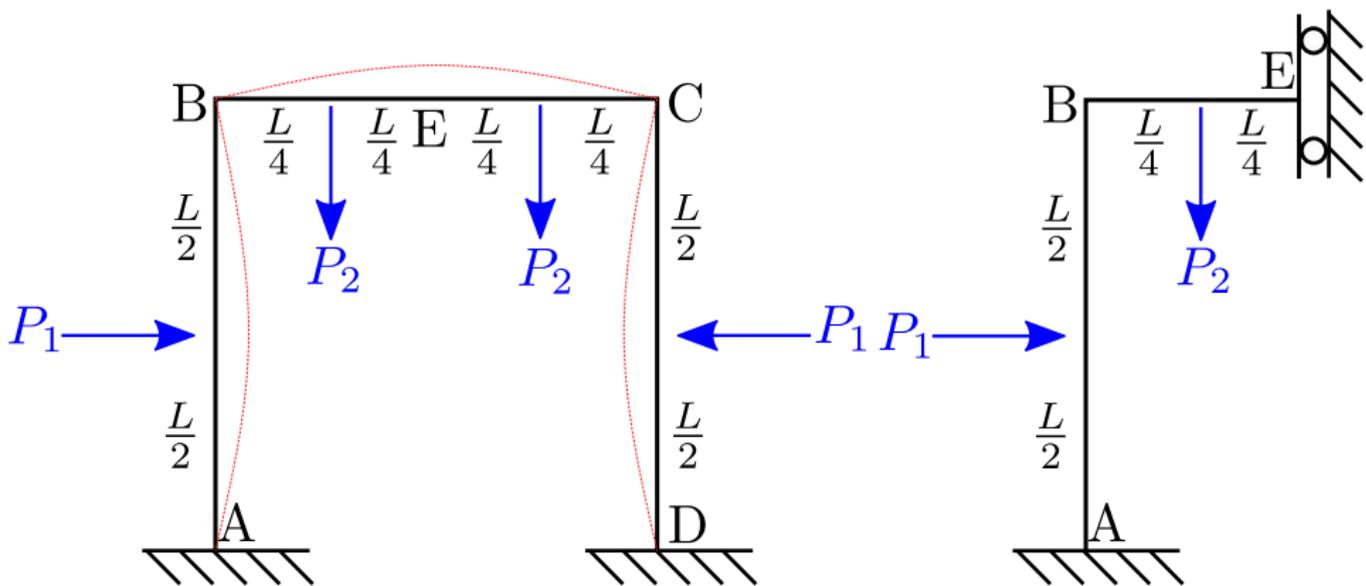
Índice

- 1 Objetivo
- 2 Equações diferenciais de equilíbrio
- 3 Grau de hiperstaticidade (GH)
- 4 Identificando o grau de hiperstaticidade
- 5 Estruturas simétricas**
- 6 Um exemplo simples

Estruturas simétricas

- Como já visto em outros cursos, a presença de estruturas simétricas pode facilitar a análise, reduzindo o número de incógnitas hiperestáticas que precisam ser calculadas.
- Nesses casos, é necessário identificar se o carregamento é simétrico (fazendo com que a configuração deformada seja simétrica com relação ao plano de simetria) ou anti-simétrico, o que leva a uma configuração deformada anti-simétrica com relação ao plano de simetria.
- No caso de uma estrutura simétrica sob carregamento geral, sempre é possível fazer a decomposição do carregamento em uma parte simétrica somada a uma anti-simétrica e, tomando partido da linearidade do problema (valendo, portanto, superposição de efeitos), recuperar as incógnitas hiperestáticas do problema original. No entanto, muitas vezes não há vantagem nessa decomposição.

