

MAT 0147: Cálculo II Economia (noturno)

Guia 1: Vetores, produto interno, aplicações lineares

Prof. M Alexandrino (IME-USP)

2023

Alerta: Este é apenas um guia resumido de parte das transparências das aulas. Ele não substitui as aulas (onde existem discussões, resoluções de exercícios, figuras, etc) e não substitui a leitura da bibliografia recomendada. Figuras foram produzidas com o GeoGebra <http://www.geogebra.org>

Motivação: Estabelecer ferramentas necessárias para entender vetores consumo, descrever vínculos orçamentarios, além de aplicações lineares (uteis para entender, derivadas e.g, da aplicação demanda, função utilidade, função produção etc)

Objetivo:

- (▶ 1) Espaços Euclidianos, vetores e sistemas lineares
- (▶ 2) Matrizes, vetores e aplicações lineares
- (▶ 3) Produto interno
- (▶ 4) Reta em \mathbb{R}^2 e distância
- (▶ 5) Planos em \mathbb{R}^3 e distância
- (▶ 6) Subespaços vetoriais e aplicações lineares

Espaços Euclidianos, vetores e sistemas lineares

$$\mathbb{R}^2 := \{(x_1, x_2) = x, |x_i \in \mathbb{R}\}$$

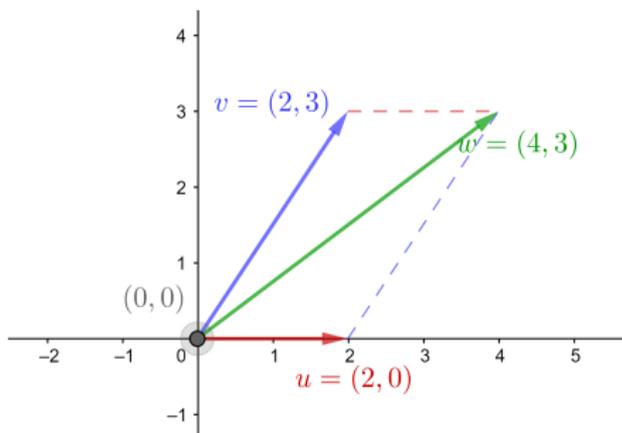
$$\mathbb{R}^3 := \{(x_1, x_2, x_3) = x, |x_i \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^m := \{(x_1, x_2, \dots, x_m) = x, |x_i \in \mathbb{R}\}$$

Sejam $u, v \in \mathbb{R}^m$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Multiplicação por escalar: $\lambda u = (\lambda u_1, \dots, \lambda u_m)$

Soma de vetores: $w = u + v := (u_1 + v_1, \dots, u_m + v_m)$



Obs: Qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^m$ podem ser descrito como **combinação linear** da base canônicas $\{e_i = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)\}$, ou seja $v = \sum_i v_i e_i$ com $v_i \in \mathbb{R}$.

Ex:

$$\begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Problema 1

Escreva o vetor $(7, -1)$ como soma de dois vetores, um paralelo ao vetor $u = (1, 1)$ e outro paralelo ao vetor $v = (1, -1)$.

Obs: O vetor $(7, -1)$ não pode ser descrito **somente** em termos de $u = (1, 0)$ e $v = (2, 0)$

Obs: O vetor $(7, -1)$ não é **unicamente** descrito como combinações dos vetores $u = (1, 0)$ e $v = (0, 1)$ e $w = (1, 1)$. (u, v, w são linearmente dependentes).

Observe que: **qualquer** vetor em \mathbb{R}^2 pode ser descrito **unicamente** pela base $\{u, v\}$

Ex 1 $\{u = (1, 0), v = (0, 1)\}$

ou

Ex 2 $\{u = (1, 1), v = (1, -1)\}$.

Definição 2

um conjunto de vetores $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m\}$ em \mathbb{R}^m é chamado **base** de \mathbb{R}^m se

- ▶ suas combinações lineares **geram qualquer vetor** em \mathbb{R}^m
- ▶ de uma **única** forma (i.e, são **linearmente independentes**) .

