

Mecânica I – PME 3100

Notas de Aula – Parte 1

MECÂNICA GERAL

ESTÁTICA

Roberto Spinola Barbosa

CONTEÚDO

1. INTRODUÇÃO

Esta monografia resume as notas de aula deste autor na disciplina de Mecânica I (PME3100), elaborada ao longo do seu aprimoramento didático junto a equipe de dinâmica do Departamento de Engenharia Mecânica (PME) da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (EP-USP). O texto pressupõe que o aluno domine os conhecimentos elementares de álgebra vetorial, álgebra linear e de cálculo diferencial e integral, adquirido nas disciplinas dos primeiros anos básicos (biênio) do curso de engenharia.

A motivação do curso ministrado pela Departamento de Engenharia Mecânica da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (PME) é formar conhecimento fundamental sobre movimentação de partículas e corpos rígidos com objetivo de identificar trajetórias e solicitações para efeito de projeto mecânico.

O curso está dividido em três etapas a saber:

- 1º Parte – ESTÁTICA
- 2º Parte – CINEMÁTICA
- 3º PARTE – DINÂMICA

O conjunto de notas de aula se inicia pelo trato da ESTÁTICA de sistemas estruturais que serão modelados e analisados. Na CINEMÁTICA, os movimentos e composição de movimentos são tratados. Em DINÂMICA os teoremas de energia (Teorema da Energia Cinética - *TEC*), *Newton* (Teorema da Resultante - *TR*) e *Euler* (Teorema da Quantidade de Movimento Angular - *TQMA*) são apresentados e utilizados. A notação vetorial é utilizada sistematicamente ao longo deste texto (*Boulos, 1997*).

2. REFERENCIAIS

Na mecânica *Newtoniana* clássica, um referencial inercial, é um referencial para o qual a primeira lei de *Newton* é verdadeira. Ou seja: Um referencial inercial é aquele onde uma partícula não sujeita a forças, permanece se movimentando em linha reta e com velocidade constante ou então está parada. A localização de um ponto no espaço ou a descrição do seu movimento cinemático ao longo de um trajeto, requer a identificação de um ponto de observação, a partir do qual sua posição pode ser descrita.

2.1. Sistema de Coordenadas

Um conjunto ortogonal e independente de versores unitários constitui um sistema ou base de coordenadas. Um sistema ou base de coordenadas definida no espaço *Euclidiano* \mathcal{R}^3 da geometria clássica, é composta por uma origem e dois eixos ortogonais (portanto independentes), formando um plano, e um terceiro eixo perpendicular ao plano (portanto independente dos demais, formando uma base positiva).

Um sistema de coordenadas cartesiano com versores tri-ortogonais independentes \mathbf{pqr} pode ser obtido a partir de dois vetores unitários \vec{V}_1 e \vec{V}_2 formando um plano π (não paralelos e não reversos) tomando as seguintes operações:

$$\vec{p} = \frac{\vec{V}_1}{|\vec{V}_1|} \quad ; \quad \vec{q} = \frac{\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2}{|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2|} \quad \text{e} \quad \vec{r} = \vec{p} \wedge \vec{q} \quad (1)$$

Um sistema de coordenadas pode ser fixo $\mathbf{Ee}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, ou móvel \mathbf{Oxyz} , conforme apresentado na Figura 1. O sistema de coordenadas pode estar “**solidário**” a um corpo rígido e, portanto se movimentando junto com ele.

A posição de um ponto P no espaço \mathfrak{R}^3 pode ser descrita por um vetor \vec{r} a partir da origem da base móvel, segundo os versores unitários $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (vetor unitário representado por uma seta sobre a letra) da base móvel \mathbf{Oxyz} ou, representado no sistema de coordenadas fixo, segundo os versores e_1, e_2 e e_3 (letras em negrito identificando vetor).

$$\begin{aligned} (P-O) &= \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ (P-O) &= (x-Oe_1)e_1 + (y-Oe_2)e_2 + (z-Oe_3)e_3 \end{aligned} \quad (2)$$

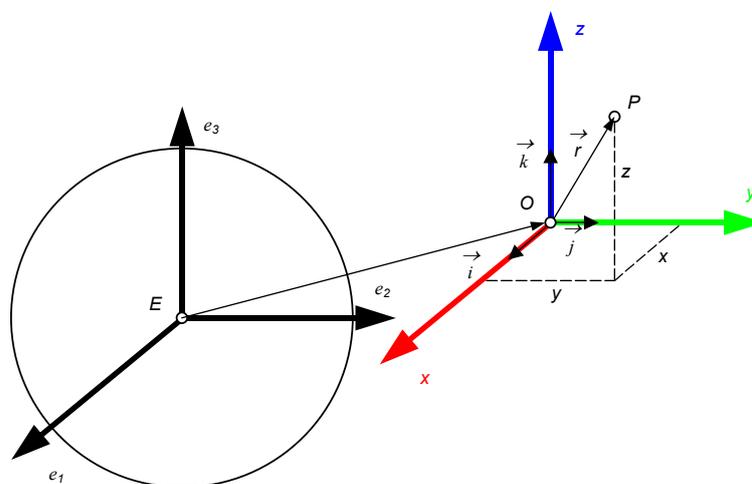


Figura 1 – Sistemas de Coordenadas

O sistema de coordenadas móvel pode ser movimento retilinear (aquele onde a direção dos versores não se altera) ou curvilíneo (aquele que incorpora a direção da trajetória que a origem do referencial móvel descreve). O movimento de um corpo rígido e, portanto de um sistema de coordenadas móvel \mathbf{Oxyz} , pode ser retilinear ou curvilíneo. Pode ter orientação invariante ou ter, por exemplo, um de seus eixos acompanhando uma trajetória (sistema de coordenadas intrínseco - base de *Frenet*). A descrição da distribuição de massa de um corpo é facilitada quando se utiliza de uma sistema de coordenadas solidário ao corpo (a matriz de inércia torna-se constante). Entretanto, quando se utiliza uma sistema de coordenadas móvel, deve-se ter um cuidado especial no cálculo da derivada de vetores. Deve-se distinguir a **derivada local**, feita com respeito a um referencial móvel, da **derivada total** (ou global) que é calculada em relação ao referencial inercial fixo.

3. FORÇAS

A observação e a experiência mostram que o movimento (ou equilíbrio) de um corpo se modifica por efeito da interação com outros corpos. As forças podem ser de **CONTATO** ou de natureza de **CAMPO** com ação à distância. Chama-se força a grandeza física que quantifica a ação mecânica de interação de um corpo sobre outro. Esta interação tem efeitos iguais e contrários em cada corpo (princípio da ação e reação, preconizado na 3ª lei de *Newton*), ocorrendo na região de contato ou à distância devida à gravitação universal ou forças de campo.

Na realidade os corpos em contato se deformam localmente, constituindo uma região de contato onde a força ocorre de maneira distribuída. Entretanto esta distribuição pode ser reduzida a uma resultante com ponto específico de aplicação. A força portanto é uma entidade que pode ser observada apenas de forma indireta por “sensores” que percebem sua intensidade por deformação **EQUIVALENTE** (ex. pressionando a ponta dos dedos).

3.1. Representação da Força

Verifica-se que a força pode ser adequadamente representada por uma grandeza vetorial, pois tem magnitude, direção e sentido. Tipicamente a interação entre corpos rígidos convexos ocorre idealizadamente em um ponto de contato. Num sistema de coordenadas tri-ortogonal, a força \vec{F} que tem ponto de aplicação P é descrita na base de coordenadas $Oxyz$ por um vetor do tipo:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \quad \text{onde} \quad (P-O) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (3)$$

3.2. Sistema de Forças

Um sistema de forças S é composto por conjunto de \vec{F}_i forças aplicadas em P_i pontos específicos sendo $i = 1, 2, 3, \dots, n$, conforme ilustrado na Figura 2.

$$\vec{F}_i = F_{xi} \vec{i} + F_{yi} \vec{j} + F_{zi} \vec{k} \quad \text{e} \quad (P_i - O) = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k} \quad (4)$$

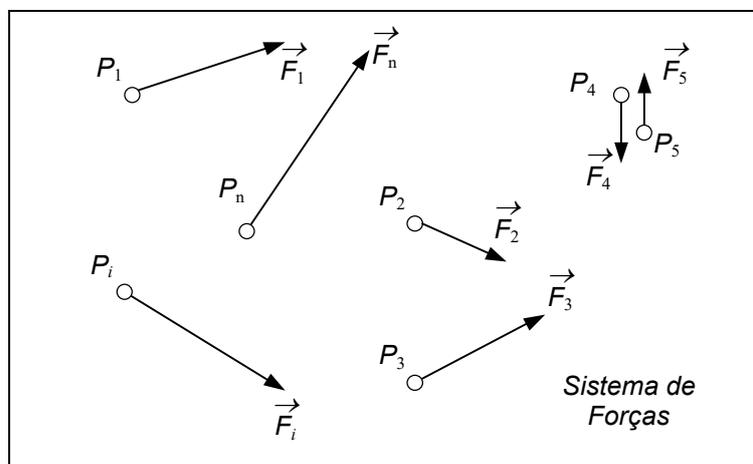


Figura 2 – Sistema de Forças

3.3. Resultante

A **RESULTANTE** \vec{R} de um sistema de forças S formado por (\vec{F}_i, P_i) sendo $i = 1, 2, 3, \dots, n$, conforme ilustrado na Figura 3a, é determinada pelo vetor \vec{R} obtido da soma das forças:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (5)$$

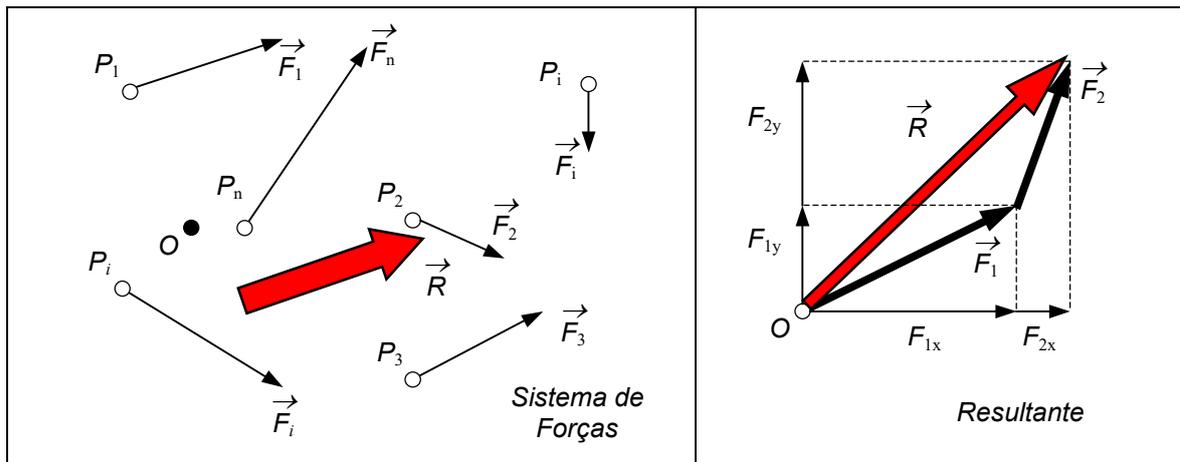


Figura 3 – Resultante de um Sistema de Forças

Em um sistema de coordenadas tri-ortogonal e portanto **independentes**, as componentes do vetor resultante (R_x, R_y, R_z) são escalares conforme ilustrado no plano da Figura 3b, obtidos por

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{xi} \quad ; \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{yi} \quad \text{e} \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{zi} \quad (6)$$

Exemplo Elementar:

Determinar a Resultante \vec{R} do sistema de forças \mathcal{S} dado por (\vec{F}_i, P_i) para $i = 3$:

$$\begin{array}{ll} \vec{F}_1 = 1\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} & P_1 = (0, 2, 0) \\ \vec{F}_2 = 4\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} & \text{aplicadas em } P_2 = (1, 1, 0) \\ \vec{F}_3 = 0\vec{i} + 5\vec{j} + 1\vec{k} & P_3 = (1, 0, 1) \end{array}$$

$$\boxed{\vec{R} = 5\vec{i} + 7\vec{j} + 4\vec{k}}$$

Exemplo Espacial:

Calcule a resultante \vec{R} do sistema de forças \mathcal{S} , (\vec{F}_i, P_i) , indicado na Figura 4:

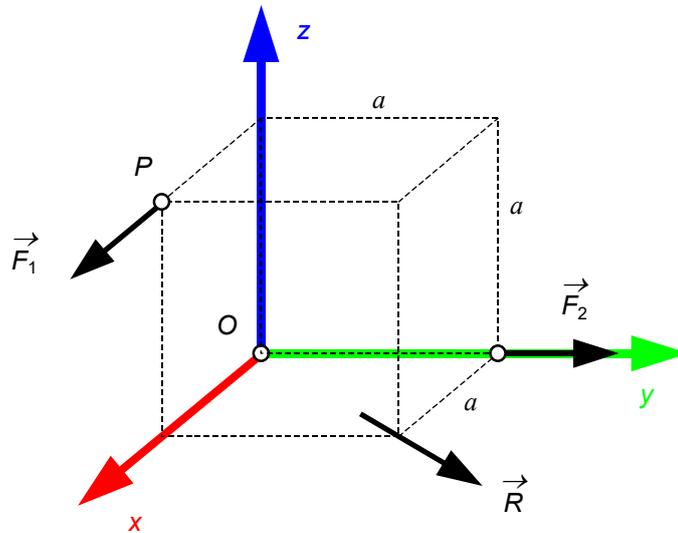


Figura 4 – Resultante de Sistema e Forças

Resolução: Sistema: forças e pontos de aplicação: $\vec{F}_1 = F \vec{i}$ aplicada em $P_1 (a, 0, a)$ e $\vec{F}_2 = F \vec{j}$ aplicada em $P_2 (0, a, 0)$

$$\vec{F}_1 = F \vec{i} + \vec{F}_2 = F \vec{j} \Rightarrow \vec{R} = F \cdot (\vec{i} + \vec{j}) \quad (7)$$

Portanto basta somar as componentes em cada direção das forças ($R_x = \sum_{i=1}^n F_{xi}$) e obter cada componente da resultante ($\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}$).

3.4. Princípio da Ação e Reação

Quando dois corpos rígidos se tocam a interação entre eles, restringe a penetração através de forças **ATIVAS** e **REATIVAS**. Considere um bloco pressionado pelo cotovelo contra uma parede. As forças externas ao bloco, o mantém em equilíbrio.

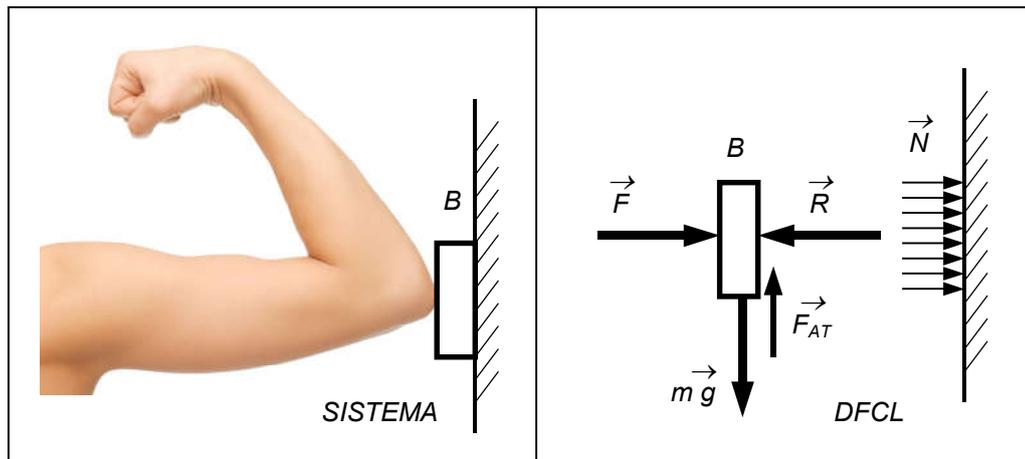


Figura 5 – Ação e Reação

No caso da cotovelo, a força ativa percebida (pelo tecido da mão), tem seu par reativo aplicado no bloco e são sempre forças externas aos corpos e sempre associadas aos pares ativos e reativos de forças iguais e opostas, conforme a terceira lei de *Newton*. Existem dois grandes grupos de forças:

- **FORÇAS DE CONTATO** e
- **FORÇAS DE CAMPO.**

Forças de contato são decorrentes da ação entre corpos e forças de campo são devido à ação a distância entre corpos, portanto sem contato. Dois exemplo de forças de campo são a ação de atração gravitacional e força de interação magnética.

O **ATO DE MOVIMENTO** decorrente de uma força é uma **TRANSLAÇÃO**.

4. MOMENTO

O **Momento** de uma força \vec{F} aplicada no ponto P em relação a um **pólo** O é definido por:

$$\boxed{\vec{M}_O = (P - O) \wedge \vec{F}} \quad (8)$$

Note que o vetor momento \vec{M}_O é ortogonal ao plano π formado pelo força \vec{F} e o vetor $(P_i - O)$, conforme ilustrado na Figura 6. Portanto o momento de uma força se altera em função da magnitude da força \vec{F} e posição do pólo $(P_i - O)$ considerado.

O módulo do vetor \vec{M}_O considerando as características do produto vetorial (ver item 12.8) é dado por:

$$|\vec{M}_O| = |P - O| \cdot |\vec{F}| \cdot \text{sen } \theta = |\vec{F}| \cdot b \quad (9)$$

onde d é chamado de **braço de momento** dado por $b = |\vec{M}_O| / |\vec{F}|$, conforme ilustrado na Figura 6.

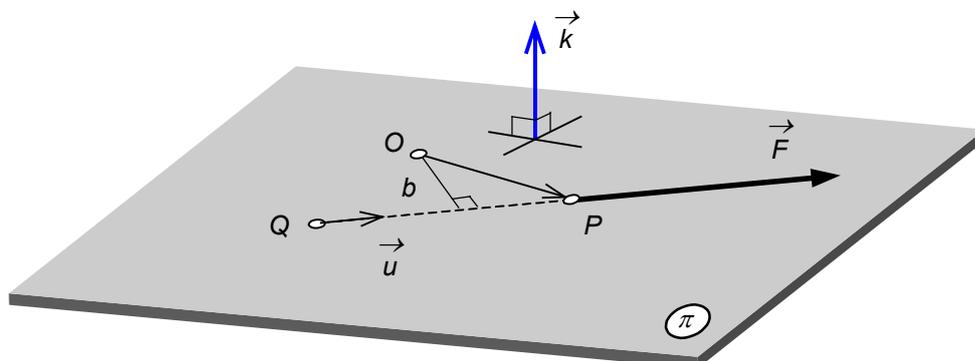


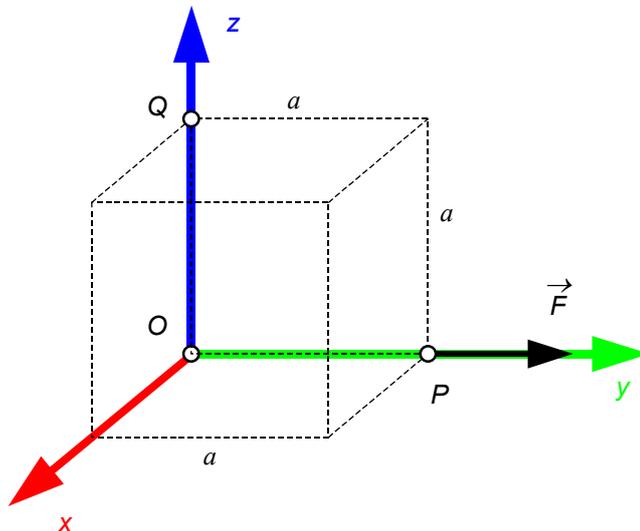
Figura 6 – Momento de Força em Relação a um Pólo

Note ainda que se a força for aplicada no ponto Q contido na linha de ação da força (\vec{u}), o momento não se altera:

$$(\vec{Q}-\vec{O})\wedge\vec{F}=[(\vec{Q}-\vec{P})+(\vec{P}-\vec{O})]\wedge\vec{F}=(\vec{P}-\vec{O})\wedge\vec{F}=\vec{M}_O \quad (10)$$

Exemplo de Momento de Força

Considere a força (\vec{F}, P) conforme ilustrado na figura. Determine o momento em relação ao pólo $Q(0, 0, a)$.



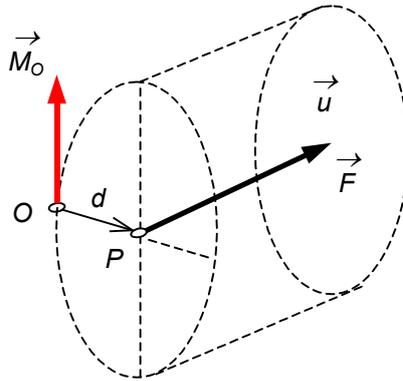
Resolução: Sistema: $(\vec{F}, P) \Rightarrow \vec{F} = F \vec{j} \quad P = a \vec{j}$

$$\vec{M}_Q = (\vec{P}-\vec{Q})\wedge\vec{F} = (a\vec{j}-a\vec{k})\wedge F\vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & a & -a \\ 0 & F & 0 \end{vmatrix} = aF\vec{i}$$

Proposição:

Considere uma força \vec{F} aplicada no ponto P . Qual o lugar geométrico dos pólos (pontos) para os quais o módulo do momento dessa força não se altera (invariante)?

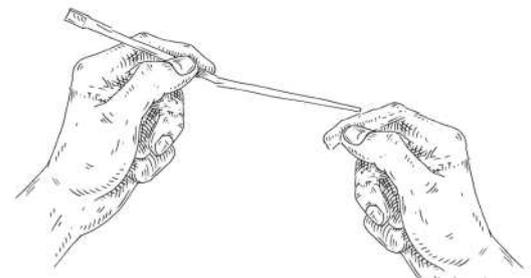
Resposta: Um cilindro de raio d idêntico ao braço de momento, em torno da linha de ação da força.



Demonstração: O momento da força \vec{F} em relação ao pólo O é: $\vec{M}_O = (P-O) \wedge \vec{F}$ e tem módulo igual à: $|\vec{M}_O| = |(P-O)| \cdot |\vec{F}| \cdot \text{sen } \theta$; mas para $\theta = \pi$ tem-se que $|(P-O)| \cdot \text{sen } \theta = d$ que é um círculo em torno do ponto P . Como o momento não se altera para pólos ao longo da linha de ação da força \vec{F} , resulta em um cilindro de raio d (c.q.d.), conforme ilustrada na figura. O valor do momento será mínimo quando $d = 0$ ou seja pólos coincidentes com a linha de ação da força geram momento nulo.

Proposição:

Tente quebrar um palito de comida oriental (*hashi*) aplicando forçamentos com as duas mãos, apenas nas extremidades. Qual a estratégia mais fácil de quebrar ?



Dai-me um ponto de apoio e levantarei o mundo (*Arquimedes*, Grécia - 287-212 aC).

4.1. Momento de Sistema de Forças

Para um conjunto \mathcal{S} de forças aplicadas (\vec{F}_i, P_i) , o **Momento** em relação ao **pólo** O é dado por:

$$\boxed{\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n [(P_i - O) \wedge \vec{F}_i]} \quad (11)$$

Note que o momento de cada força, com ponto de aplicação próprio deve ser calculado e depois somado.