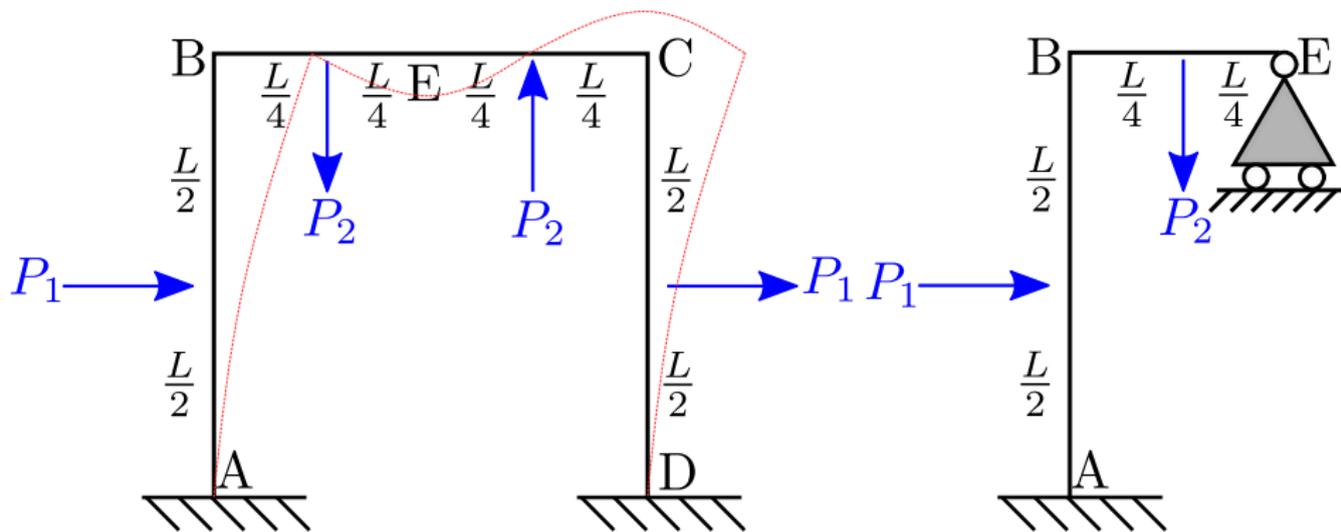
Ação de carregamento simétrico



Ação de carregamento simétrico

- Na Figura à esquerda e em vermelho, temos um esboço da configuração deformada. Note que os ângulos em B e C, inicialmente retos, permanecem retos na configuração deformada (nós rígidos).
- Na seção de simetria (linha vertical passando por E), não há rotação nem deslocamento horizontal. Isso permite analisarmos o problema considerando apenas a metade à esquerda da estrutura, considerando em E um vínculo apropriado.
- No caso, o vínculo apropriado é um engaste móvel (ver Figura à direita), dado que ele restringe os deslocamentos mencionados no item acima, permitindo deslocamento vertical.
- Analisando a figura à direita, vamos descobrir o grau de hiperestaticidade. Considerando o trecho ABE e imaginando em um primeiro momento que o engaste móvel não existe, temos uma viga poligonal engastada-livre, configurando um sistema isostático.
- Ao inserirmos o engaste móvel, passamos a ter duas incógnitas hiperestáticas (por exemplo, a força normal e o momento fletor no ponto E). Assim, o problema tem $GH = 2$.
- Resolvido o problema hiperestático, os esforços solicitantes obtidos para a estrutura à esquerda da seção de simetria podem ser rebatidos para a composição dos diagramas da estrutura completa.