Problema 3

Descreva $c = (5, -2, 9)$ em termos de combinação linear de $\{u = (2, 4, -2), v = (1, -6, 7), w = (1, 0, 2)\}$

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rclcl} 2x_1 & +1x_2 & +1x_3 & = & 5 \\ 4x_1 & -6x_2 & +0x_3 & = & -2 \\ -2x_1 & +7x_2 & +2x_3 & = & 9 \end{array}$$

Sol: Eliminação de Gauss

Passo 1: Eq (1) com a Eq(2)

$$\begin{array}{rclcrcl} 2x_1 & +1x_2 & +1x_3 & = & 5 \\ 4x_1 & -6x_2 & +0x_3 & = & -2 \\ -2x_1 & +7x_2 & +2x_3 & = & 9 \end{array}$$

Seja $l_{21} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = 2$, então $-l_{21} \times \text{Eq}(1) + \text{Eq}(2) = (N2)$

$$\begin{array}{rclcrcl} 2x_1 & +1x_2 & +1x_3 & = & 5 \\ 0x_1 & -8x_2 & -2x_3 & = & -12 \\ -2x_1 & +7x_2 & +2x_3 & = & 9 \end{array}$$

Passo 2: Eq(1) com a Eq (3)

$$\begin{array}{rclcl} 2x_1 & +1x_2 & +1x_3 & = & 5 \\ 0 & -8x_2 & -2x_3 & = & -12 \\ -2x_1 & +7x_2 & +2x_3 & = & 9 \end{array}$$

Seja $l_{31} = \frac{a_{13}}{a_{11}} = -1$, então $-l_{31} \times \text{Eq}(1) + \text{Eq}(3) = (N3)$

$$\begin{array}{rclcl} 2x_1 & +1x_2 & +1x_3 & = & 5 \\ 0 & -8x_2 & -2x_3 & = & -12 \\ 0x_1 & +8x_2 & +3x_3 & = & 14 \end{array}$$

Passo 3: Eq (2) com a Eq (3)

$$\begin{array}{rclcrcl} 2x_1 & +1x_2 & +1x_3 & = & 5 \\ 0 & -8x_2 & -2x_3 & = & -12 \\ 0 & +8x_2 & +3x_3 & = & 14 \end{array}$$

Seja $l_{32} = \frac{a_{23}}{a_{22}} = -1$, então $-l_{32} \times \text{Eq}(2) + \text{Eq}(3) = (N3)$

$$\begin{array}{rclcrcl} 2x_1 & +1x_2 & +1x_3 & = & 5 \\ 0 & -8x_2 & -2x_3 & = & -12 \\ 0 & +0x_2 & +x_3 & = & 2 \end{array}$$

Passo 4: Retro-substituição

$$\begin{array}{rclcrcl} 2x_1 & +1x_2 & +1x_3 & = & 5 \\ 0 & -8x_2 & -2x_3 & = & -12 \\ 0 & +0 & +x_3 & = & 2 \end{array}$$

$$x_3 = 2$$

$$x_2 = 1$$

$$x_1 = 1$$

Proposição 4

Dado um conjunto de vetores

$$u = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$$

$$v = (a_{12}, a_{22}, a_{32})$$

$$w = (a_{13}, a_{23}, a_{33})$$

considere o sistema linear homogêneo $Ax = 0$ que tem colunas u , v , w , i.e.,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0$$

Então conjunto de vetores $\{u, v, w\}$ forma uma **base de** \mathbb{R}^3 se e somente se a única solução do sistema $Ax = 0$ for a solução trivial i.e, $x = (0, 0, 0)$.