Exercício de Momento:

Determinar a Resultante \vec{R} do sistema de forças \mathcal{S} dado por (\vec{F}_i, P_i) e o Momento de \mathcal{S} em relação a $O(1, 1, 0)$.

$$\begin{array}{ll} \vec{F}_1 = 1\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} & P_1 = (0, 2, 0) \\ \vec{F}_2 = 4\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} & \text{aplicadas em } P_2 = (1, 1, 0) \\ \vec{F}_3 = 0\vec{i} + 5\vec{j} + 1\vec{k} & P_3 = (1, 0, 1) \end{array}$$

$$\boxed{\vec{R} = 5\vec{i} + 7\vec{j} + 4\vec{k}} \text{ Resultante}$$

Cálculo do Momento em relação a $O(1, 1, 0)$ utilizando $\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i$ e a regra da mão

direita conforme apresentado no ANEXO 12.8:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O^1 &= (P_1 - O) \wedge \vec{F}_1 = (-1\vec{i} + 1\vec{j} + 0\vec{k}) \wedge (1\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k} \\ \vec{M}_O^2 &= (P_2 - O) \wedge \vec{F}_2 = (0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}) \wedge (4\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}) = 0 \\ \vec{M}_O^3 &= (P_3 - O) \wedge \vec{F}_3 = (0\vec{i} - 1\vec{j} + 1\vec{k}) \wedge (0\vec{i} + 5\vec{j} + 1\vec{k}) = -6\vec{i} \end{aligned}$$

$$\text{Momento } \boxed{\vec{M}_O = -3\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}}$$

Exercício de Momento:

Calcule o momento \vec{M}_O do sistema de forças S em relação ao pólo O , indicado na Figura 7:

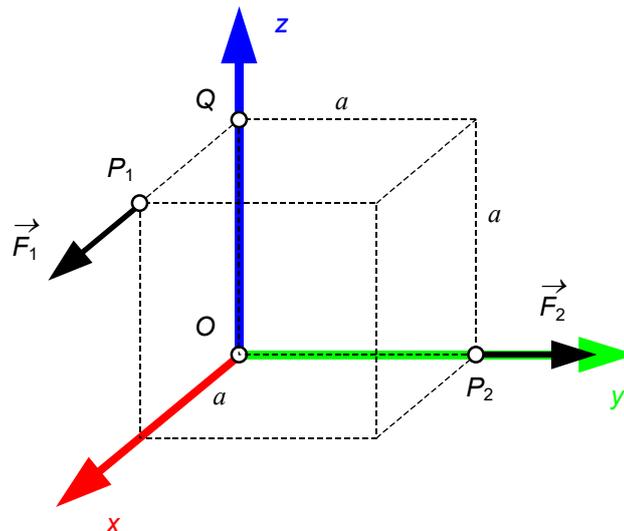


Figura 7 – Sistema e Forças

Resolução: Sistema: forças e pontos de aplicação: $\vec{F}_1 = F \vec{i}$ aplicada em $P_1 (a,0,a)$ e $\vec{F}_2 = F \vec{j}$ aplicada em $P_2 (0,a,0)$. Determinar o momento em relação ao pólo $O (0,0,0)$:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_O = (a\vec{i} + a\vec{k}) \wedge F_1 \vec{i} + (a\vec{j}) \wedge F_2 \vec{j} = aF \vec{j}$$

Considere agora o pólo $Q (0,0,a)$ e calcule novamente o momento:

$$\vec{M}_Q = \sum_{i=1}^n (P_i - Q) \wedge \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_Q = a\vec{i} \wedge F_1 \vec{i} + (a\vec{j} - a\vec{k}) \wedge F_2 \vec{j} = aF \vec{i}$$

Portanto a mudança de pólo pode alterar a magnitude do momento como também pode mudar a sua direção.

4.2. Forças Concorrentes (Teorema de Varignon)

Vetores que representam forças no espaço \mathfrak{R}^3 podem ser:

- PARALELAS;
- CONCORRENTES;
- REVERSAS.

O momento de um sistema de forças **S concorrentes** (\vec{F}_i, P_i) , em relação a um pólo O qualquer, é igual ao momento, em relação ao mesmo pólo, da resultante do sistema de forças \vec{R} , aplicada no ponto de concurso das forças (Ponto A). Considere o sistema de forças concorrentes no ponto A , conforme ilustrado na Figura 8a. O momento em relação ao pólo O é dado por:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i \quad (12)$$

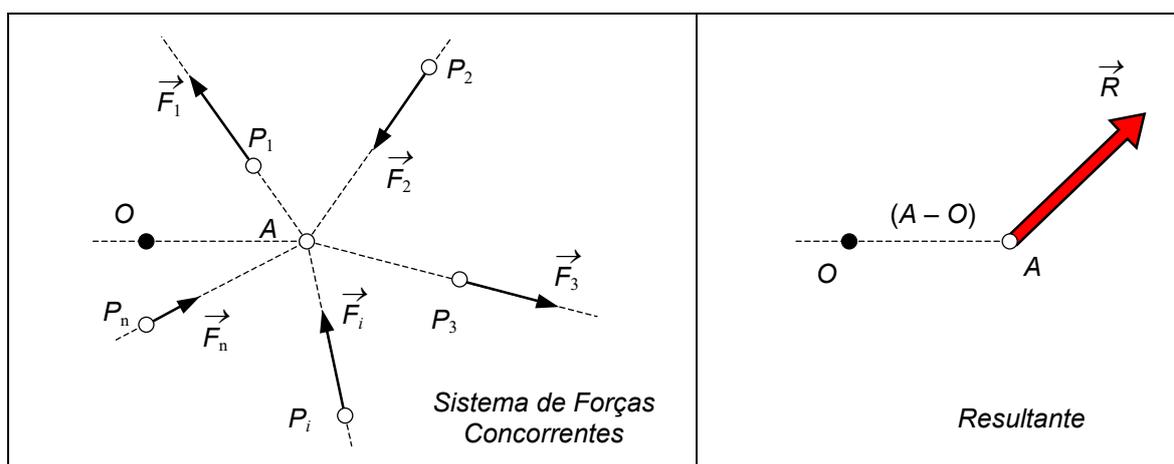


Figura 8 – Momento de Forças Concorrentes

Note ainda que o momento não se altera quando o ponto de aplicação da força permanece sobre a linha de ação da força, por exemplo sobre o ponto de concorrência A . Portanto, conforme ilustrado na Figura 8b, obtêm-se:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (A-O) \wedge \vec{F}_i \Rightarrow \vec{M}_O = (A-O) \wedge \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \Rightarrow \vec{M}_O = (A-O) \wedge \vec{R} \quad (13)$$

c.q.d.

4.3. Mudança de Pólo

Pode ser necessário determinar o **Momento** do sistema de forças em relação a outro pólo distinto. Considere outro pólo Q qualquer, tal que:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i \quad \text{e} \quad \vec{M}_Q = \sum_{i=1}^n (P_i - Q) \wedge \vec{F}_i \quad (14)$$

Tomando $(P_i - O) = (P_i - Q) - (Q - O)$ e fazendo a diferença entre os momentos em cada pólo:

$$\begin{aligned} \vec{M}_Q - \vec{M}_O &= \sum_{i=1}^n (P_i - Q) \wedge \vec{F}_i - \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i \\ \vec{M}_Q - \vec{M}_O &= \sum_{i=1}^n (P_i - Q) \wedge \vec{F}_i - \sum_{i=1}^n (P_i - Q) \wedge \vec{F}_i - \sum_{i=1}^n (Q - O) \wedge \vec{F}_i \\ \vec{M}_Q - \vec{M}_O &= 0 - (Q - O) \wedge \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = -(Q - O) \wedge \vec{R} \\ \vec{M}_Q &= \vec{M}_O + (O - Q) \wedge \vec{R} \end{aligned} \quad (15)$$

Desta forma conclui-se que:

- Se $\vec{R} = \vec{0} \therefore \vec{M}_Q = \vec{M}_O$ o momento do sistema de forças independe do pólo escolhido;
- Se $\vec{R} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_Q = \vec{M}_O$ se e somente se $(O - Q) \parallel \vec{R}$;
- Se $\vec{M}_Q = \vec{M}_O$ para qualquer $Q \Rightarrow (O - Q) \wedge \vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R} = \vec{0}$;
- $\vec{M}_Q \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = I \therefore$ a projeção do momento do sistema sobre a resultante é invariante para mudanças de pólo. O escalar I é chamada de **INVARIANTE ESCALAR** do sistema de forças.

$$\boxed{\vec{M}_Q = \vec{M}_O + (O-Q) \wedge \vec{R}} \quad \underline{\text{Fórmula de Mudança de Pólo}} \quad (16)$$

Exercícios

Considere o momento em relação ao pólo $O(0, 0, 0)$, $\vec{M}_O = aF\vec{j}$ do sistema de forças (\vec{F}_i, P_i) com resultante $\vec{R} = F \cdot (\vec{i} + \vec{j})$ apresentado na Figura 7. Determine o momento \vec{M}_Q em relação ao pólo $Q(0, 0, a)$. Resolução: Utilizando a fórmula de mudança de pólo:

$$\begin{aligned} \vec{M}_Q &= \vec{M}_O + (O-Q) \wedge \vec{R} \\ \vec{M}_Q &= aF\vec{j} - a\vec{k} \wedge F \cdot (\vec{i} + \vec{j}) = aF \cdot (\vec{j} - \vec{j} + \vec{i}) = aF\vec{i} \end{aligned} \quad (17)$$

4.4. Momento em Relação a um Eixo

Considera-se um eixo passando por um ponto O e orientado pelo versor \vec{u} . Defini-se como momento do sistema de forças (\vec{F}_i, P_i) em relação ao eixo $O\vec{u}$ (ou torque) o escalar M_u tal que:

$$M_u = \vec{M}_O \cdot \vec{u} \quad (18)$$

Algumas propriedades são importantes:

- Uma força paralela ao eixo $O\vec{u}$ não acrescenta momento ao eixo.
- O valor absoluto do momento de uma força ortogonal a um eixo é o produto do módulo da força vezes a distância da linha de ação da força ao eixo.
- Só fornecem momentos em relação ao eixo, forças ortogonais ao eixo e reversas com ele.
- O sinal do momento em relação a um eixo pode ser identificada pela regra da mão direita.

Exemplo: Considere o Momento do sistema de forças (\vec{F}_i, P_i) calculado em relação ao outro ponto Q pertencente ao eixo \vec{u} . Utilizando a fórmula de mudança de pólo, obêm-se:

$$\vec{M}_Q \cdot \vec{u} = [\vec{M}_O + (O-Q) \wedge \vec{R}] \cdot \vec{u} = \vec{M}_O \cdot \vec{u} + \vec{0} \quad (19)$$

Note que $(O-Q) // \vec{u}$ portanto $(O-Q) \wedge \vec{R} \perp \vec{u}$

Vejam as deduções das propriedades de momento em relação a um eixo em *França* (2011).

4.5. Binário de Forças

Existe um par especial de forças $(\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2)$ aplicadas em pontos $(P_1$ e $P_2)$ chamado de **BINÁRIO DE FORÇAS**, que tem resultante nula e momento diferente de zero (torque). São obrigatoriamente forças colineares idênticas e opostas, mas não alinhadas, conforme ilustrado na Figura 9. O momento do binário de forças tem direção perpendicular ao plano formado pelas forças e independe do pólo selecionado (verifica-se pela fórmula de mudança de pólo).

$$\vec{F}_i = F_{xi} \vec{i} + F_{yi} \vec{j} + F_{zi} \vec{k} \quad \text{aplicadas em:} \quad (P_i - O) = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k} \quad (20)$$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^2 \vec{F}_i = \vec{0} \quad \text{e} \quad \vec{M}_O = \sum_{i=1}^2 [(P_i - O) \wedge \vec{F}_i] = \vec{0} \quad (21)$$

$$\vec{M} = (P_2 - P_1) \wedge \vec{F}_2 \quad \text{ou} \quad |\vec{M}| = |\vec{F}_2| \cdot (P_2 - P_1) \cdot \text{sen } \theta = |\vec{F}_2| \cdot d \quad \Rightarrow \quad d = |\vec{M}| / |\vec{R}| \quad (22)$$

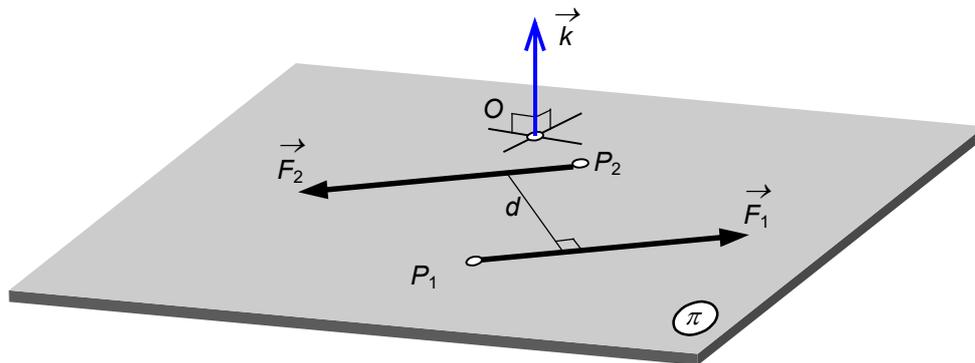


Figura 9 – Binário de Forças

Propriedades:

- $\vec{R} = \vec{0}$ e $\vec{M}_O \neq \vec{0} \Rightarrow$ O sistema é equivalente a um binário de forças.
- $\vec{M} = \vec{M}_O = \vec{M}_Q \Rightarrow$ O momento do binário não depende do pólo selecionado.
- O momento do binário de forças não se altera se o ponto de aplicação da força for transportado ao longo de sua direção de atuação (note que o braço d do binário não se altera).

Exemplo de Binário de Forças

Considere o sistema de forças (\vec{F}_i, P_i) com características de binário e determine a resultante e o momento em relação aos pólos $O(0, 0, 0)$ e $Q(0, C, 0)$.

$$\begin{aligned} (\vec{F}_1, O) &\Rightarrow \vec{F}_1 = a\vec{j} & (O-O) &= 0 \\ (\vec{F}_2, A) &\Rightarrow \vec{F}_2 = -a\vec{j} & (A-O) &= b\vec{i} \end{aligned}$$

$$R = \sum_{i=1}^2 \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = a\vec{j} + (-a\vec{j}) = \vec{0}$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^2 [(P_i - O) \wedge \vec{F}_i] = (O - O) \wedge \vec{F}_1 + (A - O) \wedge \vec{F}_2 = 0 + b\vec{i} \wedge (-a\vec{j}) = ab\vec{k}$$

$$\vec{M}_Q = (O - Q) \wedge \vec{F}_1 + (A - Q) \wedge \vec{F}_2 = (-c\vec{j}) \wedge a\vec{j} + (b\vec{i} - c\vec{j}) \wedge (-a\vec{j}) = ab\vec{k}$$

O momento de forças portanto é uma entidade que pode ser observada apenas de forma indireta.

O **ATO DE MOVIMENTO** decorrente de um binário de força é uma **ROTAÇÃO**.

5. SISTEMAS EQUIVALENTES

DEFINIÇÃO: dois sistemas de forçamentos são equivalentes se tiverem a mesma **Resultante** e o mesmo **Momento** em relação a um pólo. Neste caso, as solicitações devem produzir o mesmo **Ato de Movimento** a um corpo.

Considere o Sistema de Forças A \vec{F}_i para $i = 1, 2, \dots, n$, aplicadas em pontos P_i , conforme ilustrado na Figura 10:

$$\vec{F}_i = F_{xi} \vec{i} + F_{yi} \vec{j} + F_{zi} \vec{k} \quad \text{e} \quad P_i = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k} \quad (23)$$

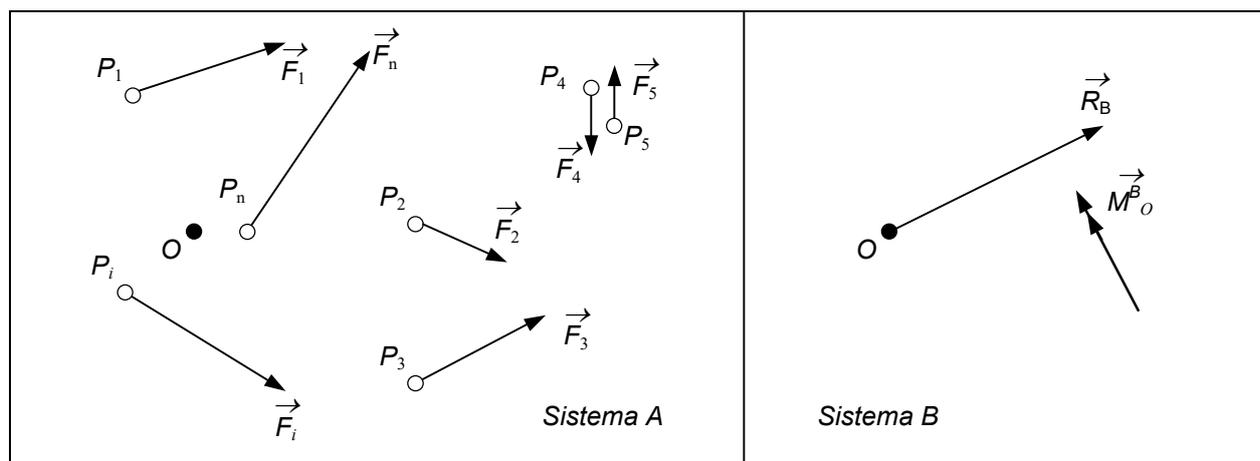


Figura 10 – Sistemas Equivalentes

O Sistema A, conforme ilustrado na Figura 10a possui **Resultante** e **Momento** em relação ao pólo O descritos por:

$$\vec{R}_A = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad \text{e} \quad \vec{M}_O^A = \sum_{i=1}^{n-2} (P_i - O) \wedge \vec{F}_i + \vec{M} \quad (24)$$

Note que as forças \vec{F}_4 e \vec{F}_5 formam um binário de Resultante nula e Momento

$$\vec{M} = (P_4 - P_5) \wedge \vec{F}_4 \text{ com módulo } |\vec{M}| = |P_4 - P_5| \wedge |\vec{F}_4| = d \cdot F.$$

O Sistema B (conforme ilustrado na Figura 10b) será equivalente ao Sistema A se a resultante e o momento em relação ao mesmo pólo forem idênticas:

$$\vec{R}_B = \vec{R}_A \quad \text{e} \quad \vec{M}_O^B = \vec{M}_O^A \quad (25)$$

A resultante \vec{R}_B deve ser aplicada no ponto **O** chamado de pólo de redução do sistema de forças.

Propriedades:

- O ato de movimento de um corpo não se altera, se substituirmos as forças aplicadas em um mesmo ponto pela resultante delas aplicada nesse mesmo ponto, e reciprocamente.
- O momento de binário de forças não é alterado se o ponto de aplicação da força for transportado ao longo de sua direção de atuação (note que o braço d do binário não se altera).
- Teorema: Todo sistema de forças é equivalente a uma única força aplicada num ponto e um momento de binário.

Exemplo 1: Sistema Nulo

Sistema Equivalente: qual o Sistema **B** equivalente ao Sistema **A**, apresentado na Figura 11a.

Resolução: Sistema **A** de forças (\vec{F}_1 e \vec{F}_2) paralelas, iguais e opostas aplicadas em pontos coincidentes (P_1 e P_2). Diagrama de forças. Resultante e Momento em relação ao pólo **O** do

Sistema **A**: $\vec{R} = \vec{0}$; $\vec{M} = \vec{0}$. Sistema **B**: $\vec{R} = \vec{0}$; $\vec{M} = \vec{0}$ (Figura 11b).

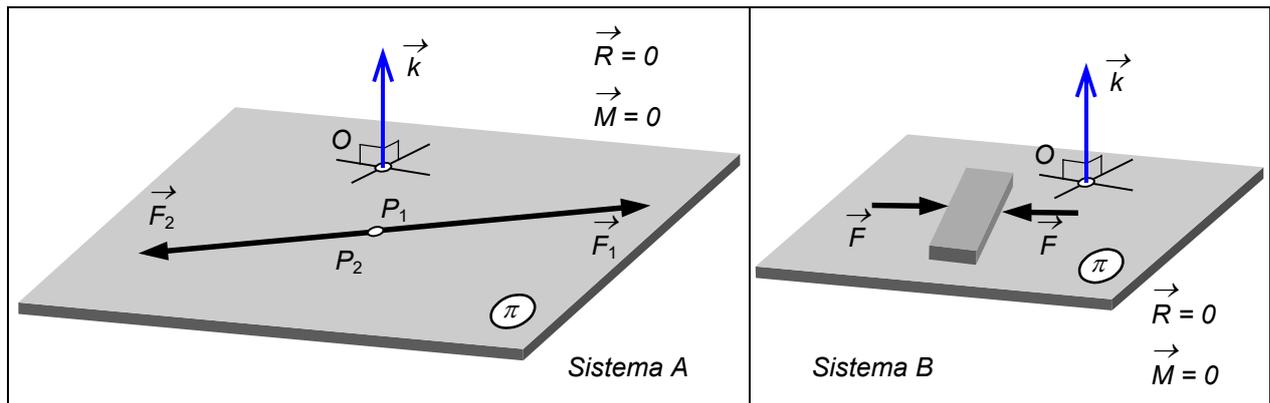


Figura 11 – Sistemas Equivalente - Nulo

Aplice forças similares alinhas com os dedos sobre o seu celular apoiado sobre a mesa. O que acontece?

Exemplo 2 – Binário de Forças

Sistema Equivalente: qual o Sistema **B** equivalente ao Sistema **A**, apresentado na Figura 12a.

Resolução: Sistema **A** de forças (\vec{F}_1 e \vec{F}_2) paralelas, iguais e opostas (binário de forças) aplicadas em pontos (P_1 e P_2). Diagrama de forças. Resultante e Momento em relação ao pólo O do Sistema **A**: $\vec{R} = \vec{0}$; $\vec{M} = d \cdot F \vec{k}$. Sistema **B**: $\vec{R} = \vec{0}$; $\vec{M} = d \cdot F \vec{k}$ (Figura 12b).

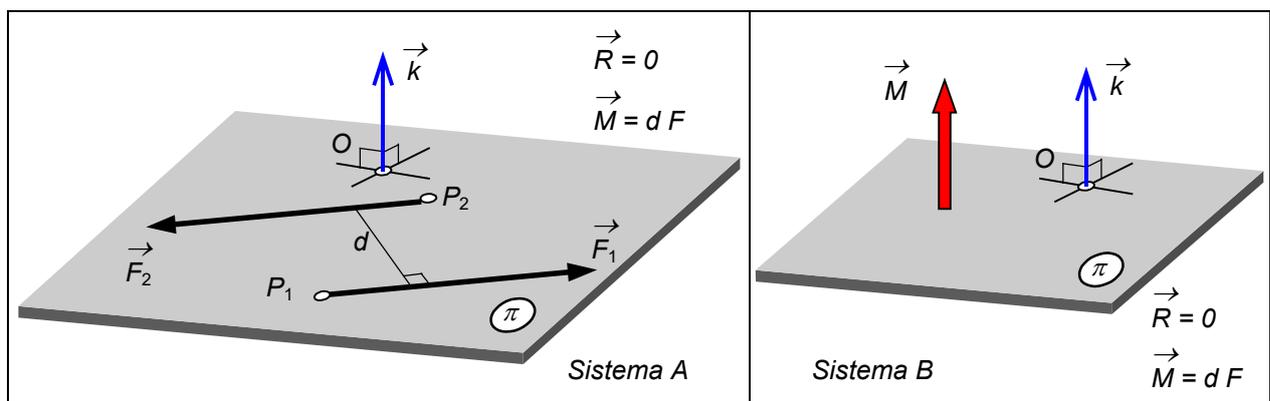


Figura 12 – Sistemas Equivalente - Binário

Agora aplique forças similares com os dedos **não alinhados** (afastados de d) sobre o seu celular apoiado sobre a mesa. O que acontece? Qual o ato de movimento?