Ação de carregamento anti-simétrico



Ação de carregamento anti-simétrico

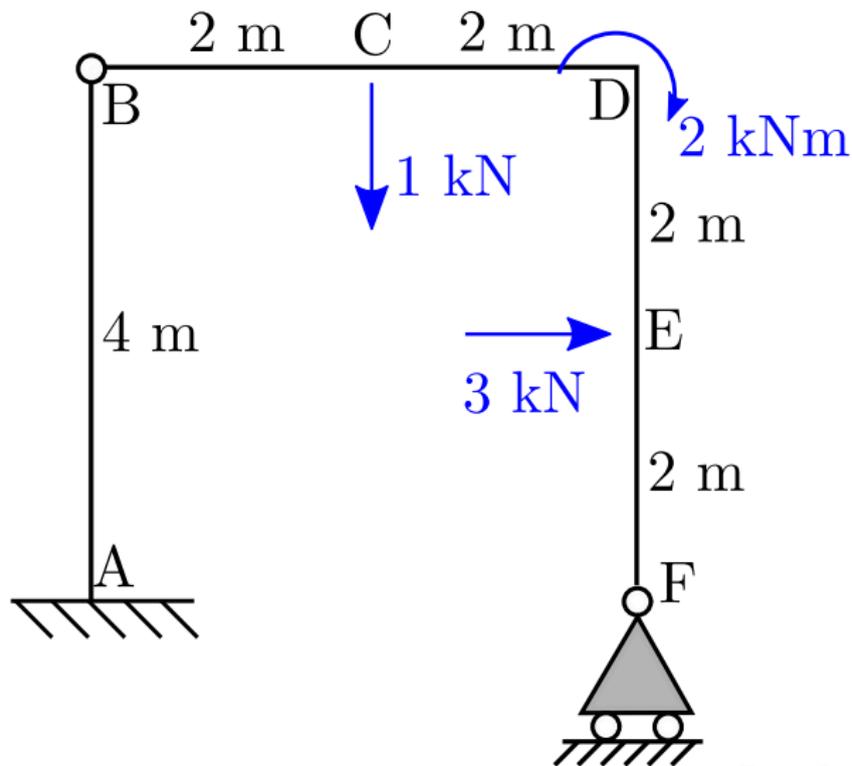
- Na Figura à esquerda e em vermelho, temos um esboço da configuração deformada. Note que os ângulos em B e C, inicialmente retos, permanecem retos na configuração deformada (nós rígidos).
- Na seção de simetria (linha vertical passando por E na configuração de referência), não há deslocamento vertical. Isso permite analisarmos o problema considerando apenas a metade à esquerda da estrutura, considerando em E um vínculo apropriado.
- No caso, o vínculo apropriado é um apoio simples (ver Figura à direita), dado que ele restringe o deslocamento mencionado no item acima, permitindo deslocamento horizontal e rotação no ponto E.
- Analisando a figura à direita, vamos descobrir o grau de hiperestaticidade. Considerando o trecho ABE e imaginando em um primeiro momento que o apoio simples não existe, temos uma viga poligonal engastada-livre, configurando um sistema isostático.
- Ao inserirmos o apoio simples, passamos a ter uma incógnita hiperestática (por exemplo, a força cortante no ponto E). Assim, o problema tem $GH = 1$.
- Resolvido o problema hiperestático, os esforços solicitantes obtidos para a estrutura à esquerda da seção de simetria podem ser rebatidos e trocados de sinal para a composição dos diagramas da estrutura completa.

Índice

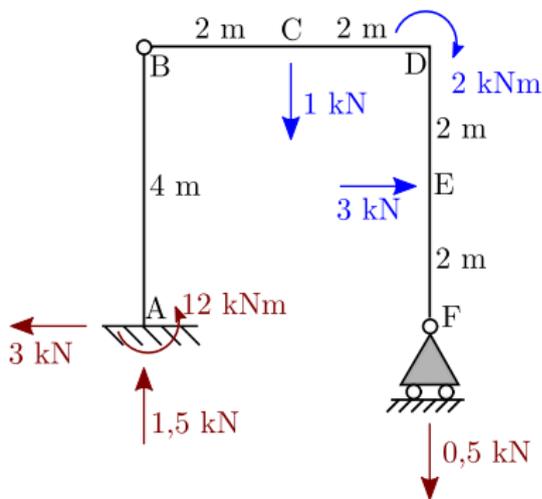
- 1 Objetivo
- 2 Equações diferenciais de equilíbrio
- 3 Grau de hiperstaticidade (GH)
- 4 Identificando o grau de hiperstaticidade
- 5 Estruturas simétricas
- 6 Um exemplo simples

Enunciado

Obter os diagramas de esforços solicitantes para a estrutura abaixo.