Comentários: Eliminação de Gauss pode ser aplicada para qualquer sistema linear (eventualmente com permutações). Lembrando que um sistema linear homogêneo $Ax = 0$ sempre tem solução, porém pode ter um número infinito de soluções. A dimensão do espaço de soluções $Ax = 0$ é o número variáveis livres. Dado o sistema escalonado (i.e., passo 4), fixo uma equação, a primeira variável com valor diferente de zero, é chamada **variável pivô** (daquela linha). **As variáveis pivôs sempre são determinadas em termos das variáveis livres.**

Ex: suponha a_{11} e a_{22} diferentes de zero:

$$\begin{array}{rclcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & 0 \\ 0 & & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & 0 \end{array}$$

Então x_3 é **variável livre** (dim do espaço solução $Ax = 0$ é 1) e x_2 e x_1 são variáveis pivos.

$x \in \mathbb{R}^3$ atende $Ax = 0$ se e somente se:

$$\begin{aligned} x &= \left(\frac{1}{a_{11}} \left(-a_{12} \left(\frac{-a_{23}}{a_{22}} \right) - a_{13} \right) x_3, \frac{-a_{23}}{a_{22}} x_3, x_3 \right) \\ &= x_3 \left(\frac{1}{a_{11}} \left(-a_{12} \frac{-a_{23}}{a_{22}} - a_{13} \right), \frac{-a_{23}}{a_{22}}, 1 \right) \end{aligned}$$

Matrizes, vetores e aplicações lineares

Formalmente falando, uma **matriz** A de **tamanho** $n \times m$ é uma função de $\{1 \cdots n\} \times \{1 \cdots m\} \rightarrow \mathbb{R}$. Podemos representar tal função via tabela com 2 índices, $i = 1 \cdots n$ para **linha**, $j = 1 \cdots m$ para **coluna** e escrever $A = [a_{ij}]$

Ex: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ é matriz 3×3 com $a_{2,1} = 4$

Ex: $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -6 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ é matriz 3×2 e $b_{3,2} = 7$

Ex: $\begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}$ é matriz 3×1 . Note que ela pode ser identificada com o vetor $v = (1, -6, 7) \in \mathbb{R}^3$.

Obs: Iremos frequentemente identificar um vetor $v = \sum_i v_i e_i \in \mathbb{R}^m$ (descrito em termos da base canônica) como uma $m \times 1$ matriz (**matriz coluna**) $[a_{i1}]$ com $a_{i1} = v_i$.

Tais como vetores em \mathbb{R}^m , podemos somar matrizes $n \times m$ por matrizes $n \times m$ e podemos multiplicar matriz por número real. Ou seja, se A e B são matrizes $n \times m$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

- ▶ $C = A + B$ onde $[c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$
- ▶ $\lambda C = [\lambda c_{ij}]$

Podemos multiplicar matrizes A e B se elas forem **compatíveis** i.e., sejam:

- ▶ A é matriz $n \times l$
- ▶ B é matriz $l \times m$

Então $C = AB = [c_{ij}]$ é matriz $n \times m$ onde $c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$

Ex: Sejam

$$A = [-1 \quad -1 \quad 1] \text{ matriz } 1 \times 3 \text{ (matriz linha)}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ matriz } 3 \times 1 \text{ (matriz coluna)}$$

Assim $C = AB$ é uma matriz 1×1

$$\begin{aligned} [c_{11}] = AB &= [-1 \quad -1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= (-1)(1) + (-1)(-2) + (1)(1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

obs: No caso geral o coeficiente c_{ij} é a matriz 1×1 resultado do produto da matriz (linha) obtida pela i linha de A com a matriz (coluna) obtida pela j coluna de B

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definição 5

Uma aplicação $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é chamada **aplicação linear** se atende as propriedades:

- ▶ $T(\lambda v) = \lambda T(v)$
- ▶ $T(v + w) = T(v) + T(w)$

Dado uma $n \times m$ matriz A podemos definir uma **aplicação linear** do \mathbb{R}^m para \mathbb{R}^n *via multiplicação de matrizes*, uma vez que vetor $x \in \mathbb{R}^m$ pode ser identificado como uma matriz coluna $m \times 1$.

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^m & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \rightarrow & Ax \end{array}$$

Obs: Por vezes usamos a notação $[T] = A$ e $[T]$ é chamada **representação matricial de T na base canônica**.