Exemplo 3: Uma Força

Considere o sistema de força A com (\vec{F}_1, P_1) aplicada no disco de centro O , conforme apresentado na Figura 13a. Pode-se obter o Sistema B equivalente ao Sistema A , com o introdução de duas forças alinhadas iguais e contrárias aplicadas no ponto O (portanto com Resultante e Momento nulos). **Resolução:** Sistema A com (\vec{F}_1, P_1) . Adicionar duas forças alinhadas, iguais e opostas \vec{F}_3 e \vec{F}_2 aplicadas no ponto O que não afetam o sistema pois tem Resultante e Momento nulos, conforme Figura 13b. O Sistema A possui: $\vec{R} = F_1 \vec{i}$; $\vec{M}_O = r \cdot F \vec{k}$. Note que o par \vec{F}_1 e \vec{F}_2 forma o binário $\vec{M}_O = r \cdot F \vec{k}$. Finalmente o Sistema B resulta em: $\vec{R} = F_1 \vec{i}$; $\vec{M}_O = r \cdot F \vec{k}$, portanto **equivalente**, conforme ilustrado na Figura 13c.

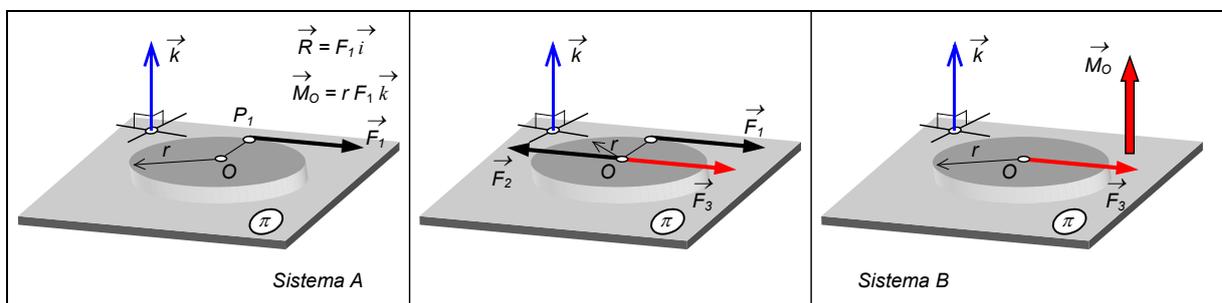


Figura 13 – Sistemas Equivalente

Note que o sistema de forçamento “tende” a produzir um **ato de movimento** de **translação** na direção x devido a força \vec{F}_3 e uma **rotação** na direção z , devido ao binário \vec{M}_O .

5.1. Redução de Sistema de Forças

Reduzir um sistema de forças corresponde à obter outro sistema equivalente, que tenha um número mínimo de forças. Da definição de sistemas equivalentes, constata-se que o sistema reduzido mínimo consiste de uma única força (Resultante) aplicada num ponto O qualquer e um momento idêntico ao momento das forças do sistema original, em relação ao mesmo pólo.

Casos possíveis de redução de sistemas de forças:

- a) $\vec{R} = \vec{0}$ e $\vec{M}_O = \vec{0} \Rightarrow$ O sistema é equivalente a zero.
- b) $\vec{R} = \vec{0}$ e $\vec{M}_O \neq \vec{0} \Rightarrow$ O sistema é equivalente a um binário de momento \vec{M}_O .
- c) $\vec{R} \neq \vec{0}$ e $I = 0 \Rightarrow$ O sistema é equivalente a uma única força aplicada em ponto específico.

Portanto um sistemas de forçamentos, composto por forças e momento, é equivalente a uma única força resultante aplicada no pólo de redução e um binário de momento. Para sistema com INVARIANTE NULO o sistema será equivalente a um única força aplicada em ponto específico.

O ATO DE MOVIMENTO decorrente de um sistema de forçamentos na sua constituição mais genérica é uma ROTO-TRANSLAÇÃO.

Exemplo de Redução Sistema de Forças

Considere o sistema de forças (\vec{F}_i, P_i) conforme ilustrado na figura, com as seguintes características e determine a resultante o momento em relação aos pólos O e G . Verifique a qual sistema de forças mais simples o sistema original é redutível. Neste caso qual a linha de aplicação da resultante e qual o momento mínimo?

$$\begin{aligned}
 (\vec{F}_1, C) &\Rightarrow \vec{F}_1 = +a\vec{i} - a\vec{j} - a\vec{k} & (C-O) &= a\vec{k} \\
 (\vec{F}_2, G) &\Rightarrow \vec{F}_2 = -a\vec{i} & (G-O) &= a\vec{i} + 2a\vec{j} + a\vec{k} \\
 (\vec{F}_3, A) &\Rightarrow \vec{F}_3 = a\vec{i} + 2a\vec{j} + a\vec{k} & (A-O) &= a\vec{i}
 \end{aligned}$$

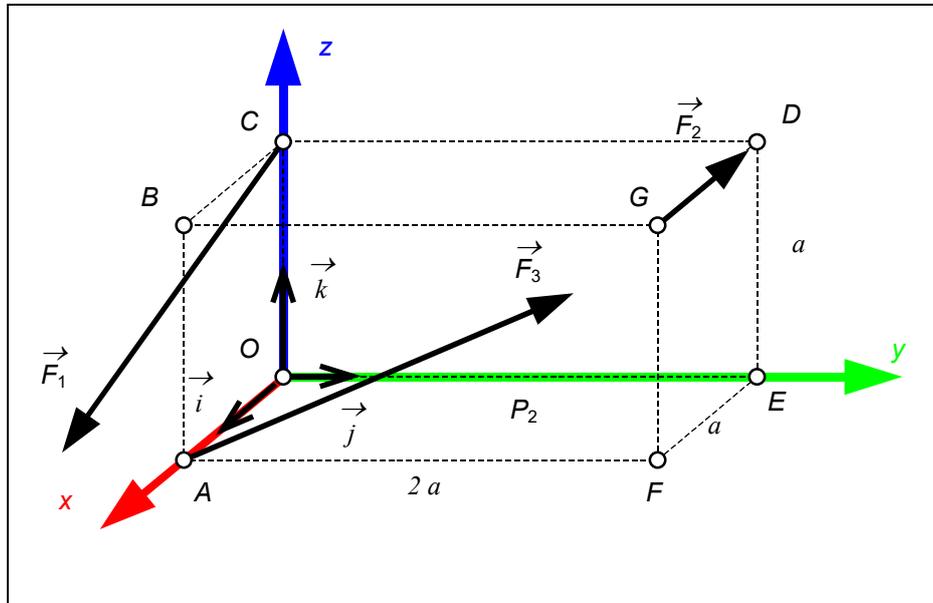


Figura 14 – Sistema de Forças

RESOLUÇÃO: Sistema de forças (\vec{F}_i, P_i) . Diagrama de forças: conforme a figura, Referencial e pólo: $Oxyz$. Teoremas: $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$, $\vec{M}_O = \sum (P_i - O) \wedge \vec{F}_i$, $I = \vec{M}_O \cdot \vec{R}$.

a) A Resultante é obtida da soma das componentes em cada direção (independentes):

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_1 &= +a\vec{i} - a\vec{j} - a\vec{k} \\
 \vec{F}_2 &= -a\vec{i} \\
 \vec{F}_3 &= +a\vec{i} + 2a\vec{j} + a\vec{k} \\
 \vec{R} &= +a\vec{i} + a\vec{j}
 \end{aligned}$$

b) O Momento das forças é calculado em relação ao pólo indicado:

$$\begin{aligned}\vec{M}_O &= (C-O) \wedge \vec{F}_1 + (G-O) \wedge \vec{F}_2 + (A-O) \wedge \vec{F}_3 \\ \vec{M}_O &= (a\vec{k}) \wedge (a\vec{i} - a\vec{j} - a\vec{k}) + (a\vec{i} + 2a\vec{j} + a\vec{k}) \wedge (-a\vec{i}) + (a\vec{i}) \wedge (a\vec{i} + 2a\vec{j} + a\vec{k}) \\ \vec{M}_O &= a^2\vec{j} + a^2\vec{i} + 2a^2\vec{k} - a^2\vec{j} + 2a^2\vec{k} - a^2\vec{j} \\ \vec{M}_O &= a^2\vec{i} - a^2\vec{j} + 4a^2\vec{k}\end{aligned}$$

c) Para que o sistema de forças seja redutível a uma única força o Invariante Escalar deve ser nulo:

$$I = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = (a^2\vec{i} - a^2\vec{j} + 4a^2\vec{k}) \cdot (a\vec{i} + a\vec{j}) = a^3 - a^3 = 0$$

Portanto o sistema original \mathcal{S} é redutível a uma única forças \vec{R} desde que aplicada no local \mathcal{Q} tal que $\vec{M}'_O = \sum (Q-O) \wedge \vec{R} = \vec{M}_O$

$$\begin{aligned}(Q-O) \wedge \vec{R} &= \vec{M}_O \\ (q_x\vec{i} + q_y\vec{j} + q_z\vec{k}) \wedge (a\vec{i} + a\vec{j}) &= (a^2\vec{i} - a^2\vec{j} + 4a^2\vec{k})\end{aligned}$$

$$\begin{cases} -aq_z = a^2 \\ aq_z = -a^2 \\ a(q_x - q_y) = 4a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_z = -a \\ q_z = -a \\ q_x = q_y + 4a \end{cases} \Rightarrow \text{para } q_y = a \Rightarrow (Q-O) = 5a\vec{i} + a\vec{j} - a\vec{k}$$

6. CENTRO DE MASSA

Para a conceituação do **CENTRO DE MASSA** de corpo do ponto de vista da mecânica dos sólidos, apresenta-se o conceito de forças paralelas e local de aplicação da resultante do sistema equivalente.

6.1. Sistema de Forças Paralelas

Um sistema de forças paralelas S é composto por conjunto de forças \vec{F}_i , aplicadas em pontos P_i , todas com direção \vec{u} tal que:

$$\vec{F}_i = h_i \vec{u} \quad (26)$$

6.2. Definição de Corpo Rígido

Uma partícula pode ser idealizada como um corpo sem dimensões físicas com massa não desprezível. Isso implica em ter toda sua massa concentrada em um único ponto. Um partícula ideal é portanto um ponto material com massa não nula. Negligenciar sua dimensão significa também ignorar seu movimento de rotação. Um conjunto de partículas forma um corpo extenso e deformável. Se entretanto as deformações forem, numa primeira aproximação, consideradas desprezíveis face aos movimentos globais do corpo, constitui-se um corpo indeformável. Portanto um agregado de partículas com distâncias entre elas invariante, constitui-se um corpo rígido. Neste caso o corpo rígido deve ter obrigatoriamente sua atitude, descrita por seu movimento de rotação, considerada.

6.3. Distribuição de Massa

O corpo rígido homogêneo tem a distribuição de massa relacionada com sua forma. Desta distribuição duas propriedades são destacadas:

- CENTRO DE MASSA (momento de primeira ordem);
- MOMENTO DE INÉRCIA (momento de segunda ordem);

O centro de massa corresponde a posição do pólo onde o momento de forças paralelas associadas com as partículas do corpo, tem seu valor nulo.

6.4. Centro de Massa

O centro de massa G de um corpo rígido (agregado de partículas) é o ponto onde o momento de um sistema de forças paralelas equivalente associado tem valor nulo. O momento de um sistema de forças em relação ao pólo O é dado por:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i \quad (27)$$

Vamos localizar o ponto C tal que o momento do campo de forças paralelas $\vec{F}_i = h_i \vec{u}$ em relação a esse pólo seja nulo. Utilizando a formula de momento de forças em relação ao pólo C :

$$\vec{M}_C = \sum_{i=1}^n (P_i - C) \wedge h_i \vec{u} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \left[\sum_{i=1}^n h_i \cdot (P_i - C) \right] \wedge \vec{u} = \vec{0} \quad (28)$$

Para que a direção \vec{u} seja qualquer, exige-se que:

$$\sum_{i=1}^n h_i \cdot (P_i - C) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n h_i \cdot (P_i - O) - (C - O) = \vec{0} \quad \text{ou} \quad (C - O) = \frac{\sum_{i=1}^n h_i \cdot (P_i - O)}{\sum_{i=1}^n h_i} \quad (29)$$

Considere agora o sistema de partículas de massa m_i do agregado de partículas S , submetidas ao campo de forças gravitacional $\vec{F}_{g_i} = m_i \vec{g}$ e o centro de massa $(G - O)$ do corpo com partículas P_i :

$$(G - O) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot (P_i - O)}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (30)$$

Para a localização do centro de massa $(G - O) = \vec{r}_i = x_G \vec{i} + y_G \vec{j} + z_G \vec{k}$ conforme ilustrado na Figura 15, ter-se-á

$$(G - O) = \frac{\sum m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum m_i} \quad (31)$$

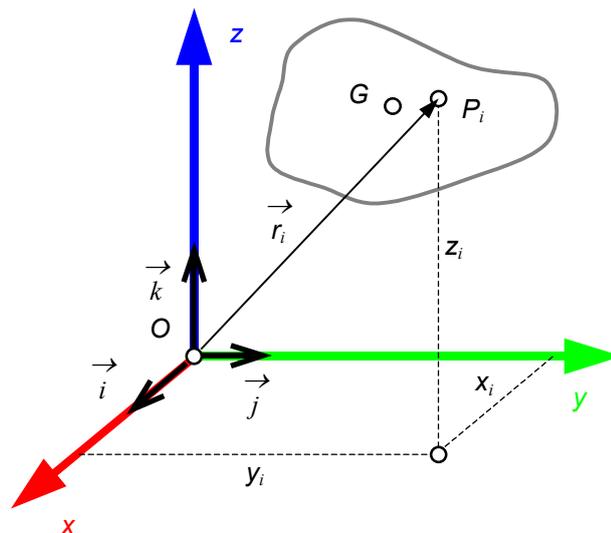


Figura 15 – Localização do Centro de Massa

Para um corpo de massa total m a posição do centro de massa ($G - O$), descrito num sistema de coordenadas cartesianas $Oxyz$, é obtida pelo somatório em cada coordenada independente:

$$\boxed{x_G = \frac{\sum m_i \cdot x_i}{m}} \quad ; \quad \boxed{y_G = \frac{\sum m_i \cdot y_i}{m}} \quad \text{e} \quad \boxed{z_G = \frac{\sum m_i \cdot z_i}{m}} \quad (32)$$

6.5. Propriedade do Centro de Massa

a) **Propriedade Proporcional Inversa:** O local do centro de massa G de um corpo rígido constituído de duas partículas (m_i, P_i), é o ponto que divide o segmento ($P_1 - P_2$) em partes inversamente proporcionais.

b) **Propriedade de Simetria:** Se as partículas P_i de um corpo rígido pertencerem a um plano π ou reta r , o centro de massa G pertencerá a esse plano ou reta.

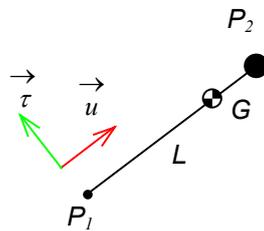
c) **Propriedade Associativa:** O centro de massa G de um sistema de corpos rígidos coincide com o centro de massa determinado pela soma do produto da massa e posição de cada parte do sistema.

d) **Propriedade de Plano de Simetria:** Se as partículas P_i que constituem o corpo rígido, admitirem um plano π de simetria material, para massas idênticas, o centro de massa G pertencerá a esse plano.

e) **Propriedade do Centro de Simetria:** Se as partículas P_i , pertencerem a um centro de simetria material, o centro de massa G coincidirá com esse centro. Ex. anel, disco ou esfera.

Exemplo: Centro de Massa de Partículas

Considere duas partículas P_1 e P_2 de massas $m_1 = 1m$ e $m_2 = 4m$, separadas da distância L , conforme ilustrado na figura. Determinar a posição do centro de massa.

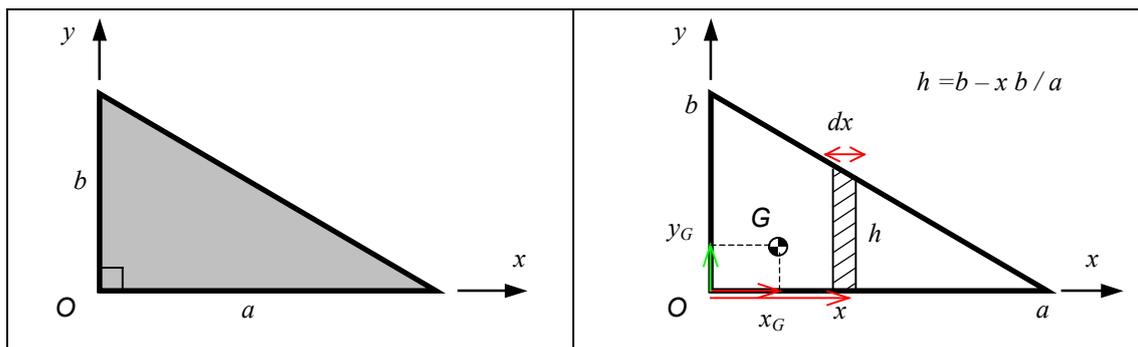


Resolução: adotando o sistema de coordenadas $P_1 \vec{u} \vec{\tau}$ tem-se do somatório do momento de primeira ordem das partículas P_1 e P_2 de massas $m_1 = 1m$ e $m_2 = 4m$, medido a partir o ponto P_1 na direção \vec{u} :

$$(G - O) = \frac{\sum m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum m_i} \Rightarrow u_G = \frac{u_1 \cdot m_1 + u_2 \cdot m_2}{(m_1 + m_2)} = \frac{0 \cdot m + L \cdot 4m}{5m} = \frac{4}{5} L$$

Exemplo: Integração

Determinar a posição do centro de massa de uma placa no formato triangular com densidade de área ρ , conforme dimensões mostradas na figura à esquerda.



Resolução: Sabendo que a massa total da placa triangular é $m = a \cdot b \cdot \rho / 2$, substituir o somatório discreto por uma integral de faixas infinitesimais dx de altura h e massa elementar $dm = \rho h \cdot dx$, para cada altura ($h = b - xb/a$) função da posição x , ao longo da base do triângulo retângulo de comprimento a , conforme mostrado na figura à direita:

$$x_G = \frac{\sum m_i \cdot x_i}{m} \Rightarrow x_G = \frac{\int_0^a dm \cdot x}{m} = \frac{\int_0^a (dx h \rho) \cdot x}{0.5 a b \rho} = \frac{\int_0^a h \cdot x dx}{0.5 a b} = \frac{\int_0^a (b - x b/a) \cdot x dx}{0.5 a b} \Rightarrow$$

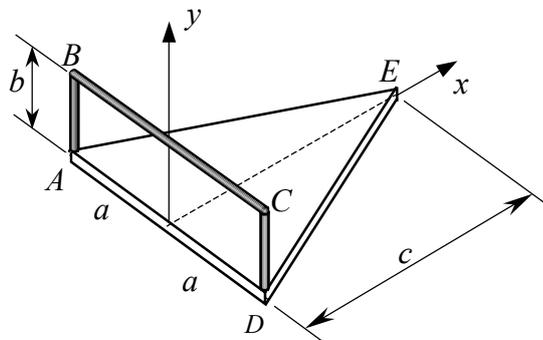
$$x_G = \frac{2}{a b} \left(\int_0^a b \cdot x dx - \int_0^a (b/a) \cdot x^2 dx \right) = \frac{2}{a b} \left(\frac{b}{2} x^2 \Big|_0^a - \frac{b}{3a} x^3 \Big|_0^a \right) = \frac{2}{a b} \left(\frac{b a^2}{2} - \frac{b a^3}{3a} \right) = \frac{1}{3} a$$

O mesmo vale para a outra direção onde obtêm-se por similaridade: $y_G = \frac{1}{3} b$

Exemplo: Centro de Massa de Sistema de Corpos

Considere a placa triangular AED com massa $3m$, as barras AB e CD tem massa m (cada uma) e a barra BC tem massa $2m$. Todos os sólidos são homogêneos.

- Determine as coordenadas do baricentro da placa triangular AED .
- Determine as coordenadas do baricentro da barra $ABCD$.
- Determine as coordenadas do baricentro do sólido composto pela placa AED e pela barra $ABCD$.



Resolução: Utilizando a expressão da posição do centro de massa: $(G-O) = \frac{\sum m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum m_i}$ e a

propriedade de simetria obtêm-se:

a) Placa triangular: $\bar{x}_p = \frac{c}{3}$; $\bar{y}_p = 0$; $\bar{z}_p = 0$ por simetria e problema plano.

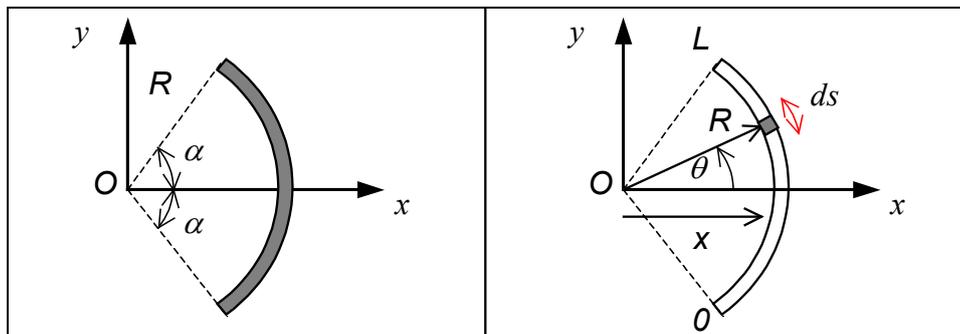
b) Barra: $\bar{x}_B = 0$; $\bar{y}_B = \frac{m \cdot \frac{b}{2} + 2m \cdot b + m \cdot \frac{b}{2}}{m + 2m + m} = \frac{3mb}{4m} = \frac{3b}{4}$; $\bar{z}_B = 0$

$$c) \text{ Conjunto: } \bar{x}_s = \frac{3m \cdot \frac{c}{3} + 4m \cdot 0}{3m + 4m} = \frac{mc}{7m} = \frac{c}{7} ; \bar{y}_s = \frac{3m \cdot 0 + 4m \cdot \frac{3b}{4}}{3m + 4m} = \frac{3mb}{7m} = \frac{3b}{7} ; \bar{z}_s = 0$$

Caso uma das placas tenha um furo, pode-se considerar uma parte adicional com massa negativa.

Exemplo: Massa Distribuída

Determinar a posição do centro de massa G de uma barra esbelta homogênea na forma de arco de circunferência de raio R com ângulo central 2α , conforme ilustrado na figura à esquerda.



Resolução: Por simetria $y_G = 0$. Dividindo o arco em pequenos segmentos de comprimento ds na posição θ , e sabendo que a barra tem densidade linear de massa μ , obtêm-se a massa elementar do elemento de arco $dm = \mu \cdot ds$. Substituindo o somatório discreto por uma integral de arcos infinitesimais ds de posição angular θ ao longo do comprimento angular 2α , obtêm-se:

$$x_G = \frac{\int_0^m dm \cdot x}{\int_0^m dm} = \frac{\int_0^L (\mu ds) \cdot x}{\mu \int_0^L ds} = \frac{\int_0^L ds \cdot R \cos \theta}{L}$$

Tem-se ainda que $ds = R d\theta$ para o intervalo $-\alpha$ até α . Trocando o intervalo de integração obtêm-se:

$$x_G = \frac{1}{L} \int_{-\alpha}^{+\alpha} R d\theta \cdot R \cos \theta = \frac{R^2}{L} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos \theta d\theta = \frac{R^2}{R \cdot 2\alpha} \text{sen } \theta \Big|_{-\alpha}^{+\alpha} = R \frac{\text{sen } \alpha}{\alpha}$$

7. ESTÁTICA

As ciências Mecânicas se propõe a estudar o comportamento de corpos sob a ação de forças. Na ESTÁTICA, o foco se dá nas situações de equilíbrio, ou seja, quando não há variações de posição ao longo do tempo. Em geral, os problemas se referem a determinar esforços numa dada configuração do sistema, ou determinar a configuração sob um dado conjunto de esforços.

