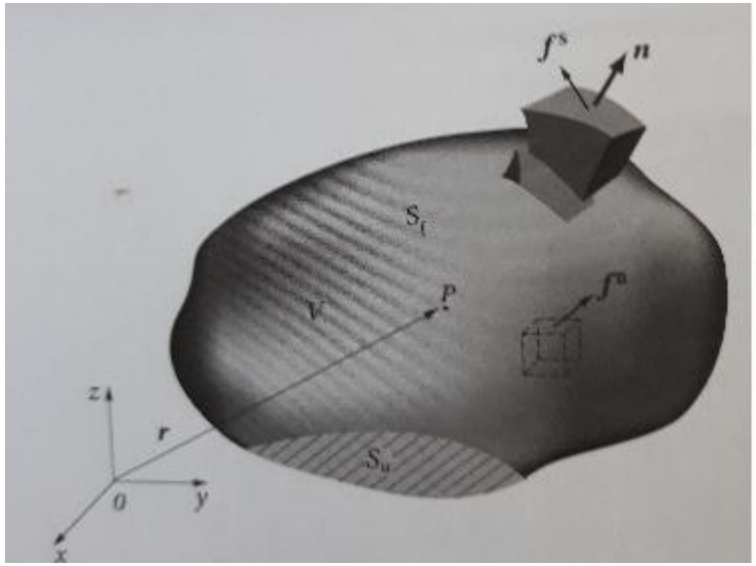
PEF3401 Mecânica das Estruturas II

Carlos E.N. Mazzilli
Guilherme R. Franzini

Sólido deformável



Em barras?

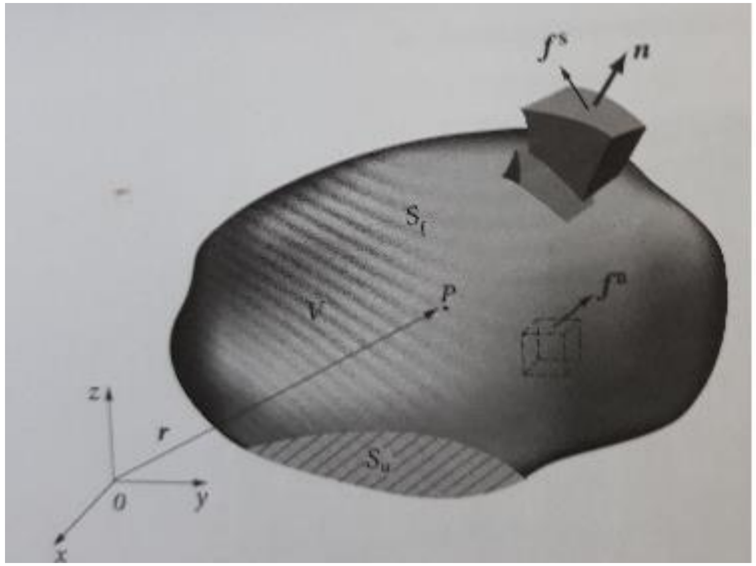
Equilíbrio em V: $[\partial_\sigma]\{\sigma\} + \{f_b\} = 0$

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z} + f_{bx} = 0$$
$$\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z} + f_{by} = 0$$
$$\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + f_{bz} = 0$$

Equilíbrio em S_f: $[T]\{n\} = \{\widehat{f_s}\}$

$$\sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y + \sigma_{xz}n_z = \hat{f}_{sx}$$
$$\sigma_{yx}n_x + \sigma_{yy}n_y + \sigma_{yz}n_z = \hat{f}_{sy}$$
$$\sigma_{zx}n_x + \sigma_{zy}n_y + \sigma_{zz}n_z = \hat{f}_{sz}$$

Sólido deformável



Em barras?

Compatibilidade em V: $\{\varepsilon\} = [\partial_\varepsilon]\{u\}$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

Compatibilidade em S_u: $\{u\} = \{\hat{u}\}$

$$u = \hat{u} \qquad v = \hat{v} \qquad w = \hat{w}$$

Teorema do Trabalho

Demonstra-se em PEF3302 (Mecânica das Estruturas I) a tese do teorema do trabalho:

$$\boxed{\tau_{int} = \tau_{ext}}$$

cujo significado é "o trabalho dos esforços internos é igual ao dos esforços externos, quando eles estiverem em equilíbrio, perante deformações e deslocamentos que respeitarem as condições de compatibilidade"

$$\tau_{int} = \int_V \{\varepsilon^c\}^T \{\sigma^e\} dV \qquad \tau_{ext} = \int_V \{u^c\}^T \{f_b\} dV + \int_S \{u^c\}^T \{f_s\} dS$$

Exemplo em barras

Trabalhos virtuais: definições

Sejam $\{u\}$ e $\{\varepsilon\}$ deslocamentos e deformações reais de um dado problema. Evidentemente, satisfazem às condições cinemáticas de vínculos externos e internos. Portanto:

$\{u\} = \{\hat{u}\}$ na região S_u dos vínculos externos

$\{\varepsilon\} = [\partial_\varepsilon]\{u\}$ no domínio V do sólido deformável, para pequenos deslocamentos e deformações