Exemplo 6 (Rotação $\theta = \frac{\pi}{4}$)

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

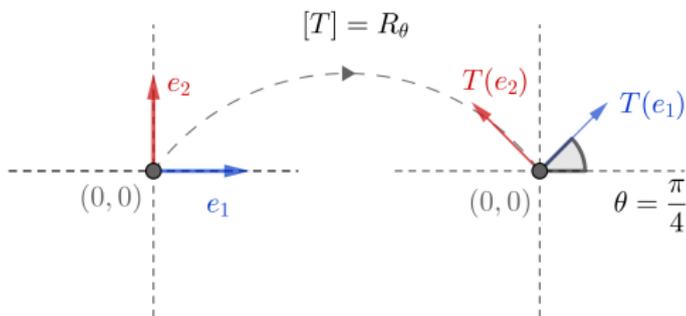
$$\text{Então } T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ será } T(x) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2, \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 \right) \\ &= x_1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &\quad + x_2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{aligned}$$

Obs: A transformação T é uma rotação de $\theta = \frac{\pi}{4}$. Mais geralmente podemos definir R_θ

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$



Exemplo 7 (Modelo de Markov de empregabilidade)

Em nosso modelo x_1 é número de indivíduos com trabalho, x_2 número indivíduos sem trabalho. Sejam $0 \leq q \leq 1$ probabilidade do indivíduo (com trabalho) manter o trabalho depois de 1 semana, $0 \leq p \leq 1$ probabilidade do indivíduo (sem trabalho) achar um trabalho depois de 1 semana. Definamos $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ como

$$T(x) = \begin{bmatrix} q & p \\ (1-q) & (1-p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Ou seja $T(x_1, x_2) = (qx_1 + px_2, (1-q)x_1 + (1-p)x_2)$

Obs: A aplicação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida como $T(x) = Ax$ mede a distribuição de empregabilidade depois de **1 semana**. A aplicação linear $T^2 = T \circ T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é $T^2(x) = A^2x$ (onde $A^2 = AA$ é o produto de matrizes) mede a distribuição de empregabilidade depois de **2 semanas**. De forma análoga a aplicação linear $T^3 = T \circ T \circ T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mede a distribuição de empregabilidade depois de **3 semanas** e assim por diante.

Proposição 8

Toda aplicação linear $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ pode ser descrita por multiplicação de matriz i.e, $T(x) = [T]x$, indentificando $x = \sum_i e_i$ com a matriz coluna $[x_i]$

Demonstração.

Dado a base **canônica** $\{e_i\}$ e escrevendo $x = \sum_i x_i e_i$, temos $T(x) = \sum_i x_i T(e_i)$ ou seja para determinar a matriz A devemos:

- ▶ Determinar o vetor $T(e_j)$ (matriz coluna), i.e., $x_j = 1$ e $x_i = 0$ ($j \neq i$)
- ▶ colocar $T(e_j)$ **na coluna j** da matriz $[T] = A$.



Ex Voltemos ao nosso Exemplo 6. Suponha que $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tenha sido apresentada como:

$$T(x_1, x_2) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2, \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 \right)$$

Assim

$$T(1, 0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$T(0, 1) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Assim a representação matricial de T na base canônica é:

$$[T] = A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Prob: Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ aplicação definida como

$$T(x_1, x_2) = (x_1, -x_2). \text{ Então}$$

- (a) Determine a representação matricial na base canônica $[T]$.
- (b) Descreva geometricamente o que T faz.