7.1. Equilíbrio Estático

O equilíbrio estático vem do princípio proposto por *Issac Newton* (1687) sobre a variação da quantidade de movimento para corpos de massa invariante:

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \frac{d}{dt} (m \cdot \vec{V}) \Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{p} = \frac{d}{dt} m \cdot \vec{V} + m \cdot \frac{d}{dt} \vec{V} = m \vec{a} = \vec{F} \quad (33)$$

para o caso particular do Sistema Estático (sem movimento), a aceleração deve ser nula e portanto o somatório de forças será nulo:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad (34)$$

Note que para o caso de um agregado de partículas, como veremos mais a frente ($\dot{\vec{H}}_o = [J]_o \dot{\vec{\omega}} = \vec{M}_o^{ext}$), para que não haja movimento angular, exige-se também que o momento seja nulo:

$$\sum_i \vec{M}_o = \vec{0} \quad (35)$$

7.2. Grau de Liberdade

A definição da posição de um ponto no espaço Euclidiano \mathcal{R}^3 é obtida de forma inequívoca por três escalares ou três graus de liberdade (3 *GL*). Um corpo requer mais três ângulos de atitude (três escalares), correspondendo a seis graus de liberdade, conforme ilustrado na Figura 16.

$$(P_1 - O) = \vec{r}_1 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} \quad \text{e} \quad (\phi \theta \psi) \quad (36)$$

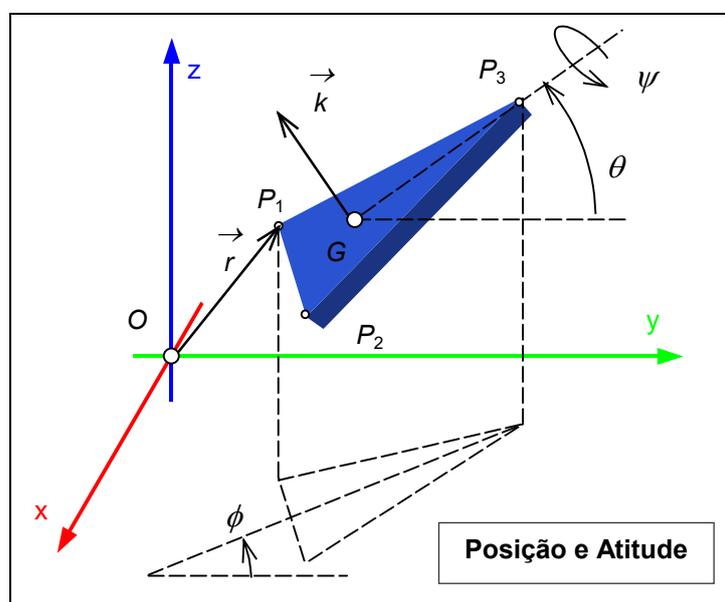


Figura 16 – Posição e Atitude de um Corpo

Note que o ângulo ϕ (*phi*) do corpo foi definido no plano Oxy sobre a projeção do corpo, denominado “ângulo de direção”. A “elevação” do plano do corpo (versor \vec{k}) é quantificada pelo ângulo θ (*teta*) formado pela linha média do corpo, medido em relação a linha projetada no plano Oxy . Finalmente a rotação própria descrita pelo ângulo ψ (*psi*) em torno do eixo longitudinal do corpo (linha $\overline{GP_3}$ da Figura 16).

7.3. Vínculos

Um corpo rígido pode realizar 2 tipos de movimento: translações em 3 direções ortogonais e rotação em três direções possíveis. Vínculos são dispositivos mecânicos que permitem apenas alguns movimentos relativos entre corpos. Os vínculos constituem restrições de movimento relativo de translação entre corpos realizadas por forças. Os vínculos constituem restrições de movimento relativo de rotação entre corpos realizada por binários de força (momentos). Existem vários tipos de vínculos e possíveis combinações entre eles, conforme ilustrado na Figura 17.

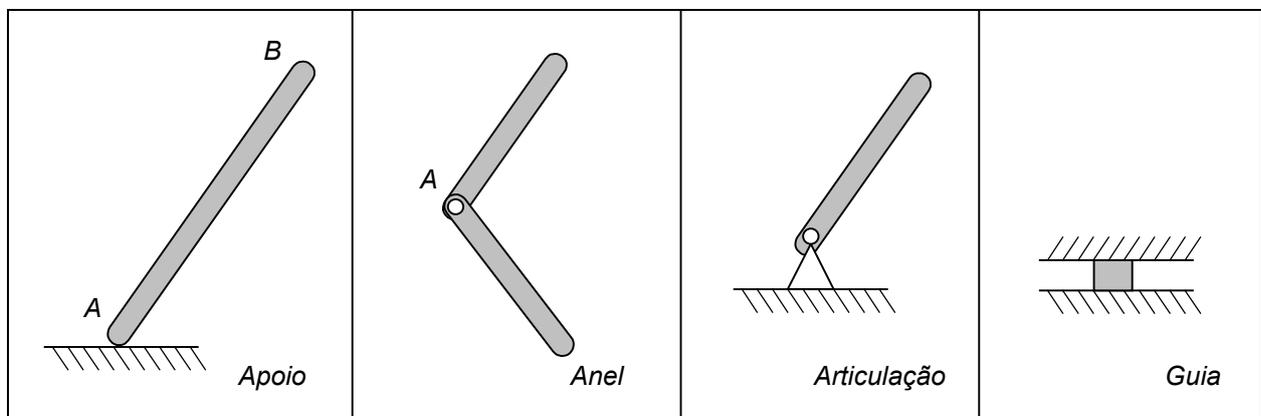


Figura 17 – Tipos de Vínculos Planos

Corpos em contato realizam interação de forças ativas e reativas de contato. Para corpos convexos pode haver pelo menos um ponto de contato comum aos dois corpos. Esse tipo de vínculo é chamado de apoio simples, conforme ilustrado na Figura 17a. Para corpos confinados a movimento em um plano, interligados por um vínculo do tipo anel (pino) pode haver apenas movimento relativo de rotação, conforme ilustrado na Figura 17b. Esta restrição de movimento é realizada por uma força contida no plano (ou suas componentes ortogonais).

Tipos de vínculos em sistemas planos:

- APOIO SIMPLES SEM ATRITO: vínculo unilateral que restringe apenas o movimento de interpenetração entre corpos e permite a rotação relativa no plano.
- APOIO SIMPLES COM ATRITO: vínculo unilateral que restringe o movimento de interpenetração entre corpos, o movimento tangencial entre corpos e permite a rotação relativa no plano.

- c) ANEL: Vínculo que restringe os movimentos relativos de translação no seu plano;
- d) ARTICULAÇÃO (com pino): Vínculo que restringe os movimentos de translação no seu plano;
- e) GUIA unidirecional; Permite apenas um movimento de Translação.

Tipos de vínculos de sistemas espaciais:

- f) ENGASTAMENTO: vínculo que restringe todos os movimentos relativos (três translações e três rotações)
- g) ARTICULAÇÃO 3D (*joystick*): Vínculo que permite a movimento de rotação em três direções
- h) GUIA ARTICULADA: Vínculo combinado que permite o movimento de translação e de rotação em uma direção.

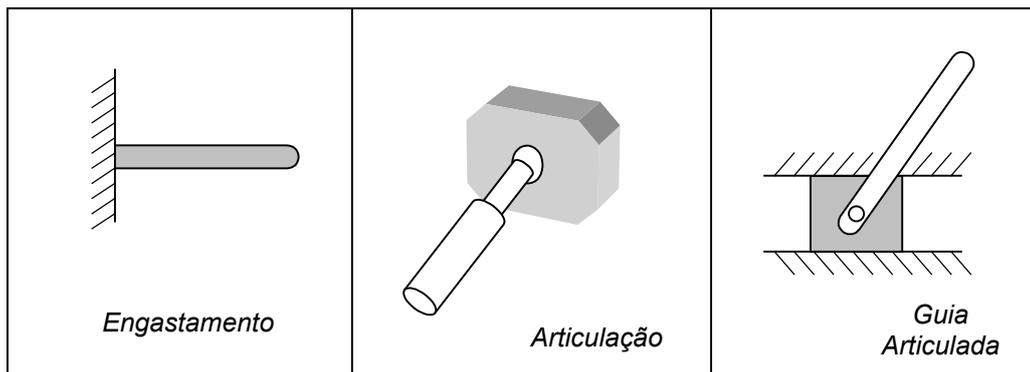


Figura 18 - Tipos de Vínculos Espaciais

É possível constituir vínculos combinados interligando ligações básicas, liberando apenas determinados tipos de movimento relativo.

7.4. Diagrama de Forças sobre o Corpo Livre

Para o estudo do equilíbrio estático ou movimentação dinâmica de um corpo é necessário a identificação de todas as forças ativas incidentes sobre o corpo. Trata-se portanto de isolar o corpo de seus vínculos e discriminar todas as forças ativas externas, de CAMPO e VINCULARES atuantes sobre ele. Considere o sistema constituído pela barra AB , vinculada em A (articulação) e submetido a força (\vec{F}_B, B) e campo gravitacional, conforme apresentado na Figura 19a. Isolando a barra dos seus vínculos (A) e aplicando ao corpo as forças externas, de campo e vinculares, obêm-se o **DFCL**, conforme ilustrado na Figura 19b.

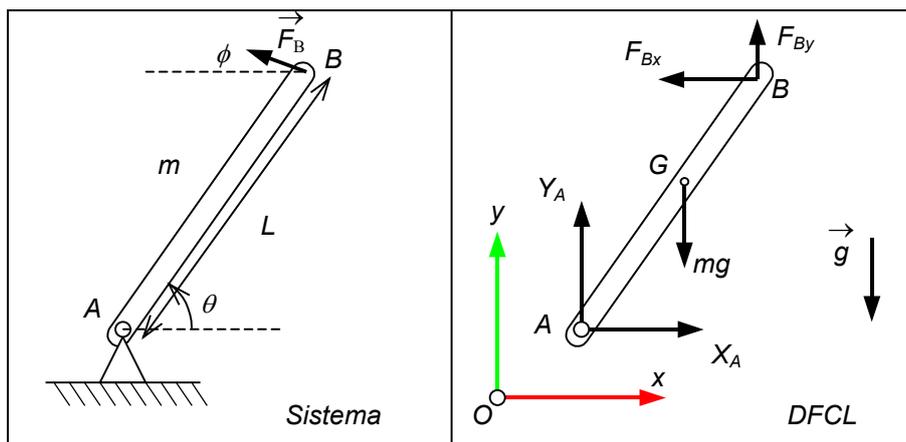


Figura 19 – Diagrama de Forças sobre o Corpo Livre

Observe que as incógnitas decorrentes do vínculo em A , são identificadas com valores positivos na base de coordenadas selecionada. Pode-se escrever a partir do **DFCL** a Resultante das forças

externas como $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ e suas componentes para a condição de equilíbrio:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} R_x = X_A + F_{Bx} = 0 \\ R_y = Y_A + F_{By} - mg = 0 \\ R_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_A = -F_{Bx} \\ Y_A = -F_{By} - mg \\ R_z = 0 \end{cases} \quad (37)$$

Note ainda que para o corpo permanecer em equilíbrio tem-se que: $\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = 0$.

Tomando o pólo em A , tem-se a partir do **DFCL** que:

$$\begin{aligned} \vec{M}_A &= \sum_{i=1}^n (P_i - A) \wedge \vec{F}_i = (A - A) \wedge \vec{R}_A + (B - A) \wedge \vec{R}_B + (G - A) \wedge m\vec{g} = 0 \\ L(\cos\theta\vec{i} + \text{sen}\theta\vec{j}) \wedge (F_{Bx}\vec{i} + F_{By}\vec{j}) + L/2(\cos\theta\vec{i} + \text{sen}\theta\vec{j}) \wedge -mg\vec{j} &= 0 \\ L(F_{By}\cos\theta - F_{Bx}\text{sen}\theta)\vec{k} - mgL/2\cos\theta\vec{k} &= 0 \end{aligned} \quad (38)$$

7.5. Sistemas Isostáticos

Um sistema em equilíbrio estático tal que as equações sejam suficientes para determinar as reações vinculares incógnitas é chamado de sistema **ISOSTÁTICO** ou estaticamente determinado. Caso contrário é chamado de Sistema **HIPERESTÁTICO** (ou estaticamente indeterminado). Existe sistema que tem um grau de liberdade indeterminado chamado de sistema **HIPOSTÁTICOS**.

7.6. Sistema Submetido a Forças

Dois casos importantes de sistemas em equilíbrio submetidos a forças devem ser destacados:

- Sistema em equilíbrio submetido a duas forças externas;
- Sistema em equilíbrio submetido a três forças externas;

Para o primeiro caso conclui-se imediatamente que as duas forças devem ser iguais e opostas (sistema plano).

Para o segundo caso as forças devem ser coplanares pois caso uma delas esteja fora do plano não haverá componente de resultante nula naquela direção. Portanto sendo coplanares podem ser

paralelas ou concorrentes. Sendo duas forças concorrentes num ponto P , a terceira forças deve passar também por P para resultar em momento nulo.

Exemplo: BARRA DE TRELIÇA

Um barra com articulações nas extremidades estará em equilíbrio apenas quando as forças externas nas extremidades forem alinhadas. Demonstração: considere a barra AB bi-vinculada conforme apresentado na Figura 20.

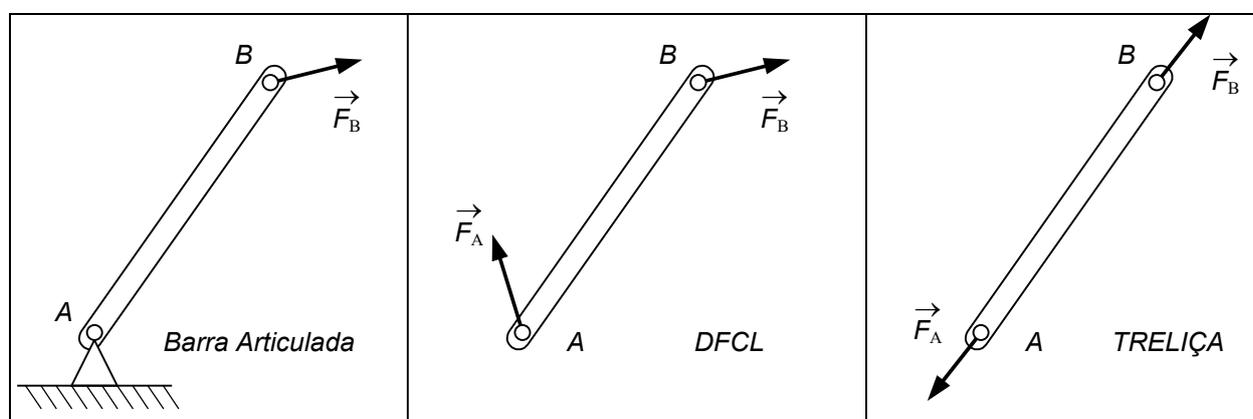


Figura 20 – Barra Bi-Articulada (Barra de Treliza)

Para que a barra esteja em equilíbrio devem valer:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \quad \text{e} \quad \vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = 0 \quad (39)$$

Da primeira equações obtêm-se que: $\vec{F}_A + \vec{F}_B = 0$, portanto iguais e contrárias. Da segunda equação, considerando o pólo em A têm-se: $\vec{M}_A = (B - A) \wedge \vec{F}_B = 0$, portanto, para $(B - A) \neq 0$ os vetores $(B - A)$ e \vec{F}_B devem ser alinhadas e portanto contidas no plano.

Uma barra com extremidades articuladas é chamada de BARRA DE TRELIÇA e suporta apenas forças iguais e contrárias aplicadas na sua extremidade.

Exemplo: Sistema de 3 forças

Demonstra-se (*França*, 2011) que um sistema submetido a três forças só está em equilíbrio se as forças forem coplanares. Sendo coplanares são necessariamente paralelas ou concorrentes.

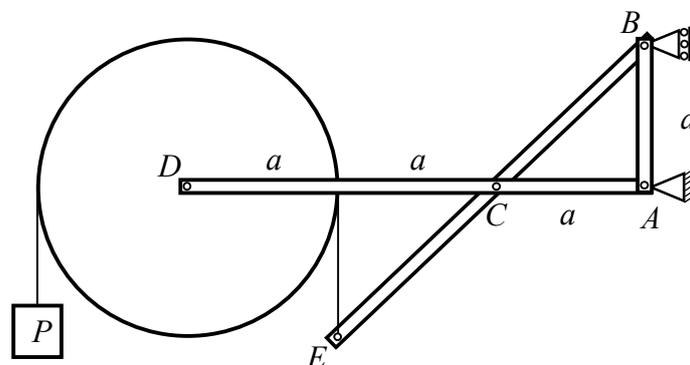
7.7. Sistema com Múltiplos Elementos

Na mecânica é comum haver sistemas formados com múltiplos tipos de elementos. Os sistemas podem ser planos ou tridimensionais. Pode conter Placas, Barras, Fios e Polias. O sistema pode ser suportado ou acoplado por apoios, pinos, articulações, engastamentos, etc. O sistema pode ser formado por triades de barras articuladas nas extremidades formando o que é chamado de treliça. Eventualmente o sistema pode ser constituído por mais de um pórticos rígidos, conforme ilustrado no sistema de barras de treliça apresentado na Figura 28.

Exemplo: Sistema Múltiplos Elementos

O sistema ideal mostrado na figura tem 3 barras e uma polia de massas desprezíveis, o vínculo em A é uma articulação, e o vínculo em B é um apoio simples. As barras são articuladas em C . O fio que passa pela polia está fixado em E e tem na outra extremidade um peso P . Determine:

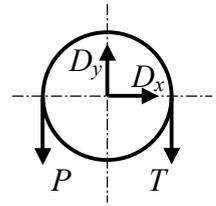
- as forças que a polia e o fio aplicam nas barras.
- as reações vinculares em A e B .
- as forças na conexão C entre as barras.
- Desenhe as barras indicando todos os esforços atuantes.



Resolução: Sistema: Polia de centro em D, peso P, barras AB, AD, BE.

DFCL: conforme figuras. Teoremas: Equilíbrio Estático:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i = 0 \quad \text{e} \quad \vec{M}_O = \sum (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = 0$$



a) Isolando a polia centro em **D**, obtêm-se:

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow P \cdot a - T \cdot a = 0 \Rightarrow T = P$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow D_x = 0$$

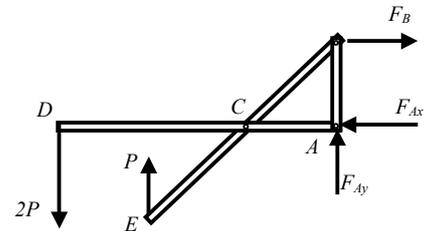
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow D_y - P - T = 0 \Rightarrow D_y = 2P$$

b) Observando a estrutura formada pelas barras e utilizando os valores da polia:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_B - F_{Ax} = 0 \Rightarrow F_{Ax} = F_B \Rightarrow F_{Ax} = 4P$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{Ay} + P - 2P = 0 \Rightarrow F_{Ay} = P$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 2P \cdot 3a - P \cdot 2a - F_B \cdot a = 0 \Rightarrow F_B = 4P$$

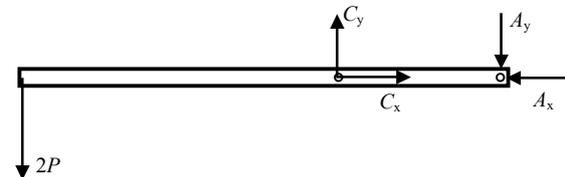


c) Isolando a barra **ACD** e utilizando valores obtidos (**atenção, não é barra de treliça**):

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow C_x - A_x = 0 \Rightarrow C_x = A_x \Rightarrow C_x = 4P$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow C_y - A_y - 2P = 0 \Rightarrow A_y = C_y - 2P$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 2P \cdot 3a - C_y \cdot a = 0 \Rightarrow C_y = 6P \quad \therefore A_y = 4P$$

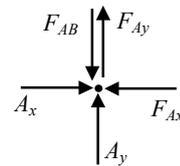


d) Analisando o nó **A**, obtêm-se:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x - F_{Ax} = 0 \Rightarrow A_x = 4P$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + F_{Ay} - F_{AB} = 0 \Rightarrow$$

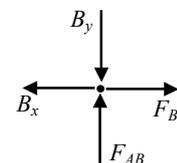
$$F_{AB} = A_y + F_{Ay} = 4P + P \Rightarrow F_{AB} = 5P$$



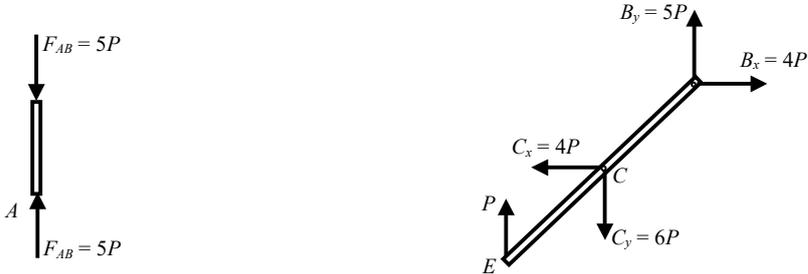
e) Analisando o nó **B**:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_B - B_x = 0 \Rightarrow B_x = F_B \Rightarrow B_x = 4P$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{AB} - B_y = 0 \Rightarrow B_y = F_{AB} \Rightarrow B_y = 5P$$



f) Portanto as barras **AB** e **BE** resultam como as seguintes solicitações:



7.8. Treliças

Treliças são estruturas rígidas formadas por sequências triangulares de barras retas interligadas por articulações, conforme ilustrado na Figura 21. Em geral as forças externas são aplicadas nos vértices dos triângulos (nós). As barras articuladas nas extremidades são chamadas de barras de treliça e só recebem forças iguais e contrárias alinhadas com ela, conforme apresentado no item 7.6. Neste texto apenas as treliças planas estáticas serão abordadas.

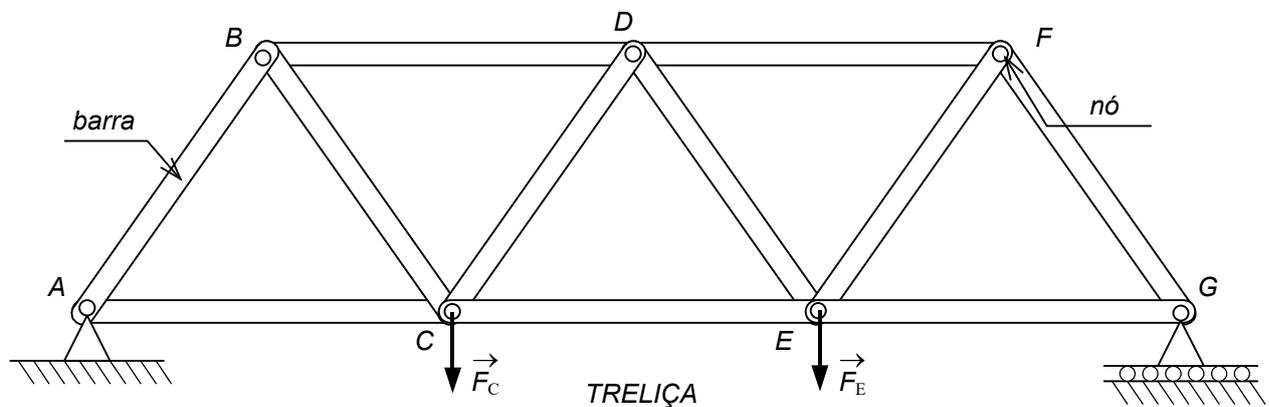


Figura 21 – Treliça Plana

Para análise estática de uma treliça, faz-se inicialmente o *DFCL* da treliça como um todo (corpo rígido estático único) para determinação das forças nos apoios. A subsequente determinação das forças internas das barras da treliça em equilíbrio, pode ser realizada por dois métodos:

- Método dos Nós;
- Método das Seções.

MÉTODO DOS NÓS: O nó (ou pino) é o centro de um sistema de forças concorrentes cujo momento em relação a este ponto é nulo, conforme ilustrado na Figura 22a. Desta forma um nó (ou pino) está em equilíbrio quando a resultante das forças for nula (veja o *DFCL* na Figura 22b). Note que o pino transmite as forças entre a articulação e as barras.