Deslocamentos virtuais $\{\delta u\}$ e deformações virtuais $\{\delta\varepsilon\}$, se superpostos aos reais, também devem satisfazer às condições cinemáticas de vínculos externos e internos (são ditos cinematicamente admissíveis). Portanto:

$\{u\} + \{\delta u\} = \{\hat{u}\} \Rightarrow \{\delta u\} = 0$ em S_u

$\{\varepsilon\} + \{\delta\varepsilon\} = [\partial_\varepsilon](\{u\} + \{\delta u\})$=$[\partial_\varepsilon]\{u\} + [\partial_\varepsilon]\{\delta u\} \Rightarrow \{\delta\varepsilon\} = [\partial_\varepsilon]\{\delta u\}$ no domínio do sólido deformável, para pequenos deslocamentos e deformações

Trabalhos virtuais: definições

Sejam $\{f_b\}, \{f_s\}$ e $\{\sigma\}$ forças de volume, de superfície e tensões reais de um dado problema. Evidentemente, satisfazem às condições de equilíbrio externo e interno. Portanto:

$[T]\{n\} = \{\hat{f_s}\}$ na região S_f do contorno de um sólido deformável com forças de superfície impostas

$[\partial_\sigma]\{\sigma\} + \{f_b\} = 0$ no domínio V do sólido deformável, para pequenos deslocamentos e deformações

Forças virtuais $\{\delta f_b\}, \{\delta f_s\}$ e tensões virtuais $\{\delta\sigma\}$, se superpostas às reais, também devem satisfazer às condições de equilíbrio externo e interno (são ditas estaticamente admissíveis). Portanto:

$([T] + [\delta T])\{n\} = \{\hat{f_s}\} \Rightarrow [\delta T]\{n\} = 0 \Rightarrow [\delta T] = 0 \Rightarrow \{\delta\sigma\} = 0$ na região S_f

$[\partial_\sigma](\{\sigma\} + \{\delta\sigma\}) + \{f_b\} + \{\delta f_b\} = 0 \Rightarrow [\partial_\sigma]\{\delta\sigma\} + \{\delta f_b\} = 0$ no domínio do sólido deformável, para pequenos deslocamentos e deformações

Teorema dos deslocamentos virtuais

Do Teorema do Trabalho, tomando inicialmente como solução equilibrada a real, e como solução cinematicamente admissível também a real:

$$\boxed{\int_V \{\varepsilon\}^t\{\sigma\}dV = \int_V \{u\}^t\{f_b\}dV + \int_S \{u\}^t\{f_s\}dS}$$

Do Teorema do Trabalho, tomando agora como solução equilibrada a real, e como solução cinematicamente admissível uma virtual:

$$\int_V (\{\varepsilon\} + \{\delta\varepsilon\})^t\{\sigma\}dV = \boxed{\int_V \{\varepsilon\}^t\{\sigma\}dV} + \int_V \{\delta\varepsilon\}^t\{\sigma\}dV =$$

$$\int_V (\{u\} + \{\delta u\})^t\{f_b\}dV + \int_S (\{u\} + \{\delta u\})^t\{f_s\}dS =$$

$$\boxed{\int_V \{u\}^t\{f_b\}dV + \int_S \{u\}^t\{f_s\}dS} + \int_V \{\delta u\}^t\{f_b\}dV + \int_S \{\delta u\}^t\{f_s\}dS$$

$\Rightarrow \boxed{\delta\tau_{int} = \delta\tau_{ext}}$ onde $\boxed{\delta\tau_{int} = \int_V \{\delta\varepsilon\}^t\{\sigma\}dV}$ e $\boxed{\delta\tau_{ext} = \int_V \{\delta u\}^t\{f_b\}dV + \int_{S_f} \{\delta u\}^t\{f_s\}dS}$

Teorema dos esforços virtuais

Do Teorema do Trabalho, tomando inicialmente como solução equilibrada a real, e como solução cinematicamente admissível também a real:

$$\boxed{\int_V \{\varepsilon\}^t\{\sigma\}dV = \int_V \{u\}^t\{f_b\}dV + \int_S \{u\}^t\{f_s\}dS}$$

Do Teorema do Trabalho, tomando como solução equilibrada uma virtual, e agora como solução cinematicamente admissível a real:

$$\int_V \{\varepsilon\}^t(\{\sigma\} + \{\delta\sigma\})dV = \boxed{\int_V \{\varepsilon\}^t\{\sigma\}dV} + \int_V \{\varepsilon\}^t\{\delta\sigma\}dV =$$

$$\int_V \{u\}^t(\{f_b\} + \{\delta f_b\})dV + \int_S \{u\}^t(\{f_s\} + \{\delta f_s\})dS =$$

$$\boxed{\int_V \{u\}^t\{f_b\}dV + \int_S \{u\}^t\{f_s\}dS} + \int_V \{u\}^t\{\delta f_b\}dV + \int_S \{u\}^t\{\delta f_s\}dS$$