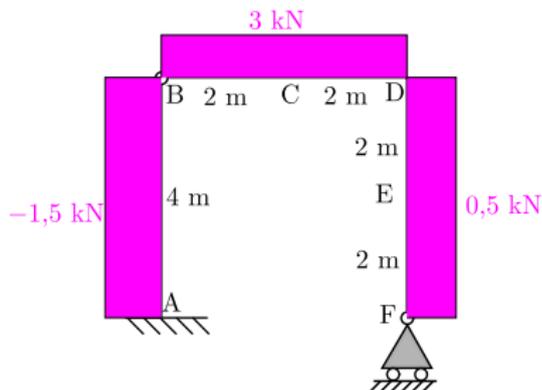


Reações de apoio



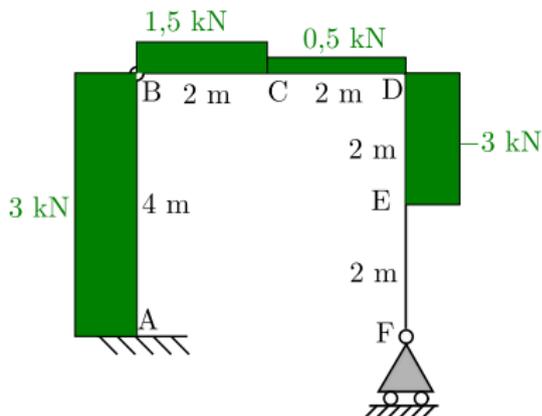
- Ao lado, vemos os esforços externos ativos e reativos.
- A única reação horizontal é em A e deve equilibrar o carregamento horizontal de 3 kN;
- Um corte na articulação B e análise do trecho AB revela que o momento da reação horizontal em A com relação a B é 12 kNm (entrando na tela) e que deve ser equilibrado pela reação de momento no engaste.
- Importante: Nesse problema temos três equações de equilíbrio para a estrutura ($\sum F_H = 0$, $\sum F_V = 0$, $\sum M_P = 0$ - P é um polo qualquer) e uma equação de equilíbrio que indica como nulo o momento fletor na articulação B (M_B). Como temos 4 incógnitas vinculares e não há movimento de corpo rígido, o sistema é isostático.
- Note que usar, por exemplo, $\sum F_H = 0$, $\sum F_V = 0$, $\sum M_P = 0$, $\sum M_B = 0$ não permite escrever quatro equações linearmente independentes.

Diagrama de força normal



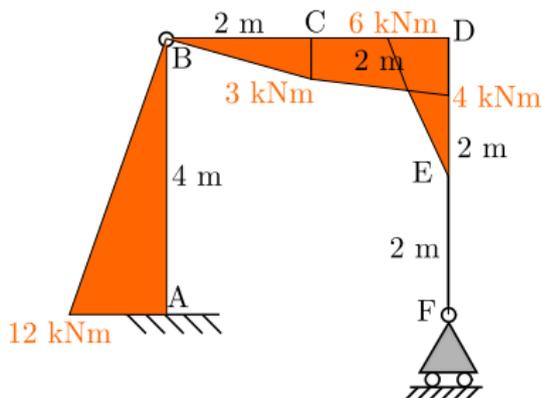
- Para a determinação dos esforços solicitantes (força normal, força cortante e momento fletor), podemos usar cortes na estrutura e equilibrar uma das sub-estruturas definidas pelo corte. Lembrem-se de colocar os esforços solicitantes nas seções de corte e das convenções de sinais.
- Nesse exemplo, precisamos de cinco cortes. Devemos realizar um corte quando i) há mudança na direção da barra ou ii) temos uma mudança no carregamento.
- Note que, como não há forças concentradas na direção dos eixos das barras, o diagrama de força normal é contínuo em AB, BD e DF. As descontinuidades ocorrem apenas nos nós B e D, onde há mudança de direção das barras.
- Nesse caso e como esses ângulos são retos, forças cortantes em AB e DF se transformam em força normal em BD.

Diagrama de força cortante



- Como não há reação de apoio horizontal em F, a cortante é nula ao longo do trecho EF. Isso pode ser facilmente identificado por meio de um corte entre E e F e do equilíbrio do trecho abaixo do corte.
- Como o problema só lida com cargas concentradas, dentro dos trechos AB, BC, CD, DE e EF, não há carregamento transversal distribuído. Assim, pela Equação 5, a força cortante deve ser constante nesses trechos.
- Ocorre descontinuidade nos diagramas de força cortante nos pontos onde há cargas transversais concentradas. Como vocês já viram, a descontinuidade é igual ao valor da carga concentrada.
- Novamente, nos nós onde há mudança de direção das barras, forças cortantes se transformam em forças normais e vice-versa.
- **Esses tópicos ajudam a identificar erros nos diagramas.**

Diagrama de momento fletor



- Como o diagrama de força cortante é constante por trechos, pela Equação 6, o diagrama de momentos fletores é linear por trechos nesse caso. Notem que a inclinação do diagrama de momentos fletores é numericamente igual às forças cortantes.
- O único ponto onde o momento fletor é descontínuo é o nó D. Isso não surpreende, dado que é o único ponto onde há momento aplicado concentrado.
- Notem que a descontinuidade no diagrama de momento fletor em D é exatamente igual ao valor do momento aplicado (2 kNm).
- Em EF, como não há força horizontal aplicada nem momento externo aplicado a F , é impossível ter uma solução equilibrada com momento fletor.
- O comentário acima pode ser interpretado de outra forma. Como não há momento aplicado ao vínculo F e o diagrama de força cortante é 0, o momento fletor no trecho não pode variar (ver Equação 6) e deve ser, portanto, nulo.