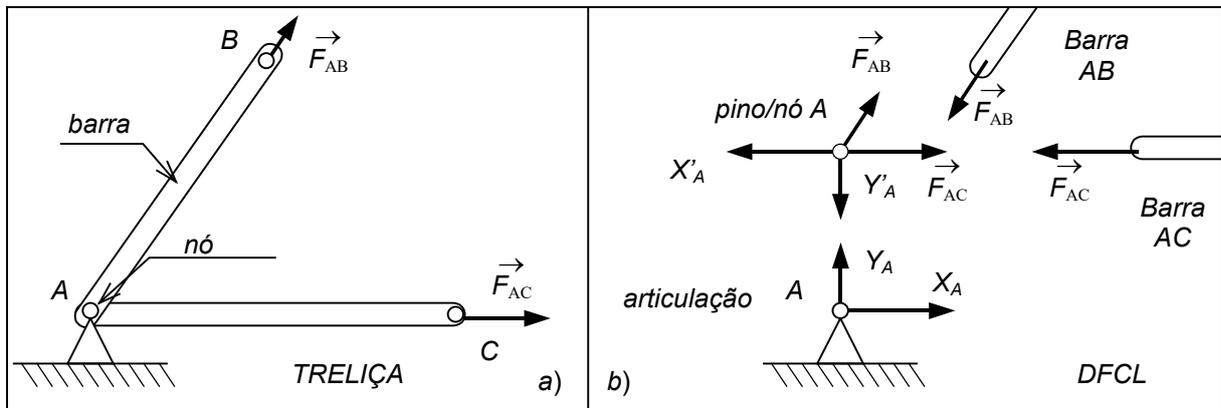


Figura 22 – Detalhe do Método dos Nós

Convenção: quando uma barra for submetida a forças de tração, convencionam-se a força com sinal positivo. De maneira similar, as forças nos nós, devido as barras (ação e reação), tem sinal positivo sempre para fora do nó.

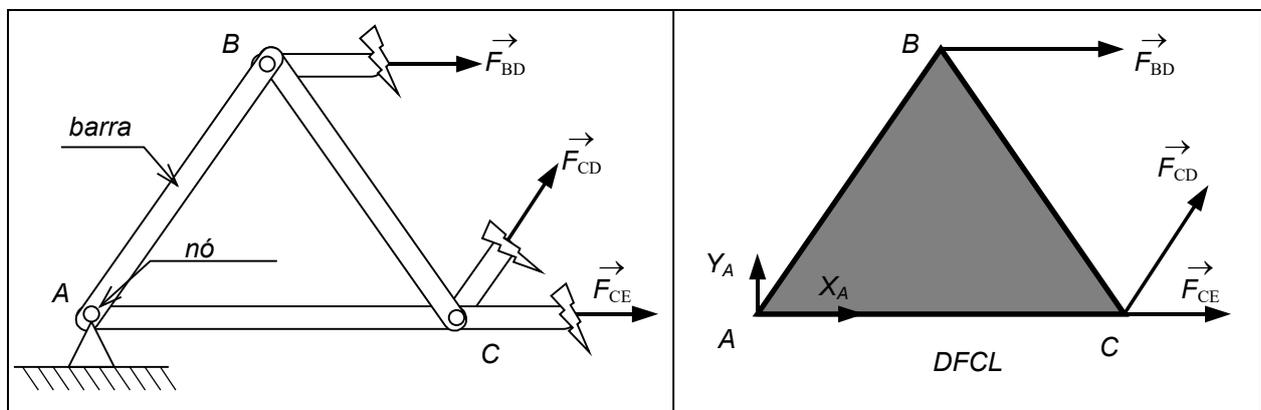


Figura 23 – Detalhe do Método das Seções

MÉTODO DAS SEÇÕES: Uma seção da treliça deve no máximo cortar três barras, conforme ilustrado na Figura 23a o que resultam 3 forças incógnitas para três equações no sistema estático no plano mostrado no **DFCL** da Figura 23b.

Exemplo: Treliça - Método dos Nós

Determine as forças nas barras da treliça, submetida à força $\vec{F}_B = F_{Bx} \vec{i}$ aplicada no ponto **B**, conforme mostrado na Figura 24a, utilizando o MÉTODO DOS NÓS.

Resolução: Sistema: Treliça. Referencial: **Oxy** e Pólo conveniente **A**. Teoremas: Equilíbrio

Estático: $\vec{R} = \sum \vec{F}_i = 0$ e $\vec{M}_O = \sum (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = 0$

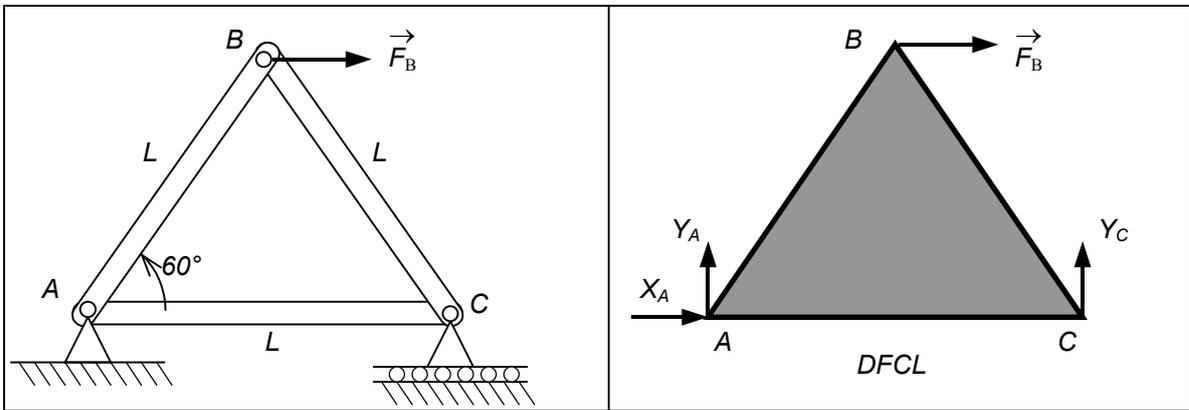


Figura 24 – Treliça Plana Simples e DFCL

Para determinar as reações nos vínculos de apoio **A** e **C**, isola-se a treliça como um único corpo rígido, conforme ilustrado no **DFCL** da Figura 24b, e para $\vec{R} = \sum \vec{F}_i = 0$ escreve-se as seguintes expressões:

$$\begin{cases} X_A + F_{Bx} = 0 \\ Y_A + Y_C = 0 \\ \text{-----} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_A = -F_{Bx} \\ Y_A = -Y_C \\ \text{-----} \end{cases}$$

$$\vec{M}_A = (A - A) \wedge \vec{R}_A + (B - A) \wedge \vec{F}_B + (C - A) \wedge \vec{R}_C = 0$$

$$\vec{M}_A = \vec{0} + L(\cos 60^\circ \vec{i} + \sin 60^\circ \vec{j}) \wedge F_{Bx} \vec{i} + L\vec{i} \wedge Y_C \vec{j} = 0$$

$$\vec{M}_A = -F_{Bx} L \sin 60^\circ \vec{k} + Y_C L \vec{k} = 0 \Rightarrow Y_C = F_{Bx} \sqrt{3}/2 \Rightarrow Y_A = -F_{Bx} \sqrt{3}/2$$

Portanto os valores de força para a treliça como um corpo rígido único são:

$$X_A = -F_{Bx} \ ; \ Y_C = F_{Bx} \sqrt{3}/2 \ ; \ Y_A = -F_{Bx} \sqrt{3}/2$$

Isolando o nó A , conforme ilustrado no **DFCL** da Figura 25, utilizando novamente $\vec{R} = \sum \vec{F}_i = 0$ e os valores já determinados (note que as reações nos nós são opostas as ações na treliça determinadas acima), obêm-se as seguintes expressões:

$$\begin{cases} -X'_A + F_{AB} \cdot \cos 60^\circ + F_{AC} = 0 \\ -Y'_A + F_{AB} \cdot \sen 60^\circ = 0 \\ \text{-----} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{AC} = X'_A - F_{AB} \cdot \frac{1}{2} \\ F_{AB} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = Y'_A \\ \text{-----} \end{cases} \Rightarrow$$

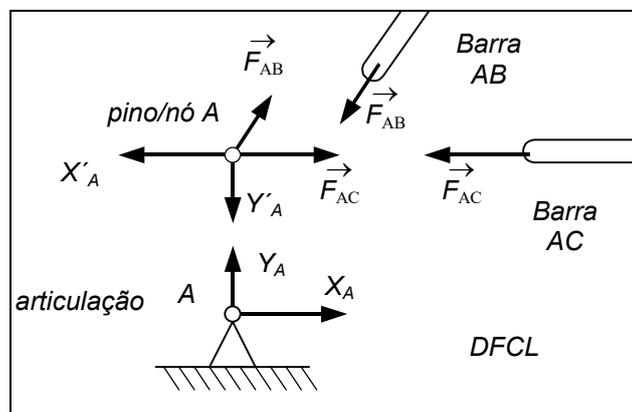


Figura 25 – Detalhe do Nó A

$$\begin{cases} F_{AC} = F_{Bx} - \frac{1}{2} F_{Bx} = \frac{1}{2} F_{Bx} \\ F_{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} F_{Bx} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = F_{Bx} \\ \text{-----} \end{cases} \quad \text{Portanto a barra } AC \text{ e } AB \text{ estão sob tração (sinal positivo).}$$

Resolva o mesmo problema anterior considerando agora a força externa aplicada no ponto B , mas com sentido para baixo: $\vec{F}_B = -F_{By} \vec{j}$.

Exemplo: Treliça - Método das Seções

Determine a força na barras **FG** da ponte construída na forma de treliça, submetida às 6 forças $\vec{F}_i = -F_y \vec{j}$ aplicadas nos nós superiores, conforme mostrado na Figura 26, utilizando o MÉTODO DAS SEÇÕES.

Resolução: Sistema: Treliça. Referencial: **Oxy** e Pólo conveniente **A**. Teoremas: Equilíbrio Estático: $\vec{R} = \sum \vec{F}_i = 0$ e $\vec{M}_O = \sum (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = 0$

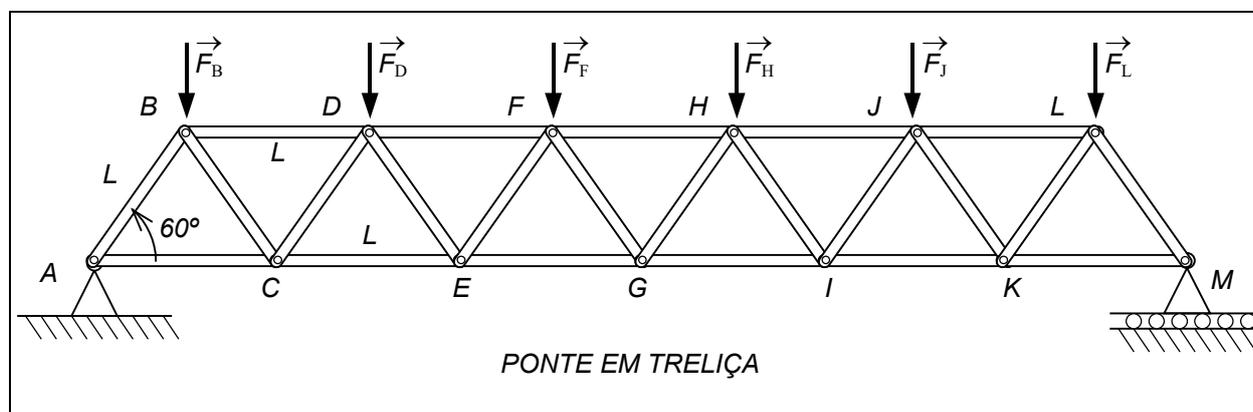


Figura 26 – Ponte de Treliça

Para determinar as reações nos vínculos de apoio **A** e **M**, isola-se a treliça como um único corpo rígido, submetido a $\vec{F}_i = -n \cdot F_y \vec{j}$ cargas verticais e escreve-se as seguintes expressões para **n** = 6 segmentos:

$$\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A + Y_M + n \cdot F_y = 0 \\ \text{-----} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A + Y_M = 6F_y \\ \text{-----} \end{cases}$$

$$\vec{M}_A = (A-A) \wedge \vec{R}_A + (B-A) \wedge \vec{F}_B + (D-A) \wedge \vec{R}_D + \dots + (M-A) \wedge \vec{R}_M = 0$$

$$\vec{M}_A = \vec{0} + L(\cos 60^\circ \vec{i} + \text{sen } 60^\circ \vec{j}) \wedge -F_{By} \vec{j} + \dots + 6L\vec{i} \wedge Y_M \vec{j} = 0$$

$$\vec{M}_A = -\frac{L}{2} F_{By} \vec{k} - \frac{3L}{2} F_{Dy} \vec{k} - \dots + 6L Y_M \vec{k} = 0$$

$$\sum (2n-1) \cdot \frac{L}{2} F_y = 6L Y_M \quad \Rightarrow \quad 36 \cdot \frac{L}{2} F_y = 6L Y_M$$

$$Y_M = 3 F_y \quad \Rightarrow \quad Y_A = 3 F_y$$

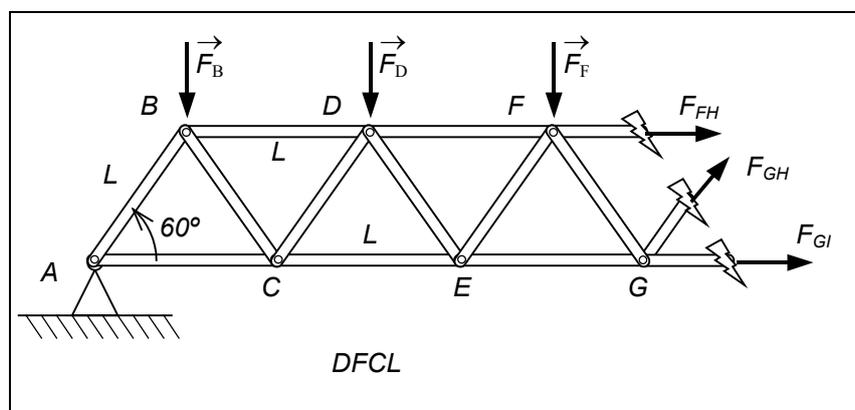


Figura 27 – Seção da Treliça

Portanto os valores de força para a seção de treliça como um corpo rígido, conforme apresentado na Figura 27, para o pólo em G são:

$$\vec{M}_G = (A-G) \wedge \vec{R}_A + (B-G) \wedge \vec{F}_B + (D-G) \wedge \vec{F}_D + (F-G) \wedge \vec{F}_F + (F-G) \wedge F_{FH} \vec{i} = 0$$

$$-3L\vec{i} \wedge Y_A \vec{j} + \left(-\frac{5}{2}\right)L\vec{i} \wedge (-F_B) \vec{j} + \left(-\frac{3}{2}\right)L\vec{i} \wedge (-F_D) \vec{j} + \left(-\frac{1}{2}\right)L\vec{i} \wedge (-F_F) \vec{j} + L \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{j} \wedge F_{FH} \vec{i} = 0$$

$$\boxed{F_{FH} = \sqrt{3} F}$$

Exemplo: Sistema com dois porticos treliçados

Considere o sistema constituído por duas treliças formando pórticos rígidos planos distintos, conforme ilustrado na Figura 28a. Note que o anel de articulação em E une os corpos rígidos 1 e 2.

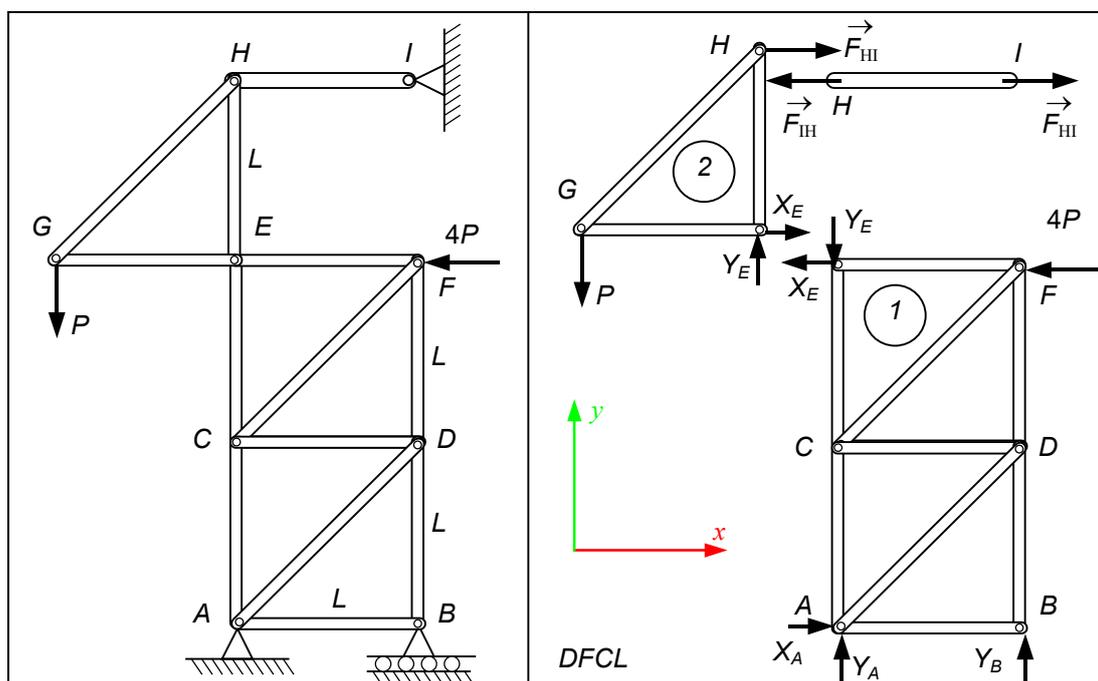


Figura 28 – Sistema de Porticos

Para determinar as reações nos nós do sistema isola-se os corpos rígidos: Barra HI , treliça EGH (corpo rígido nº 2) e portico $ABEF$ (corpo rígido nº 1) conforme ilustrado nos sistemas de treliças apresentado na Figura 28b.

Resolução: Sistema: Barra de treliça HI , treliça EGH (corpo rígido nº 2) e treliça $ABEF$ (corpo rígido nº 1). Referencial: Oxy . **Teoremas:** Equilíbrio Estático:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i = 0 \quad \text{e} \quad \vec{M}_O = \sum (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = 0$$

Iniciando pelo corpo rígido nº 2 (treliça EGH) verifica-se de imediato, utilizando a equação de momento em relação ao pólo E que F_{HI} é igual a P . Por decorrência, utilizando a fórmula da resultante, obtêm-se: $X_E = -F_{HI} = -P$ e $Y_E = P$.

Finalmente, tomando o pólo em A obtêm-se:

$$\begin{aligned}\vec{M}_A &= \sum (P_i - A) \wedge \vec{F}_i = 0 \\ (A - A) \wedge \vec{R}_A + (B - A) \wedge \vec{R}_B + (E - A) \wedge \vec{R}_E + (F - A) \wedge (-4P\vec{i}) &= 0 \\ \vec{0} + L\vec{i} \wedge Y_B\vec{j} + 2L\vec{j} \wedge (-X_E\vec{i} - Y_E\vec{j}) + (L\vec{i} + 2L\vec{j}) \wedge (-4P\vec{i}) &= 0\end{aligned}$$

$$\boxed{Y_B = 6P}$$

Experimente abrir a treliça **ABEF** utilizando o método das barras e determinar a força na barra **BD**.

8. EIXO CENTRAL

Existe um conjunto de pontos formando um eixo, sobre o qual o momento de um sistema de forças produz um momento mínimo. Tal eixo é denominado **EIXO CENTRAL**. Para determinar a localização de tal eixo vamos apresentar a resolução da equação vetorial com uma incógnita.

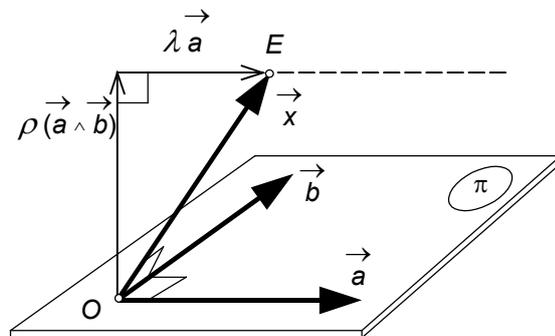
8.1. Equação Vetorial

Resolução do Produto Vetorial: Determinar a incógnita \vec{x} do produto vetorial:

$$\boxed{\vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{b}} \quad (40)$$

com \vec{x} , \vec{a} e \vec{b} não nulos e $\in \mathfrak{R}^3$; que é um espaço vetorial de ordem 3 (3 dimensões).

Observe que o vetor \vec{b} é ortogonal ao plano formado pelos vetores \vec{x} e \vec{a} quaisquer, devido as propriedades do produto vetorial, então $\vec{b} \perp \vec{x}$ e também $\vec{b} \perp \vec{a}$, conforme ilustrado na figura. Portanto $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{0}$ (perpendiculares) e contidos no plano π .



Pode-se representar $\vec{x} = (E - O)$ no plano \vec{x} e \vec{a} , como a soma de dois vetores: um na direção de \vec{a} e outro perpendicular a \vec{a} (e \therefore ortogonal a \vec{b} , como já estabelecido), conforme ilustrado na figura. Então:

$$\boxed{\vec{x} = \rho(\vec{a} \wedge \vec{b}) + \lambda \vec{a}} \quad \text{com } \lambda \text{ e } \rho \in \mathfrak{R}. \quad (41)$$

Substituindo esta expressão na equação incógnita, tem-se que:

$$[\rho(\vec{a} \wedge \vec{b}) + \lambda \vec{a}] \wedge \vec{a} = \vec{b} \quad \Rightarrow \quad (\rho \vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{a} = \vec{b} \quad (42)$$

Tomando o módulo dos termos da equação anterior e como os vetores são perpendiculares, determina-se o valor para o escalar ρ :

$$|\rho| \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{b}| \quad \Rightarrow \quad \rho = \pm \frac{1}{|\vec{a}|^2} \quad (43)$$

Verificando, a solução corresponde ao valor positivo de ρ , obtêm-se finalmente da equação incógnita a resolução para \vec{x} :

$$\boxed{\vec{x} = \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{|\vec{a}|^2} + \lambda \vec{a}} \quad (44)$$

com o escalar λ qualquer $\in \mathfrak{R}$ que são as soluções da equação do produto vetorial com uma incógnita em \vec{x} . Tal solução correspondente à reta $\lambda \vec{a}$ (linha pontilhada mostrada na figura) que passa pelo ponto E . Note ainda que a solução particular quando $\lambda = 0$, resulta em $\vec{x} \perp \vec{a}$.

8.2. Eixo de Momento Mínimo

Considere o sistema de forças \mathcal{S} com resultante não nula e momento \vec{M}_O . O lugar geométrico dos pontos E para os quais o momento do sistema é paralelo à resultante ($\vec{M}_E = h \cdot \vec{R}$) é uma reta paralela à \vec{R} . Tal reta é única e chamada de **EIXO CENTRAL** do sistema \mathcal{S} .