$\Rightarrow \boxed{\delta\tau^*_{int} = \delta\tau^*_{ext}}$ onde $\boxed{\delta\tau^*_{int} = \int_V \{\varepsilon\}^t\{\delta\sigma\}dV}$ e $\boxed{\delta\tau^*_{ext} = \int_V \{u\}^t\{\delta f_b\}dV + \int_S \{u\}^t\{\delta f_s\}dS}$

Teoria elementar de barras 2D
solução estaticamente admissível

$$\frac{dN^e}{dx} + q_x = 0$$

$$\frac{dV_z^e}{dx} + q_z = 0$$

$$\frac{dM_y^e}{dx} = V_z^e \Rightarrow \frac{d^2M_y^e}{dx^2} = -q_z$$

$$N^e = \int_A \sigma_{xx}^e dA$$

$$V_z^e = \int_A \sigma_{xz}^e dA$$

$$M_y^e = \int_A \sigma_{xx}^e z dA$$

Hipótese de Bernoulli $\sigma_{xx}^e = \alpha + z\beta \Rightarrow \alpha = \frac{N^e}{A}$ e $\beta = \frac{M_y^e}{I_y}$

Equilíbrio longitudinal $\sigma_{xz}^e = \frac{V_z^e \mathcal{M}}{bI_y}$

Lei de Hooke $\varepsilon_{xx}^e = \frac{N^e}{EA} + \frac{M_y^e}{EI_y} z$

$$\gamma_{xz}^e = \frac{\sigma_{xy}^e}{G}$$

Não é cinematicamente admissível!!!

Teoria elementar de barras 2D
solução cinematicamente admissível

Hipótese de Navier $u^c = \bar{u}^c - z(\bar{w}^c)'$

$$w^c = \bar{w}^c$$

$$\varepsilon_{xx}^c = (\bar{u}^c)' - z(\bar{w}^c)''$$

$$\gamma_{xz}^c = 0$$

Lei de Hooke $\sigma_{xx}^c = E(\bar{u}^c)' - zE(\bar{w}^c)''$

$$\sigma_{xz}^c = 0$$

Não é estaticamente admissível!!!

$$N^c = \int_A \sigma_{xx}^c dA \qquad (\bar{u}^c)' = \frac{N^c}{EA}$$

$$M_y^c = \int_A \sigma_{xx}^c z dA \qquad (\bar{w}^c)'' = -\frac{M_y^c}{EI_y}$$

Teorema do Trabalho
barras 2D

$$\tau_{int} = \tau_{ext}$$

$$\tau_{int} = \int N^e (\bar{u}^c)' ds + \int M_y^e (-\bar{w}^c)'' ds$$

$$\tau_{int} = \int EA (u^e)' (\bar{u}^c)' ds + \int EI_y (\bar{w}^e)'' (\bar{w}^c)'' ds$$

$$\tau_{int} = \int \frac{N^e N^c}{EA} ds + \int \frac{M_y^e M_y^c}{EI_y} ds$$

$$\tau_{ext} = \int q_x \bar{u}^c ds + \int q_z \bar{w}^c ds + \sum_i E_i d_i^c$$

Teorema dos Deslocamentos Virtuais (TDV) barras 2D

$$\delta\tau_{int} = \delta\tau_{ext}$$

$$\delta\tau_{int} = \int N(\delta\bar{u})'ds + \int M_y(-\delta\bar{w})''ds$$

$$\delta\tau_{ext} = \int q_x\delta\bar{u}ds + \int q_z\delta\bar{w}ds + \sum_i E_i\delta d_i$$

Reações de vínculos com recalques não entram no somatório

Teorema dos Esforços Virtuais (TEV) barras 2D

$$\delta\tau_{int}^{*} = \delta\tau_{ext}^{*}$$

$$\delta\tau_{int}^{*} = \int \delta N(\bar{u})' ds + \int \delta M_y (-\bar{w})'' ds$$

$$\delta\tau_{int}^{*} = \int \frac{N\delta N}{EA} d\boldsymbol{s} + \int \frac{M_y\ \delta M_y}{EI_y} ds$$

$$\delta\tau_{ext}^{*} = \int \delta q_x \bar{u} ds + \int \delta q_z \bar{w} ds + \sum_i \delta E_i d_i$$

Teorema dos Esforços Virtuais (TEV) barras 3D*

$$\delta\tau_{int}^{*} = \delta\tau_{ext}^{*}$$

$$\delta\tau_{int}^{*} = \int \delta N(\bar{u})' ds + \int \delta M_y \ (-\bar{w})'' ds + \int \delta M_z \ (\bar{v})'' ds + \int \delta T(\bar{\theta})' ds$$

$$\delta\tau_{int}^{*} = \int \frac{N\delta N}{EA} ds + \int \frac{M_y \ \delta M_y}{EI_y} ds + \int \frac{M_z \ \delta M_z}{EI_z} ds + \int \frac{T\delta T}{GI_t} ds$$

$$\delta\tau_{ext}^{*} = \int \delta q_x \bar{u} ds + \int \delta q_z \bar{w} ds + \int \delta q_y \bar{v} ds + \sum_i \delta E_i d_i$$

*flexão composta oblíqua e torção uniforme