Demonstração: Utilizando a fórmula de mudança de pólo e impondo que $\vec{M}_E = h \cdot \vec{R}$:

$$\vec{M}_E = \vec{M}_O + (O - E) \wedge \vec{R} \quad \Rightarrow \quad (E - O) \wedge \vec{R} = \vec{M}_O - h \cdot \vec{R} \quad (45)$$

A solução de uma equação vetorial com uma incógnita é dado por:

$$\vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{|\vec{a}|^2} + \lambda \vec{a} \quad (46)$$

$$\underbrace{(E-O)}_{\vec{x}} \wedge \underbrace{\vec{R}}_{\vec{a}} = \underbrace{\vec{M}_O}_{\vec{b}} - h \cdot \vec{R} \quad \Rightarrow \quad (E-O) = \frac{\vec{R} \wedge (\vec{M}_O - h \cdot \vec{R})}{R^2} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{R^2} \quad (47)$$

que é o ponto E para o qual o momento é mínimo. Portanto os pontos do eixo $(E - O)$ paralelo para a resultante são:

$$\boxed{(E-O) = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{R^2} + \lambda \cdot \vec{R}} \quad (48)$$

que é a equação da reta paralela à \vec{R} (**EIXO CENTRAL**) descrita na forma paramétrica como:

$$\boxed{E = O + \left(\frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{R^2} \right) + \lambda \cdot \vec{R}} \quad (49)$$

A determinação do escalar h é obtida pré-multiplicando-se escalarmente os dois lados da equação anterior por \vec{R} (o produto triplo com dois vetores paralelos é nulo) obtendo-se:

$$\vec{R} \cdot (E-O) \wedge \vec{R} = \vec{R} \cdot (\vec{M}_O - h \cdot \vec{R}) = 0 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\vec{R} \cdot \vec{M}_O}{R^2} = \frac{I}{R^2} \quad (50)$$

onde I é o invariante escalar definido anteriormente.

8.3. Momento Mínimo

O momento de um sistema de forças \mathcal{S} é **mínimo** quando o pólo estiver sobre o **EIXO CENTRAL**. Considere um sistema de forças \mathcal{S} com resultante \vec{R} momento \vec{M}_O em relação a um pólo O . O momento em relação a um pólo E é obtido pela fórmula de mudança de pólo:

$$\vec{M}_E = \vec{M}_O + (O - E) \wedge \vec{R} \quad (51)$$

Utilizando novamente a fórmula de mudança de pólo para outro pólo P , fora do eixo central, terá momento:

$$\vec{M}_P = \vec{M}_E + (E - P) \wedge \vec{R} \quad (52)$$

No eixo central vale $\vec{M}_E = h \cdot \vec{R}$ portanto qualquer ponto P fora do eixo central:

$$\vec{M}_P = h \vec{R} + (E - P) \wedge \vec{R} \quad (53)$$

que mostra que \vec{M}_P não é mais paralelo com \vec{R} pois à ele é somada uma componente ortogonal. Portanto para qualquer ponto P fora do eixo central, o momento \vec{M}_P não é mais o valor mínimo.

Exemplo:

Considere o sistema de forças \mathcal{S} , composto de (\vec{F}_i, P_i) de mesmo módulo, conforme indicado na Figura 29. Calcule a resultante \vec{R} do sistema e o momento \vec{M}_O em relação ao pólo O . Determine a posição do eixo central onde o momento é mínimo. Qual o ato de movimento que o sistema de forças induziria a um corpo?

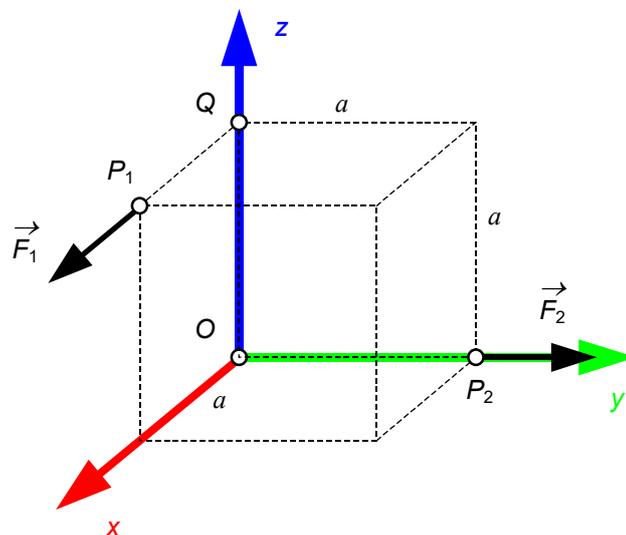


Figura 29 – Localização do Eixo de Momento Mínimo

Resolução: Sistema: forças e pontos de aplicação: $\vec{F}_1 = F\vec{i}$ aplicada em $P_1(a, 0, a)$ e $\vec{F}_2 = F\vec{j}$ aplicada em $P_2(0, a, 0)$. Resultante e Momento em relação ao pólo $Q(0, 0, a)$:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = F\vec{i} + F\vec{j} = F(\vec{i} + \vec{j})$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = (a\vec{i} + a\vec{k}) \wedge F_1\vec{i} + (a\vec{j}) \wedge F_2\vec{j} = aF\vec{j} \quad (54)$$

$$\vec{M}_Q = \sum_{i=1}^n (P_i - Q) \wedge \vec{F}_i = (a\vec{i} + a\vec{k} - a\vec{k}) \wedge F_1\vec{i} + (a\vec{j} - a\vec{k}) \wedge F_2\vec{j} = aF\vec{i}$$

Eixo Central: Tomando a Resultante e o Momento em relação ao pólo $O(0, 0, 0)$, tem-se:

$$E = O + \left(\frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{R^2} \right) + \lambda \cdot \vec{R} = O + \left(\frac{F(\vec{i} + \vec{j}) \wedge aF\vec{j}}{2F^2} \right) + \lambda \cdot (\vec{i} + \vec{j}) \quad (55)$$

$$E = \frac{a}{2} \vec{k} + \lambda \cdot (\vec{i} + \vec{j})$$

Note que o invariante escalar não é nulo ($I = aF^2$) e portanto o sistema não pode ser reduzido a uma única força. O sistema equivalente será portanto (\vec{R}, Q) e \vec{M}_Q . Calculando o momento em relação ao pólo $E(0, 0, a/2)$:

$$\vec{M}_E = \sum_{i=1}^n (P_i - E) \wedge \vec{F}_i = (a\vec{i} + a/2\vec{k}) \wedge F_1\vec{i} + (a\vec{j} - a/2\vec{k}) \wedge F_2\vec{j} = Fa/2 (\vec{i} + \vec{j}) \quad (56)$$

Verifica-se que o momento em relação ao pólo E pertencente ao eixo central, tem a mesma direção da resultante $(\vec{i} + \vec{j})$ e valor mínimo ($\vec{M}_E = Fa/2 (\vec{i} + \vec{j})$). O ato de movimento que o sistema de forças induziria a um corpo pode ser composto por uma roto-translação conforme ilustrado na Figura 30.

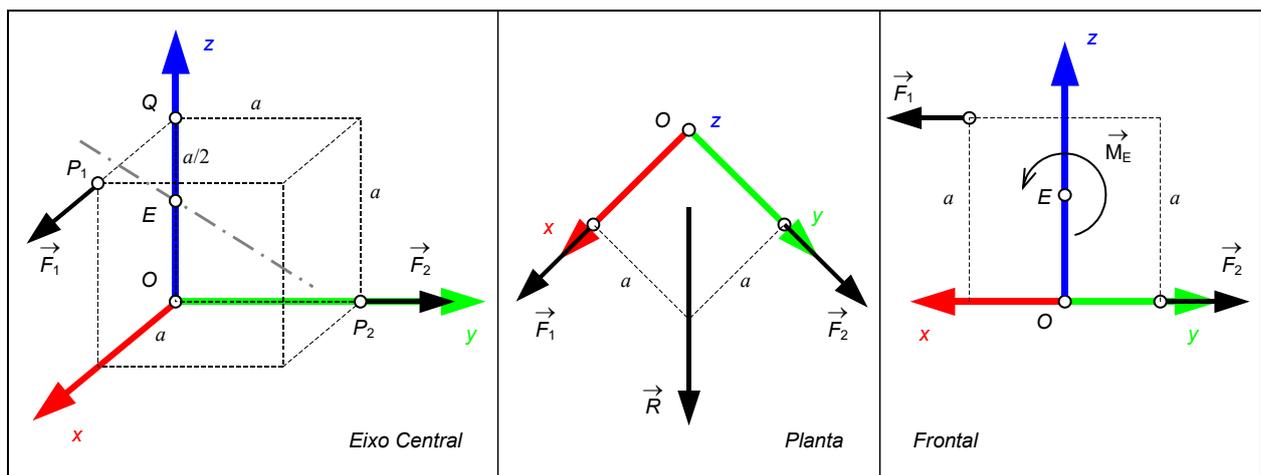


Figura 30 – Eixo Central e Ato de Movimento

9. HIDROSTÁTICA

Um sistema de forças paralelas aplicadas a todos os pontos de uma superfície é um caso particular de forças distribuídas. Em geral, forças que atuam em todos os pontos de uma linha, superfície ou volume são ditas distribuídas. O termo **tensão** é geralmente entendido como uma medida da intensidade das forças por unidade de área. Forças distribuídas num volume são chamadas de forças de volume como o peso do corpo, já visto no item 6.1. A **HIDROSTÁTICA** estuda a distribuição da força (**pressão**) exercida por fluidos perfeitos em repouso e pesados (submetidos a ação de forças de campo) sobre superfícies de confinamento.

9.1. Forças Distribuídas Sobre uma Superfície

Adotando por simplicidade uma superfície plana π com sistema de forças \vec{F}_i aplicadas em cada um dos seus pontos P_i . Sendo as forças normais ao plano tem-se que $\vec{F} = h\vec{n}$ aplicada no ponto P_i da área S do plano π representado pelo vetor \vec{n} normal a superfície, conforme ilustrado na Figura 31.

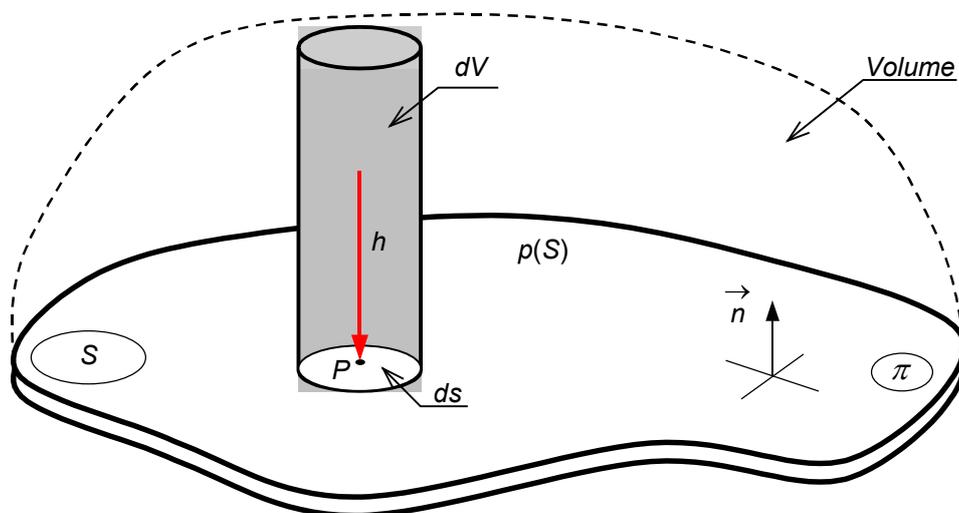


Figura 31 – Forças Distribuídas sobre uma Superfície

Seja $p(\mathcal{S})$ uma função contínua de pontos genéricos P_i ao longo da área \mathcal{S} com intensidade:

$$p = \frac{h}{ds} \quad (57)$$

é uma função escalar positiva e contínua de \mathcal{S} que é chamado de **PRESSÃO** no ponto P_i . Então a força que age na área elementar ds pode ser descrita por:

$$\vec{F} = h \vec{n} = p \vec{n} ds \quad (58)$$

A resultante \vec{R} do sistema de forças paralelas que agem sobre o plano π de área \mathcal{S} , decorrente das pressões hidrostáticas será:

$$\vec{R} = \sum_S \vec{F}_i = \int_S p \vec{n} ds = V \vec{n} \quad (59)$$

aplicada num ponto qualquer do **eixo central** (sistema do tipo 3 onde: $I = 0$; $\vec{R}_C \neq 0$ e $\vec{M}_C = 0$)

onde p é a pressão hidrostáticas do líquido ideal e V é o volume das pressões ($p = |\vec{R}|/S$).

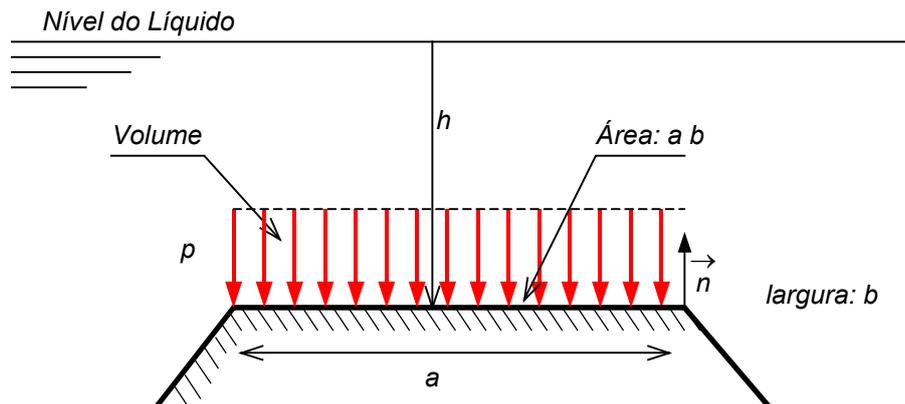
9.2. Ação de um Líquido numa Superfície Submersa

De acordo com a lei fundamental da **hidrostática** dos líquidos perfeitos a pressão hidrostáticas p num ponto a uma profundidade h de um líquido em repouso de peso específico γ (*gama*) é igual:

$$p = \gamma h \quad (60)$$

onde γ é o peso específico em [*Newton/m³*]. Note que a massa específica é ρ (*rho*) em [*kg/m³*] portanto $\gamma = \rho g$ e portanto $p = \rho g h$.

Seu líquido é perfeito a pressão que ele exerce em cada ponto da superfície é normal a essa. Assim para uma superfície planar de área ab a Resultante do sistema é de forças paralelas com volume V decorrente da pressão hidrostática p é um prisma com base retangular $a \times b$ de altura p , aplicada no eixo central da superfície.



A força total Resultante é dada pelo volume do prisma de área ab e largura b multiplicada pelo peso específico γ e sua linha de ação passa pelo centro de massa do mesmo:

$$\begin{aligned}
 p &= \gamma h \\
 \vec{R} &= V \vec{n} = p \cdot (a \cdot b) \vec{n} \\
 \vec{R} &= \gamma (a \cdot b \cdot h) \vec{n}
 \end{aligned}
 \tag{61}$$

No caso de uma superfície inclinada, conforme ilustrado na Figura 32a, tem-se que a pressão p varia linearmente, formando um volume trapezoidal. Para determinar a forças resultante do campo de pressões hidrostáticas sobre a face lateral inclinada, que tem o formado de um trapézio, é conveniente decompor a pressão em um triângulo e um retângulo, conforme ilustrado na Figura 32b.

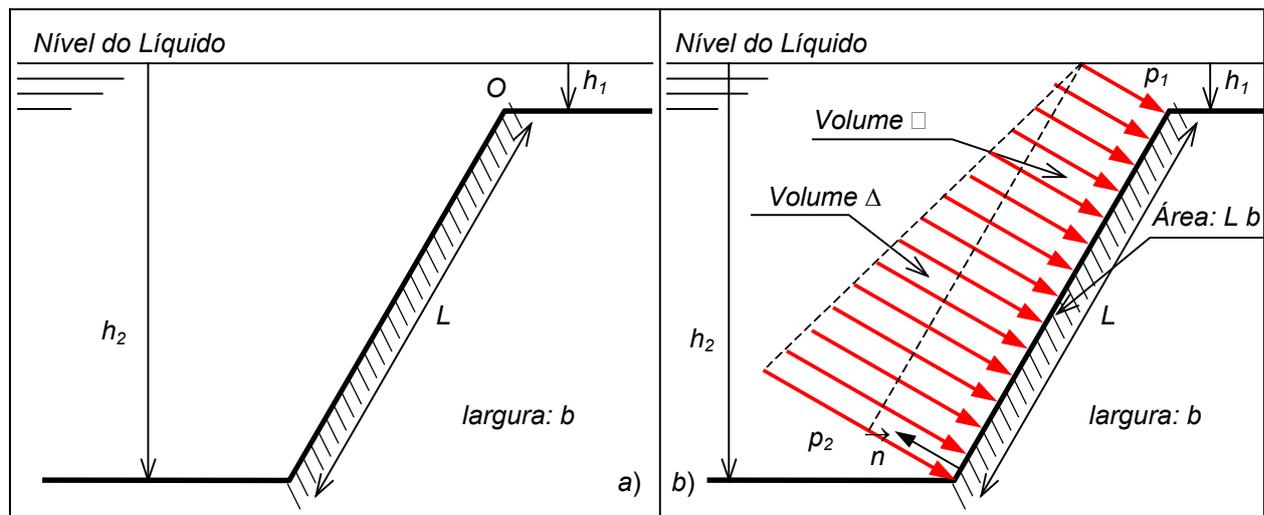


Figura 32 – Pressão do Líquido sobre Face inclinada

A pressão tem seus valores definidos pela profundidade h_1 e h_2 e o volume dado pela soma de um retângulo e um triângulo conforme ilustrado na Figura 32b:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \gamma h_1 ; \quad p_2 = \gamma h_2 \\
 \vec{R} &= V \vec{n} = (V_{\square}) \vec{n} + (V_{\Delta}) \vec{n} \\
 V_{\square} &= p_1 \cdot (L \cdot b) \quad ; \quad V_{\Delta} = (p_2 - p_1) \cdot (L \cdot b) / 2 \\
 \vec{R} &= \gamma \cdot L b (h_1 + h_2) / 2 \vec{n}
 \end{aligned}$$

Exemplo: Comporta

Considere uma comporta AB de comprimento L submersa no fluido em repouso a uma profundidade h_1 instalada em um canal de profundidade h_2 . Considerando o canal com largura d , determinar a força resultante normal equivalente do volume das pressões na comporta e a reação no apoio em B .

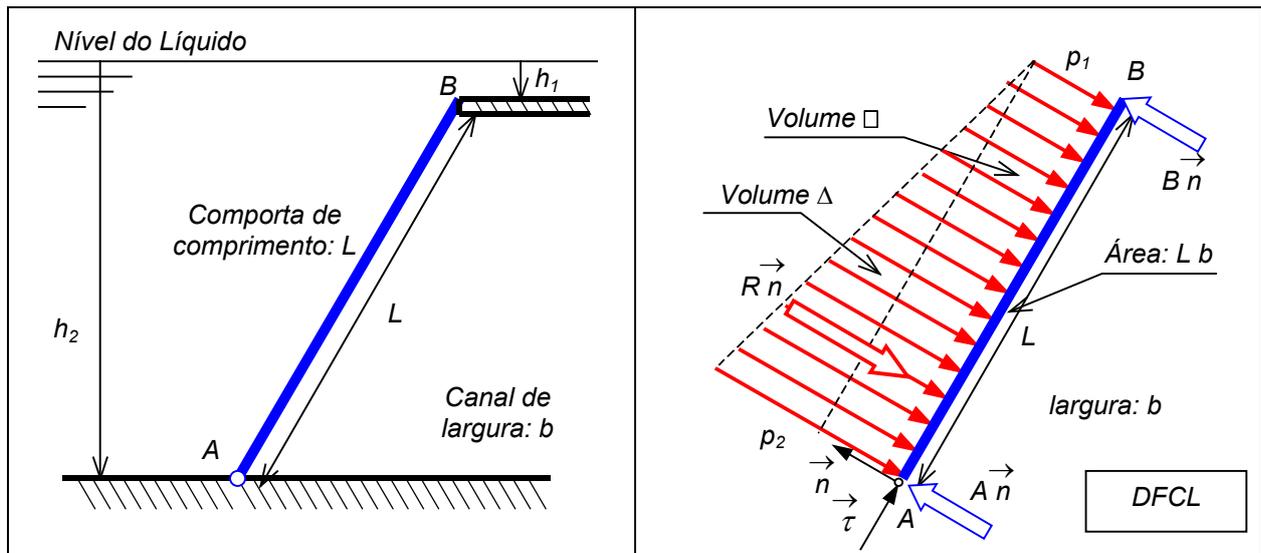


Figura 33 – Comporta em Canal

Resolução: Sistema: comporta de comprimento L submersa no fluido. **Diagrama de forças:** Reações nos vínculos A e B , Volume das pressões. **Referencial e pólo:** $A \vec{\tau} \vec{n}$. **Teoremas:** Volume das pressões, Estática da comporta.

$$p_1 = \gamma h_1 ; p_2 = \gamma h_2$$

$$\vec{R} = V \vec{n} = (V_{\nabla}) \vec{n} + (V_{\Pi}) \vec{n}$$

$$V_{\Pi} = p_1 \cdot (L \cdot b) ; V_{\nabla} = (p_2 - p_1) \cdot (L \cdot b) / 2$$

$$\vec{R} = \gamma \cdot L b (h_1 + h_2) / 2 \vec{n}$$

O local de aplicação da resultante do volume das pressões é o baricentro do volume, determinado por:

$$(G - A) = \frac{\sum m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{(V_{\nabla} \cdot L/3) + (V_{\Pi} \cdot L/2)}{V_{\nabla} + V_{\Pi}} = \frac{((p_2 - p_1) \cdot (L \cdot b) / 2) \cdot L/3 + (p_1 \cdot (L \cdot b)) \cdot L/2}{((p_2 - p_1) \cdot (L \cdot b) / 2) + (p_1 \cdot (L \cdot b))}$$

$$(G - A) = \frac{(\gamma \cdot (h_2 - h_1) \cdot (L \cdot b) / 2) \cdot L/3 + (\gamma \cdot h_1 \cdot (L \cdot b)) \cdot L/2}{(\gamma \cdot (h_1 + h_2) \cdot (L \cdot b) / 2)} = \frac{(2h_1 + h_2)}{3(h_1 + h_2)} L$$

Fazendo o equilíbrio da comporta em torno do pólo em A obtêm-se da equação de momentos:

$$\vec{M}_A = (G - A) \wedge \vec{R} + (B - A) \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

$$\frac{(2h_1 + h_2)}{3(h_1 + h_2)} L \vec{\sigma} \wedge \gamma \cdot L b (h_1 + h_2) / 2 \vec{n} = -L \vec{\sigma} \wedge B_n \vec{n}$$

$$B_n = \frac{(2h_1 + h_2)}{3} \gamma \cdot L b \vec{n}$$

Exemplo: Superfície não plana:

Para o caso de superfícies não planas o conceito de Volume das Pressões pode ser utilizado facilitando a solução do problema. Considere um tubo cilíndrico de comprimento L que tem como seção uma semicircunferência de raio R e está submetido, na sua face externa, à pressão da água a partir da profundidade h_1 , conforme indicado na Figura 34a. Determinar o vetor Resultante das pressões sobre a calota semi-cilindrica. É dado o peso específico da água: $\gamma = \rho g$.

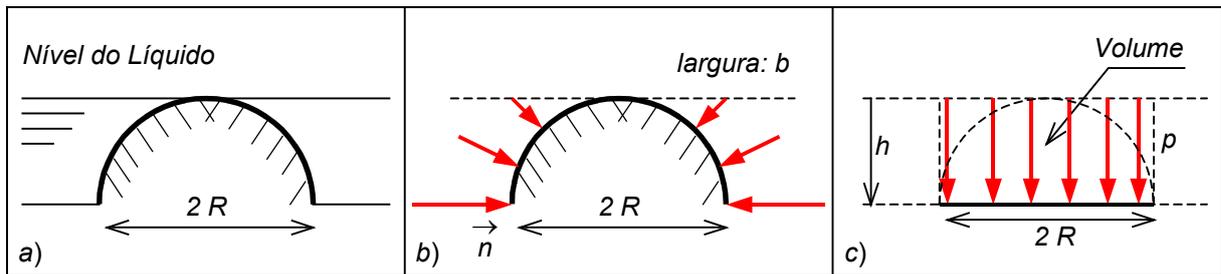


Figura 34 – Superfície semi-cilindrica

Inicialmente note que o campo de pressões é sempre perpendicular à superfície circular, conforme ilustrado na Figura 34b. Note também que as componentes horizontais da pressão sobre a calota se anulam. Considere agora que o volume das pressões sobre a base do semi-cilindro com área $(2R b)$, na profundidade $h = R$ e largura b , conforme ilustrado na Figura 34c, corresponde à:

$$\vec{R}_{Base} = V \vec{n} = p \cdot Area = \gamma \cdot h(2R \cdot b) = \gamma \cdot 2R^2 b.$$

Finalmente o volume das pressões sobre a calota semi-cilindrica será o valor anterior menos a área da calota:

$$\vec{R}_{Calota} = (V_{\Pi} - V_{\Omega}) \vec{n} = \gamma \cdot (2R^2 - \pi R^2 / 2) b = \gamma \cdot R^2 (2 - \pi / 2) b$$

Verifique que para uma profundidade genérica $h > R$ a Resultante será:

$$\vec{R}_{Calota} = \gamma \cdot R b (2h - \pi R / 2).$$

Princípio de Arquimedes:

"*Todo corpo mergulhado num fluido em repouso sofre, por parte do fluido, uma força vertical para cima, cuja intensidade é igual ao peso do fluido deslocado pelo corpo.*"

Considere um cubo de aresta a mergulhado integralmente num fluido em repouso de peso específico: $\gamma = \rho g$, conforme ilustrado na Figura 35a.

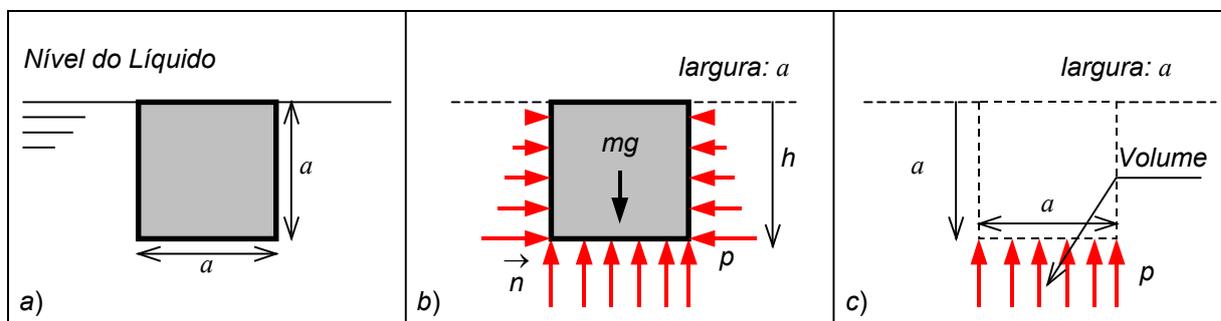


Figura 35 – Superfície semi-cilíndrica

Inicialmente note que o campo de pressões é sempre perpendicular à superfície do cubo, conforme ilustrado na Figura 35b. Note também que as componentes horizontais da pressão sobre os lados opostos do cubo se anulam. Considere agora a força resultante do volume das pressões sobre a base inferior do cubo com área (a^2), na profundidade $h = a$ e largura a , conforme ilustrado na Figura 34c, corresponde à:

$$\vec{R} = V \vec{n} = p \cdot Area = \gamma \cdot h a^2 = \gamma \cdot a^3.$$

Note que no equilíbrio do corpo totalmente submerso, o volume de líquido deslocado pelo cubo deve ser igual a peso próprio (mg) ou seja para corpos com densidade igual a do fluido. Essa relação vale para qualquer profundidade pois ao submergir, haverá campos de pressões adicionais idênticos na face superior e na face inferior do cubo.

Exemplo: Barragem

A Figura 36a mostra a seção transversal de uma barragem de gravidade com altura D , projetada para suportar uma lâmina d'água de altura h (2014). Sabe-se que não há infiltração de água entre o solo e a barragem e o coeficiente de atrito nessa interface é μ . São dados os pesos por unidade de volume da água, γ_A , e do material da barragem γ_B . A largura da barragem é L (perpendicular ao plano da figura). Determinar o mínimo valor que deve ter a dimensão a da barragem para que ela não escorregue, sabendo que o coeficiente de atrito entre a barragem e o solo é μ ; e o mínimo valor que deve ter a dimensão a da barragem para que ela não tombe.

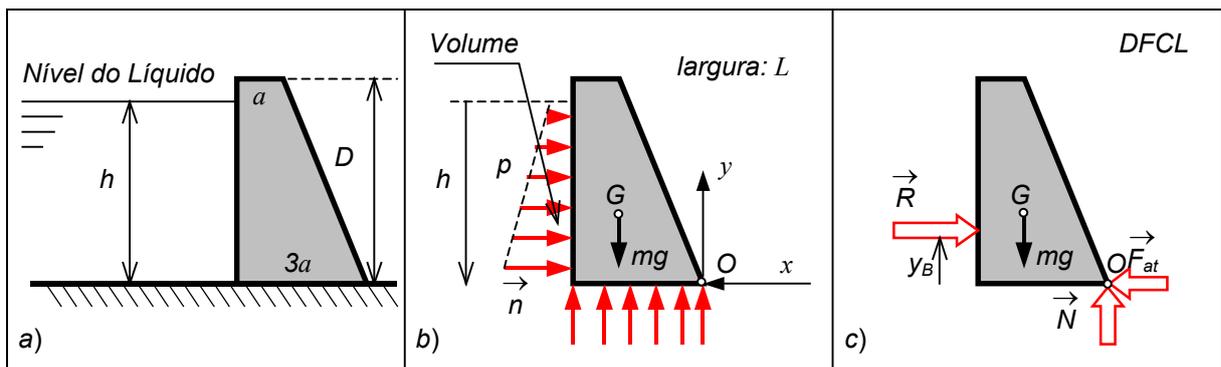


Figura 36 – Barragem

Resolução: Sistema: barragem; Diagrama de Pressões e DFCL; Referencial e Pólo Oxy ; Teoremas: Centro de Massa, Resultante do Volume das Pressões hidrostáticas, Equilíbrio Estático.

a) a posição do centro de massa da barragem em relação ao sistema Oxy indicado na Figura 36b;

$$x_G = \frac{(aD(2a + a/2) + (2aD/2)(2 \cdot 2a/3))}{(aD + 2aD/2)} = \frac{23}{12}a$$

$$y_G = \frac{(aD(D/2) + (2aD/2)(D/3))}{(aD + 2aD/2)} = \frac{5}{12}D$$

b) a Resultante das pressões hidrostáticas sobre a barragem conforme a Figura 36c;

$$\vec{R} = V \vec{n} = p \cdot Area = \gamma_A \cdot h(hL)/2 = \gamma_A \cdot h^2 L / 2$$

c) a posição do baricentro dessas pressões, em relação ao sistema Oxy indicado;

$$x_B = 3a \quad ; \quad y_B = h/3$$

d) o mínimo valor que deve ter a dimensão a da barragem para que ela não escorregue, sabendo que o coeficiente de atrito entre a barragem e o solo é μ . Para essa condição $\vec{R} \leq \vec{F}_{at}$ sendo o peso da barragem $P = mg = \gamma_B 2aDL$:

$$|\vec{R}| \leq \mu P \Rightarrow \gamma_A h^2 L / 2 \leq \mu \cdot \gamma_B 2aDL \Rightarrow a_{\min} = \frac{\gamma_A}{\gamma_B} \frac{h^2}{4\mu D}$$

e) o mínimo valor que deve ter a dimensão a da barragem para que ela não tombe. Neste caso a reação normal será aplicada no ponto O . Para não tombar o momento do peso próprio da barragem deve ser maior ou igual ao momento da resultante da pressão hidrostática. Assim, tomando o momento em relação ao pólo O , obtêm-se:

$$\vec{M}_O = (x_G mg) - (y_B R) \Rightarrow \left(\frac{23}{12} a \right) \cdot (\gamma_B 2aDL) \geq \left(\frac{h}{3} \right) \cdot (\gamma_A h^2 L / 2) \Rightarrow a_{\min} = \sqrt{\frac{\gamma_A}{\gamma_B} \frac{h^3}{23D}}$$

10. ATRITO

Observações experimentais constataam que um corpo em repouso apoiado sobre um plano submetido a uma força tangencial aplicada \vec{F} (ou momento \vec{M}), permanecerá imóvel até a força (ou momento) atingir um valor limite a partir da qual o corpo inicia seu movimento. No plano de contato o movimento pode ser de translação com direção determinada, de rotação com eixo alinhado com o plano ou pivotamento quando o eixo de rotação é perpendicular ao plano. Desta forma classifica-se os tipos de movimento como:

- Movimento de Escorregamento;
- Movimento de Rolamento;
- Movimento de Pivotamento.

Para cada caso de tendência ao movimento uma relação específica é identificada e relatada a seguir.

10.1. Atrito de Escorregamento

Quando o corpo em repouso apoiado sobre o plano for submetido a uma força tangencial aplicada \vec{F} com direção definida, haverá uma força de retenção na direção oposta que impede o movimento (princípio da ação e reação – 3ª Lei de *Newton*). Tal força é chamada de força de atrito F_{at} . Uma relação linear entre a força ativa e a força de atrito é observada, conforme apresentado na Figura 37. Note entretanto que a relação linear ocorre apenas até o limite de aderência a partir do qual o movimento se inicia e a força tende a ficar constante.

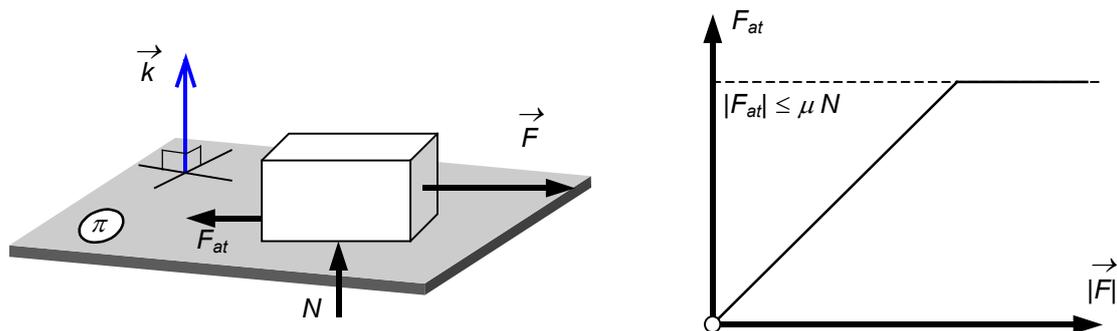


Figura 37 – Relação entre a força ativa e a força de atrito

Conforme proposto por *Coulomb* (1736-1806) a força de atrito não ultrapassa um valor proporcional a força normal N de contato de forma que:

$$|F_{at}| \leq \mu N \quad (62)$$

O escalar μ é chamado de coeficiente de atrito estático, sendo função da rugosidade superficial e das características dos materiais dos corpos envolvidos. Em escala macroscópica o atrito é dito seco se as superfícies não forem lubrificadas. Na iminência do movimento a força de atrito F_{at} atinge seu limite máximo a partir do qual o movimento de deslizamento se inicia:

$$|F_{at}| = \mu N \quad (63)$$

Se houver contaminação ou lubrificação das superfícies o valor do coeficiente de atrito se reduz. Para movimento com escorregamento intenso há possibilidade formação de substrato de auto contaminação e o coeficiente de atrito também diminui (coeficiente de atrito dinâmico - μ_D).

Cone de atrito – Para uma reação normal N , o valor máximo da forças de atrito é μN . Isso significa que se a força aplicada \vec{F} for interior ao cone (abertura $\theta = \arctan \mu$) conforme ilustrado na Figura 38, não haverá escorregamento ($|F_{at}| \leq \mu \cdot N$).

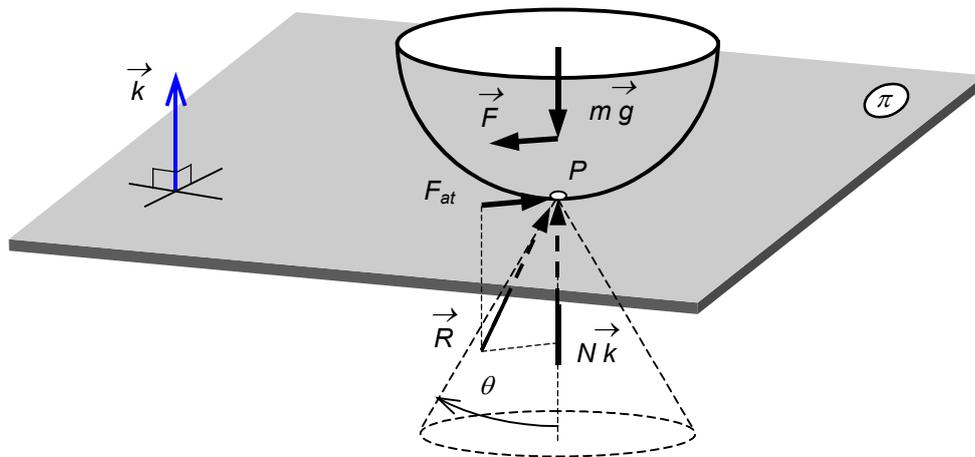


Figura 38 – Cone de atrito

Plano inclinado – o valor máximo de inclinação de um plano para o que um corpo não escorregue para baixo é dado por: $\alpha_{\text{MAX}} = \arctan \mu$.

10.2. Momento de Atrito de Rolamento

Quando um cilindro é propulso a rolar sobre uma superfície, surge um binário reativo cujo momento se opõe à tendência ao movimento de rotação. Este binário chama-se de binário de atrito de rolamento M_{atr} . Considere um disco submetido a uma força F que tenta induzir o rolamento sobre uma superfície plana, conforme ilustrado na Figura 39a. A explicação física do aparecimento do binário restritivo supõe que a superfície de apoio se deforme, de maneira que o ponto de contato C se dá a uma distância ρ a frente do ponto que seria de contato se a superfície não se deformasse, conforme ilustrado na Figura 39b (Giacaglia, 1982). Neste caso o coeficiente de atrito de rolamento é definido como uma distância ρ . Note que no caso real, mesmo materiais duros (por exemplo: roda de aço do metrô) haverá sempre uma deformação mesmo que muito pequena.

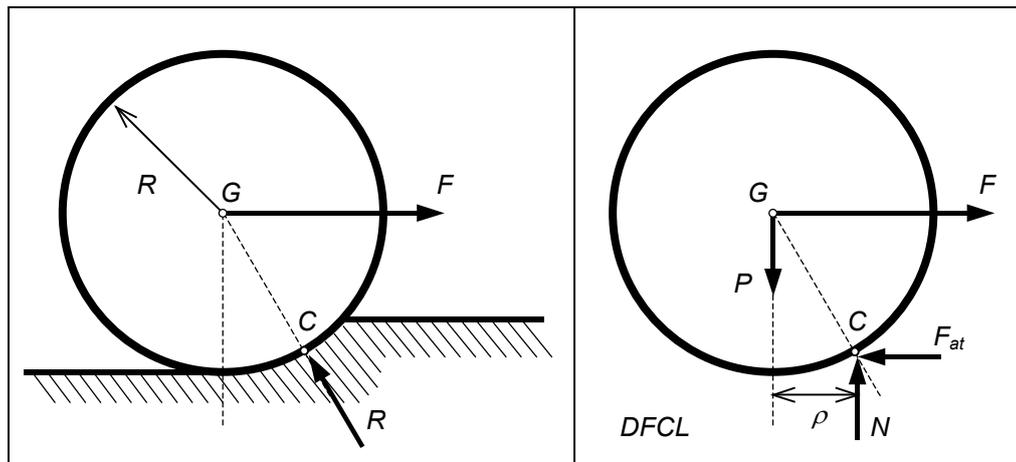


Figura 39 – Atrito de Rolamento

Antes de iniciar o movimento, verifica-se pelas fórmulas de equilíbrio ($\vec{R} = 0$ e $\vec{M}_C = 0$), utilizando o diagrama de forças sobre o corpo livre, conforme ilustrado na Figura 39b, verifica-se que:

$$\begin{cases} F - F_{at} = 0 \\ P - N = 0 \\ M_C = (-R \cdot F) + (\rho \cdot P) \cong 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{at} = F \\ N = P \\ R \cdot F = \rho \cdot P \end{cases} \quad (64)$$

Portanto quando há tendência ao rolamento, devido ao momento ativo externo ($R \cdot F$) haverá uma resistência a este movimento caracterizado por um momento de atrito de rolamento M_{atr} tal que:

$$|M_{atr}| \leq \rho N \quad (65)$$

Na iminência do movimento o momento de atrito de rolamento M_{atr} atinge seu limite máximo a partir do qual o movimento de rolamento se inicia:

$$|M_{atr}| = \rho N \quad (66)$$

Exemplo: Disco Sobre Plano

Considere um disco de raio R e peso P , apoiado sobre um plano com inclinação α , conforme ilustrado na Figura 40a. Qual o máximo valor de α compatível com o equilíbrio (Giacaglia, 1982). Considere os coeficiente de atrito de escorregamento μ e coeficiente de atrito de rolamento ρ .

Resolução: a) **Sistema:** Disco de raio R e peso P ; b) **DFCL;** c) **Referencial:** Cxy ; d) **Teoremas:** para a condição estática tem-se: $\sum \vec{F}_i = \vec{0}$; $\vec{M}_C = \vec{0}$; $|F_{at}| \leq \mu \cdot N$ e $|M_{atr}| \leq \rho \cdot N$

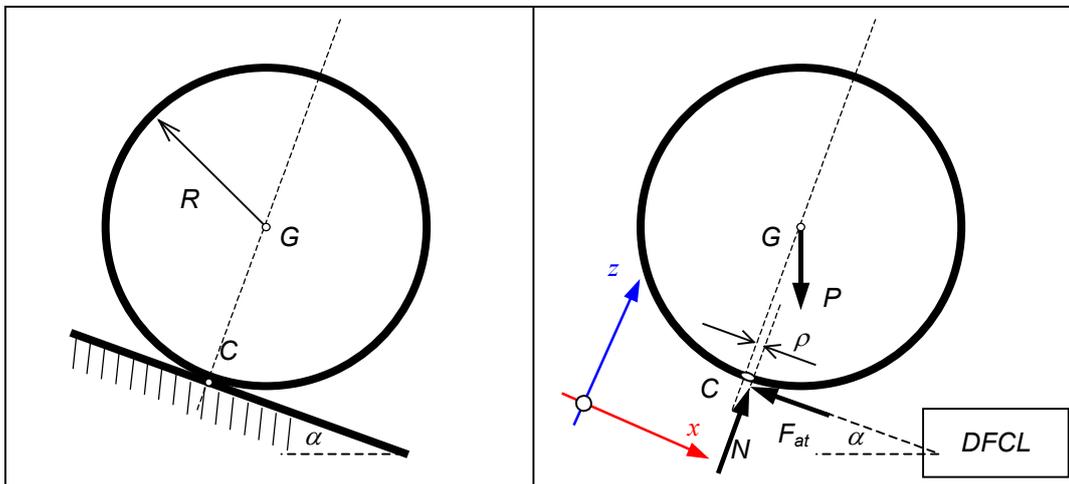


Figura 40 – Disco no Plano Inclinado

As forças externas aplicadas ao disco em equilíbrio são obtidas do **DFCL**, ilustrado na Figura 40b, incluindo a força de atrito F_{at} aplicada no ponto C e momento de atrito de rolamento $M_{atr} = \rho N$ aplicado no disco devido ao afastamento ρ da aplicação da força normal N , resultando nas seguintes equações estáticas para o problema plano:

$$\begin{cases} P \sin \alpha - F_{at} = 0 \\ P \cos \alpha - N = 0 \\ M_C = -R \cdot P \sin \alpha + \rho N = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P \sin \alpha = F_{at} \\ P = N / \cos \alpha \\ R P \sin \alpha = \rho N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan \alpha = \frac{F_{at}}{N} \leq \mu \\ \tan \alpha \leq \frac{\rho}{R} \end{cases}$$

Logo tem-se que o ângulo de inclinação máximo do plano será o mínimo entre os valores obtidos: $\boxed{\tan \alpha = \min(\mu, \rho / R)}$

10.3. Momento de Atrito de Pivotamento

De maneira genérica, dois corpos convexos em contato elástico com tendência ao movimento relativo angular devido a forçamentos ativos, desenvolvem forças e momentos reativos de contato aplicadas mutuamente na superfície comum de contato. Sendo os corpos convexos, haverá um plano tangente π no ponto de contato. Quando o corpo é propulso a pivotar sobre um superfície do outro, surge um binário cujo momento se opõe à tendência ao movimento de pivotamento. Este binário chama-se de binário de atrito de pivotamento \vec{M}_{atp} . Esta hipótese é baseado na existência de uma área de contato do corpo elástico deformado onde há distribuição da força ativa normal de contato e reações tangenciais de atrito formando binário.

Quando um corpo tende a girar em direção definida $\omega_z \vec{k}$, conforme ilustrado na Figura 41 ocorre o binário de atrito de pivotamento $\vec{M}_{atp} = M_{atp} \vec{k}$. Este valor é obtido pela integração das forças tangenciais que se opõem à tendência ao pivotamento (França, 2011) resultando em:

$$|M_{atp}| \leq \frac{2R \cdot \mu}{3} N \quad (67)$$

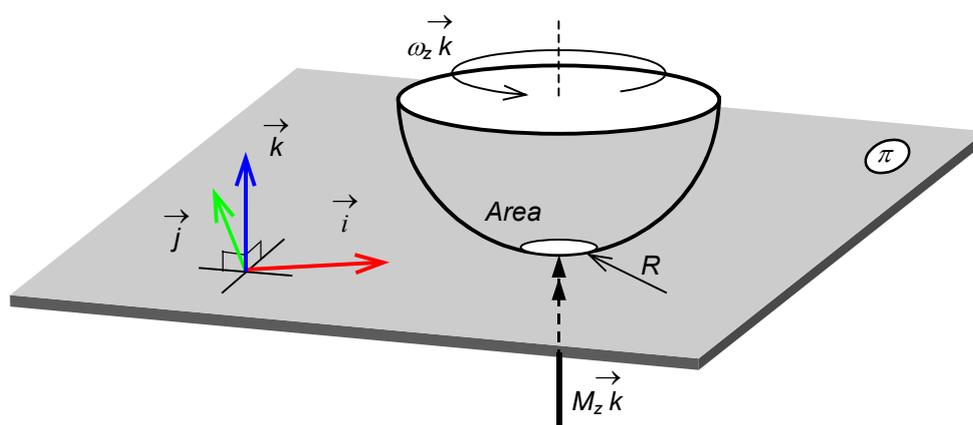


Figura 41 – Atrito de Pivotamento

De maneira similar aos casos anteriores, na iminência do movimento o momento de atrito de pivotamento M_{atp} atinge seu limite máximo a partir do qual o movimento angular de pivotamento se inicia:

$$|M_{atp}| = \frac{2R \cdot \mu}{3} N \quad (68)$$

Exemplo: Bloco Deslizando ou Tombando

O bloco homogêneo de peso P e largura $2a$ está em repouso sobre um plano horizontal, conforme ilustrado na Figura 42a. Calcular a máxima força horizontal aplicada na altura h , compatível com o equilíbrio do bloco (França, 2011).

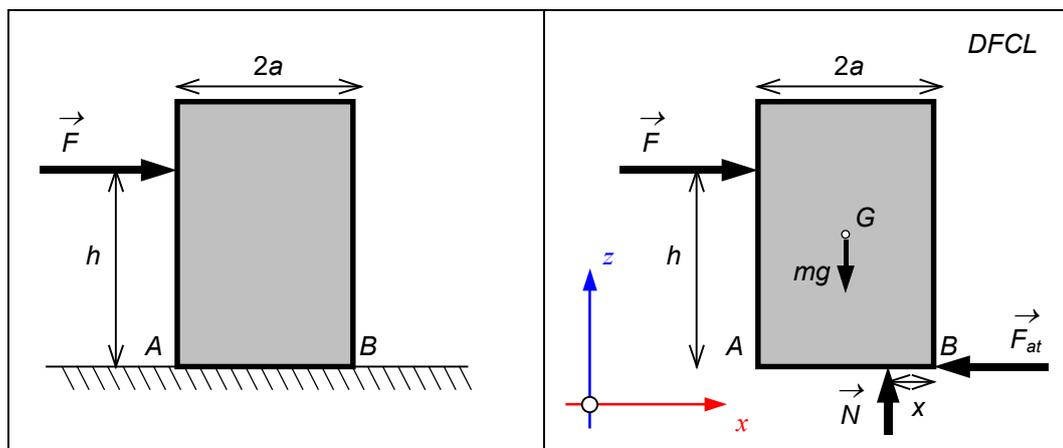


Figura 42 – Bloco Deslizando ou Tombando

Resolução: a) **Sistema:** bloco; b) **Diagramas:** *DFCL*, *DVC*; c) **Referencial:** Oxz e pólo em B ; d)

Teoremas: $|F_{at}| \leq \mu N$. Na iminência do movimento (sistema estático) valem: $\vec{R} = \sum \vec{F}_i = 0$; e

$\vec{M}_G = \sum (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = 0$ e $|F_{at}| \leq \mu N$. Analisando o *DFCL* da Figura 42b e considerando o pólo em B , constata-se no equilíbrio estático que:

$$\begin{cases} F - F_{at} = 0 \\ N - mg = 0 \\ M_B = -h \cdot F + a \cdot mg - x \cdot N = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F = F_{at} \\ N = mg \\ h \cdot F = a \cdot mg \end{cases}$$

Da primeira equação considerando a iminência da tendência ao deslizamento, obtêm-se: $F \leq \mu mg$. Da equação de momento, considerando a tendência ao tombamento, a reação normal N do plano sobre o bloco resulta aplicada na extremidade tal que $x = 0$, obtêm-se: $F_{\max} = mg / h$. Portanto a valor da força máxima na iminência do movimento será o mínimo entre os dois casos: $F_{\max} = \min(mg / h, \mu mg)$

Exemplo: Carretel

Considere um carretel com raio interno menor r , rolando sobre uma guia AB , conforme ilustrado na Figura 43a. O carretel está submetido a uma força (\vec{F}, E) no fio ideal, que se enrola na parte externa do carretel de raio R , a partir de D . Considerando o coeficiente de atrito suficiente para não escorregar ($R > r$) determinar para qual lado ocorre o movimento?

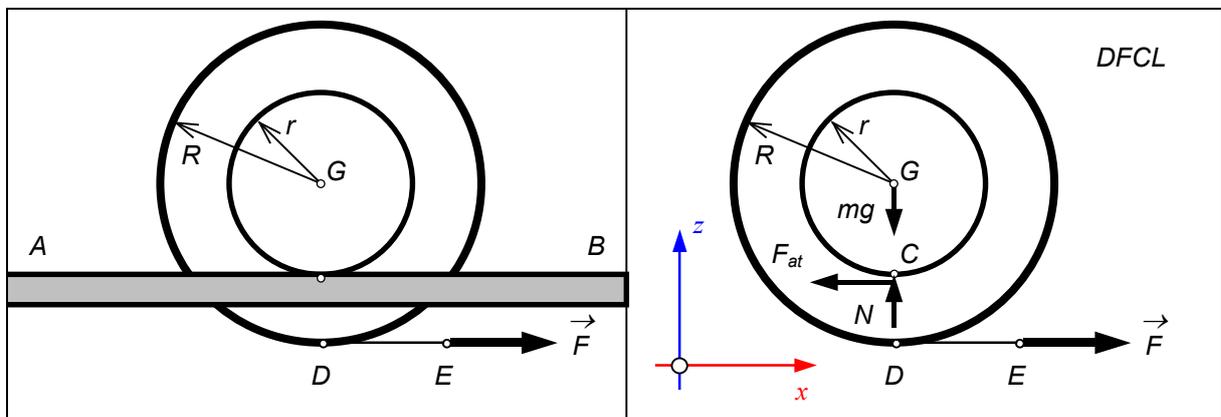


Figura 43 – Carretel submetido a Força

RESOLUÇÃO: a) **Sistema:** carretel; b) **Diagramas:** DFCL, DVC; c) **Referencial:** Oxz e Pólo em G; d) **Teoremas:** $|F_{at}| \leq \mu N$. Na iminência do movimento (sistema estático) valem: $\vec{R} = \sum \vec{F}_i = 0$; $\vec{M}_G = \sum (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = 0$ e $|F_{at}| = \mu N$.

As forças externas aplicadas ao carretel em equilíbrio são obtidas do *DFCL*, ilustrado na Figura 43b, resultam na seguintes equações:

$$\begin{cases} F - F_{at} = 0 \\ N - mg = 0 \\ M_G = R \cdot F - r \cdot F_{at} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F = F_{at} \\ N = mg \\ R \cdot F - r \cdot F_{at} = 0 \end{cases}$$

Considerando que não há escorregamento $F = F_{at}$ e sendo ($R > r$) a equação de momento terá valor positivo portanto tendência à rotação anti-horária ou movimento do carretel para esquerda, rolando em torno do ponto C de contato.

10.4. Direção da Força de Atrito

A direção da força de atrito é sempre contrária à direção da tendência ao movimento (V_{Cx}) e portanto pode ser determinada pelo diagrama de força do corpo livre, conforme ilustrado na Figura 44. O corpo pode estar submetido a uma força (\vec{F}, G) conforme ilustrado na Figura 44a ou um momento de binário \vec{M} (ver Figura 44b) ou ambos. Para cada caso de combinação de forçamentos obtêm-se uma direção específica para a força de atrito:

$$\begin{cases} F_x > 0 \text{ e } \vec{M} = 0 \Rightarrow V_{Cx} > 0 \Rightarrow F_{at} < 0 \\ F_x = 0 \text{ e } \vec{M} < 0 \Rightarrow V_{Cx} < 0 \Rightarrow F_{at} > 0 \end{cases} \quad (69)$$

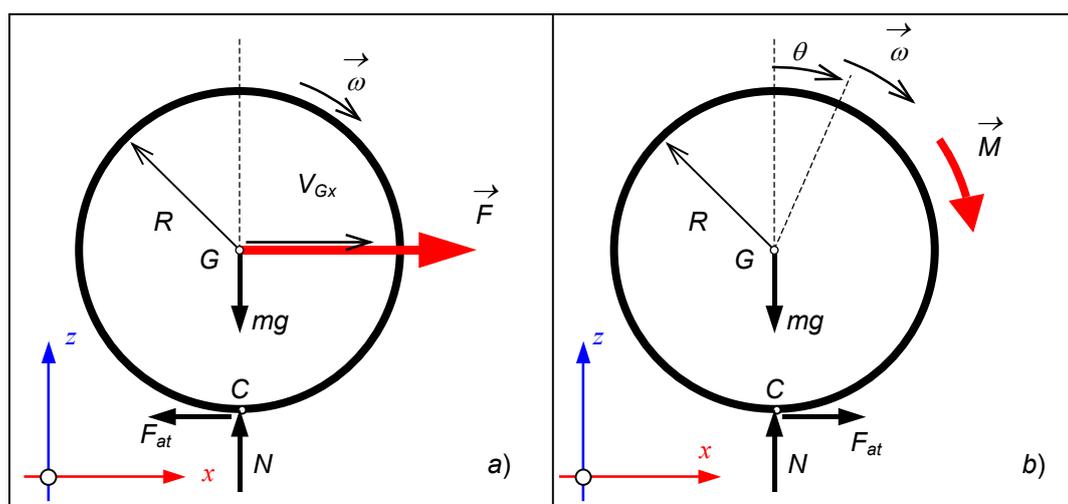


Figura 44 – Direção da Força de Atrito

Quando o corpo está submetida **simultaneamente** à força ativa externa (\vec{F}, G) e o momento de binário \vec{M} , valem as seguintes relações:

$$\begin{cases} F_x > M/r \Rightarrow V_{Cx} > 0 \Rightarrow F_{at} < 0 \\ F_x < M/r \Rightarrow V_{Cx} < 0 \Rightarrow F_{at} > 0 \\ F_x = M/r \Rightarrow V_{Cx} = 0 \Rightarrow F_{at} = 0 \end{cases} \quad (70)$$

11. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- a) França, L. N. F., Matsumura, A. Z. (2011) Mecânica Geral. Editora Blücher, 3ª edição, São Paulo, p. 235.
- b) Boulos, P. Camargo, I. (1997) Introdução à Geometria Analítica no Espaço. Editora Pearson Educacional. p. 239.
- c) Giacaglia, G. E. O. (1982) Mecânica Geral. Editora Campus. p. 375.

12. Anexo A – Notação Vetorial

Existem grandezas físicas que tem intensidade e podem ser descritas por um único valor, por exemplo 70 kg de massa. Estas grandezas são denominadas grandezas **ESCALARES**. Por outro lado existem grandezas com intensidade, direção e sentido. Estas grandezas são denominadas grandezas **VETORIAIS**, como por exemplo uma força.

12.1. Vetor

Dois pontos A e B com posições definidas formam a reta $(B - A)$ que tem direção e magnitude, conforme ilustrado na Figura 45. Tal reta constitui um vetor \vec{r} descrito como:

$$(B - A) = \vec{r} = +\lambda \cdot \vec{u} \quad (71)$$

onde \vec{u} é o vetor unitário (chamado de **versor**) que caracteriza a direção da reta $(B - A)$, λ é a magnitude ou comprimento da reta e o sinal “+” caracteriza o sentido do vetor \vec{r} .

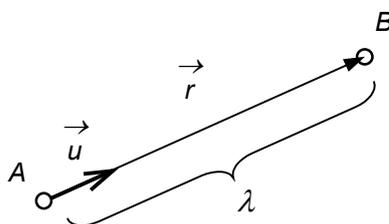


Figura 45 – Pontos A e B formando um Vetor

12.2. Reta

Uma reta \vec{r} é definida a partir de um ponto A com direção definida \vec{u} . Qualquer ponto B pertencente a esta reta é identificado pela seguinte equação:

$$B = A + \lambda \cdot \vec{u} \quad (72)$$

onde λ é um escalar $\in \mathfrak{R}$, dado por $\lambda = |\vec{r}|$ com magnitude $\|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ na direção unitária do versor $\vec{u} = \vec{r}/|\vec{r}|$.

12.3. Plano

Um plano π é definido por uma reta \vec{r} (dois pontos A e B) e um ponto adicional (C) conforme ilustrado na Figura 46. Tomando as duas retas concorrentes o plano π tem orientação definida pelo produto vetorial:

$$\rho \vec{k} = (B - A) \wedge (C - A) = \vec{r} \wedge \vec{v} \quad (73)$$

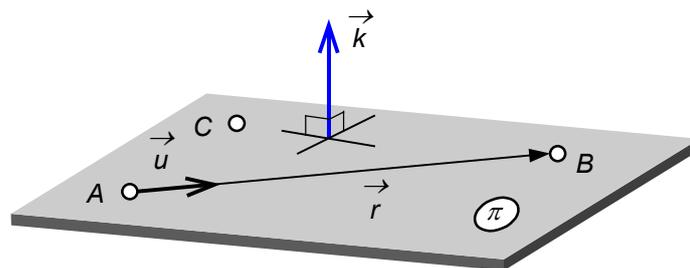


Figura 46 – Descrição de um Plano

Por uma reta passam infinitos planos. Dois segmentos de retas podem ser:

- Concorrentes (formam um plano e se cruzam em ponto definido);

- Paralelos (formam um plano mas não se cruzam);
- Reversos (não formam um plano e não se cruzam).

12.4. Versores

Considere o sistema de coordenadas $Oxyz$, com eixos ortogonais independentes, ilustrado na Figura 47. A orientação de cada eixo x , y e z do sistema de coordenadas cartesiano é identificado por vetores unitários chamados de **VERSORES**. Utiliza-se a seguinte notação de versores unitários \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} conforme ilustrado na Figura 47.

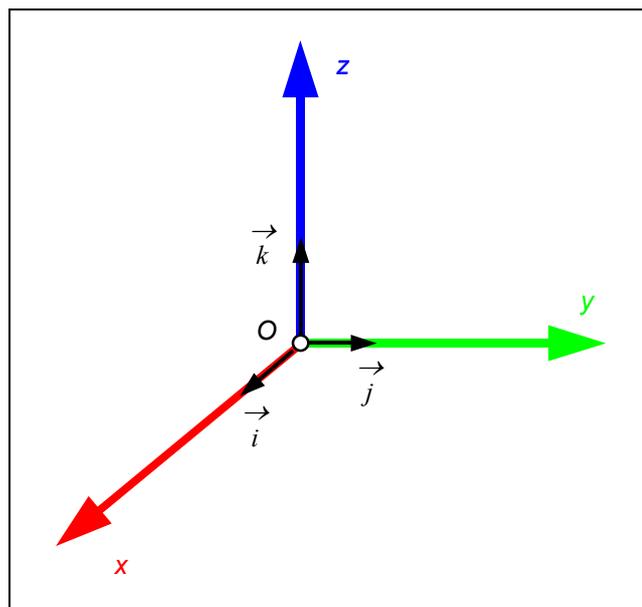


Figura 47 – Sistema de Coordenadas e Versores

Vetores que representam no espaço \mathcal{R}^3 podem ser:

- PARALELOS;
- CONCORRENTES;
- REVERSOS.

12.5. Representação Vetorial

A representação de um vetor está associado ao sistema de coordenadas adotado. Considere o sistema de coordenadas $Oxyz$, cartesiano no espaço \mathfrak{R}^3 , orientados segundo a base de versores unitários \vec{i}, \vec{j} e \vec{k} independentes. O vetor \vec{r} que caracteriza a posição do ponto P no espaço \mathfrak{R}^3 é representado nesta base por três escalares (x, y, z) sendo respectivamente um em cada direção, conforme apresentado na Figura 48:

$$(P-O) = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{ou} \quad \vec{r} = (x, y, z) = \{x \ y \ z\}^T \quad (74)$$

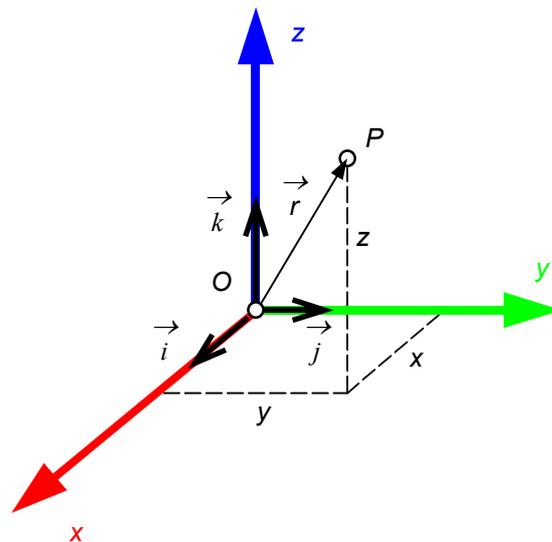


Figura 48 – Representação de Vetor

outras formas de representação podem ser utilizadas. Por exemplo espessar o vetor na forma matricial (que considera implicitamente uma determinada base) ou em outra base:

$$(P-O) = (x, y, z)^T = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad (P-O) = \vec{r} = e_x \vec{E}_1 + e_y \vec{E}_2 + e_z \vec{E}_3 \quad (75)$$

O **MAGNITUDE** do vetor, que corresponde ao seu comprimento, é obtido por sua norma:

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (76)$$

Note que o norma ou módulo do vetor $\|\vec{r}\|$ é invariante e independente da base que o descreve.

12.6. Rotação de Base

Se o vetor posição \vec{r} for expresso em outra base, apenas suas componentes se alteram (o módulo permanece inalterado). Considerando por simplicidade apenas um movimento plano, na base Ee_1e_2 e na base Oxy rotacionada do ângulo θ . Pode-se expressar a posição do ponto P como:

$$\vec{r}_E = |\vec{r}|(\cos \phi \vec{e}_1 + \sin \phi \vec{e}_2) \Rightarrow (P-O)_{xy} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = |\vec{r}|(\cos(\phi - \theta)\vec{i} + \sin(\phi - \theta)\vec{j}) \quad (77)$$

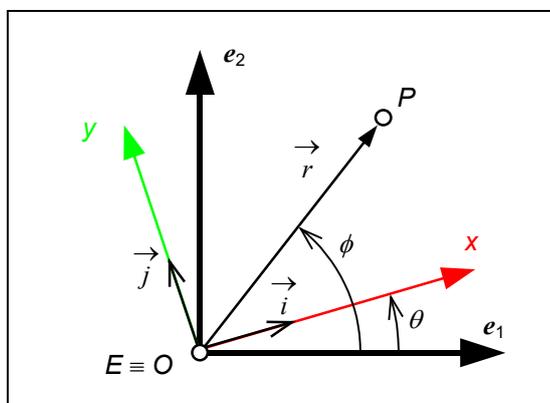


Figura 49 – Rotação de Base

Observe que as coordenadas em cada base são distintas para o mesmo vetor. Representa-se a conversão dos versores das bases na forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{Bmatrix} \quad (78)$$

12.7. Produto Escalar

Na geometria analítica o **PRODUTO ESCALAR** de dois vetores \vec{u} e \vec{v} , é um escalar que corresponde a projeção de um vetor sobre o outro, sendo obtido por:

$$\begin{aligned}\vec{u} &= u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k} \quad \text{e} \quad \vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \quad \Rightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^3 u_i v_i \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha\end{aligned}\tag{79}$$

onde α é o ângulo formado entre os dois vetores.

12.8. Produto Vetorial

O **PRODUTO VETORIAL** dos vetores \vec{u} e \vec{v} , nesta ordem, é o vetor único $\vec{u} \wedge \vec{v} \in \mathfrak{R}^3$ (Carmo, 1976) caracterizado por:

$$\vec{w} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \det(w, u, v)\tag{80}$$

para qualquer sistema de coordenadas unitário $\vec{w} \in \mathfrak{R}^3$. O determinante $\det(w, u, v)$ significa que se expressa na base natural $\{e_i\}$ no \mathfrak{R}^3 onde: $i = 1, 2$ e 3 .

$$\begin{aligned}\vec{w} &= \sum_{i=1}^3 w_i \cdot e_i \quad ; \quad \vec{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \cdot e_i \quad \text{e} \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \cdot e_i \\ \det(w, u, v) &= \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ \vec{u} \wedge \vec{v} &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} e_3\end{aligned}\tag{81}$$

onde: $\vec{w} = w_1 \vec{e}_1 + w_2 \vec{e}_2 + w_3 \vec{e}_3$ é uma base unitária: $w_1 = w_2 = w_3 = 1$.

Propriedades:

- a) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \times \vec{v}$ (produto vetorial ou cruzado);
 b) $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ (ordem dos termos afeta o produto);
 c) $(a\vec{u} + b\vec{w}) \wedge \vec{v} = a\vec{u} \wedge \vec{v} + b\vec{w} \wedge \vec{v}$ (propriedade distributiva);
 d) $\vec{u} \wedge \vec{v} = 0$ (somente se \vec{u} e \vec{v} forem linearmente dependentes - alinhados);
 e) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u} = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$ (pois $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{u}) \wedge (\vec{v} \cdot \vec{u}) = 0$ pois são paralelos);

Decorre de e) que o produto vetorial não nulo é normal ao plano gerado por \vec{u} e \vec{v} . O produto vetorial tem modulo idêntico à área do paralelogramo formado pelos dois vetores \vec{u} e \vec{v} e tem direção perpendicular ao plano formado por eles, sendo obtido por:

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= (u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{k} \\ |\vec{u} \wedge \vec{v}| &= |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen } \alpha \end{aligned} \quad (82)$$

onde α é o ângulo formado entre os dois vetores.

Finalmente se os vetores $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ e $v(t) = (v_1(t), v_2(t), v_3(t))$ variáveis no tempo, são diferenciáveis no intervalo (a, b) do \mathfrak{R}^3 , com $t \in (a, b)$ decorre que:

$$\frac{d}{dt}(\vec{u}(t) \wedge \vec{v}(t)) = \frac{d\vec{u}}{dt} \wedge \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (83)$$

REGRA DA MÃO DIREITA: O produto vetorial pode ser apreciado no espaço e realizado de forma facilitada utilizando a regra da mão direita, conforme ilustrado na Figura 50.

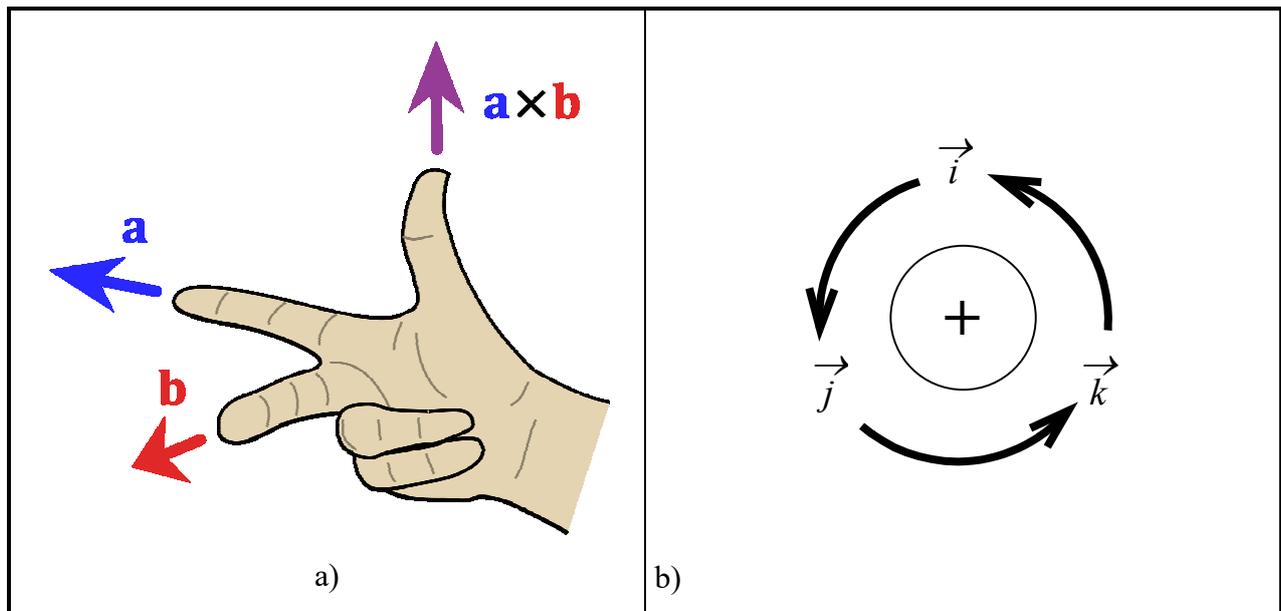


Figura 50 – Regra da Mão Direita

Note que o produto vetorial é um vetor perpendicular ao plano formado pelos outros dois vetores, conforme ilustrado na Figura 50a. Deste forma tem-se que o produto vetorial dos versores ortogonais $a\vec{i} \wedge b\vec{j} = ab\vec{k}$ (veja na Figura 50a) resultando o sentido anti-horário como positivo conforme ilustrado na Figura 50b. Utilizando novamente o determinante confirma-se que:

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k} - 0\vec{i} - 0\vec{j} - 0\vec{k} = \vec{k} \quad \text{e} \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \quad \text{e} \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \quad (84)$$

O **PRODUTO MISTO** de três vetores \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} é um escalar que corresponde ao volume do paralelepípedo com área da base formada pelo produto vetorial (termos entre parêntesis) vezes a altura (produto escalar):

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{a}) \quad (85)$$

A sequência dos vetores pode ser permutada e basta que dois vetores sejam alinhados (produto vetorial nulo) para que o produto misto seja nulo.

DUPLO PRODUTO VETORIAL

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \quad (86)$$

Note que o produto vetorial $(\vec{b} \wedge \vec{c})$ será um vetor perpendicular ao plano formado por eles. Ou seja, não terá componentes na direção deste plano. Portanto o produto vetorial $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$ não terá componentes na direção de \vec{a} , conforme o lado direito da equação.

Na forma matricial:

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) \Rightarrow [\vec{a}] [\vec{a}] \{c\} \quad (87)$$