Prob: Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ aplicação definida como

$$T(x_1, x_2) = (2x_1 + 2x_2, 3x_2). \text{ Então}$$

- (a) Determine a representação matricial na base canônica $[T]$.
- (b) Seja $R = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$. Esboce $T(R) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid y = T(x), x \in R\}$

Prob: Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a aplicação linear definida como

$$T(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$$

- (a) Determine a representação matricial na base canônica $[T]$.
- (b) Dado $c \in \mathbb{R}$ esboce a pre imagem (chamada também conjunto de nível) $T^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid T(x) = c\}$

Sistema lineares revisados

Seja A a matriz com colunas u , v , w . Aplicando a **eliminação de Gauss** temos que a solução do sistema $Ax = c$ se torna equivalente a solução de um sistema $Ux = \tilde{c}$. onde:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

Proposição 9

*Um conjunto de vetores $\{u, v, w\}$ forma uma **base de \mathbb{R}^3** se e somente se a eliminação de Gauss aplicada a matriz A (que tem colunas u, v, w) der uma matriz U diagonal superior, cujos elementos da diagonal são todos diferentes de zero.*

Proposição 10 (Decomposição LU)

Seja $n \times m$ matriz A . Suponha que durante a eliminação de Gauss não foi necessário fazer nenhuma permutação de linhas. Então existe uma $n \times n$ matriz L (matriz lower com "1s" na diagonal principal) e uma $n \times m$ matriz U escalonada tal que $A = LU$, sendo que U é a matriz obtida no processo de eliminação de Gauss e coeficientes de L são os l_{ij} gerados no processo.

$$\text{Ex: } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Comentário: Quando eliminação de Gauss demanda permutação de linhas, temos que existe uma $n \times n$ matriz P (invertível) tal que $PA = LU$. Decomposição LU é útil para cálculo numérico, e tem papel fundamental para compreender imagem $Im(T)$ e pre-imagem $T^{-1}(0)$ (também chamada de kernel ou núcleo de T) da aplicação linear $T(x) = Ax$

Comentários: Na disciplina de Cálculo II estaremos (a menos de explicitamente mencionado) considerando transformações lineares, aplicações e funções descritas na base canônica. Porém as vezes pode ser útil descrevê-las em outra

base. Ilustremos 2 casos. Sejam $[Q] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, vetores

$q_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $q_2 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, e aplicação linear $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $Q(x) = [Q]x$. Note que $Aq_1 = q_1$ e $Aq_2 = -q_2$.

Caso 1 Seja a aplic. linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $T(x) = Ax$. Obs:

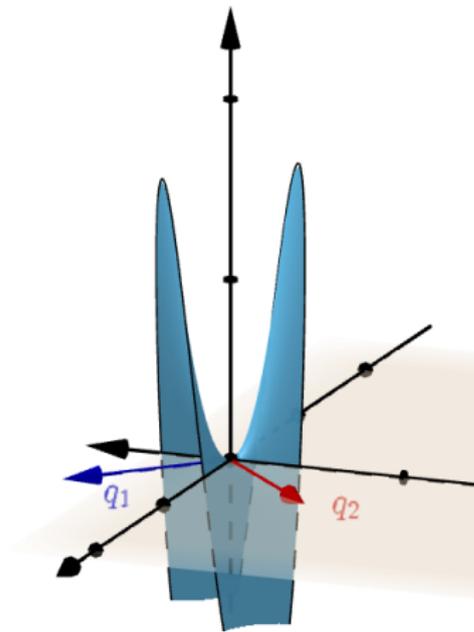
$$T \circ Q(x) = T(x_1 q_1 + x_2 q_2) = x_1 q_1 - x_2 q_2$$

ou seja T é uma reflexão na direção de q_1 .

Caso 2: Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^t Ax = 2x_1 x_2$. Então:

$$f \circ Q(x) = f(x_1 q_1 + x_2 q_2) = x_1^2 - x_2^2$$

ou seja o gráfico da função (não linear) f é uma rotação do gráfico de $\tilde{f} = f \circ Q$ (a qual é uma sela de cavalo)



Comentários: Considere uma $m \times m$ matriz A . Se $Aq_i = \lambda_i q_i$, o vetor q_i é chamado um **auto-vetor** e o número λ_i é chamado **auto-valor** associado a q_i . O comentário anterior já indica quão útil pode ser ter uma base de auto-vetores. Adiantemos aqui um resultado que usaremos posteriormente nesta disciplina (quando formos estudar a matriz $\text{Hess}f(p)$).

Teorema espectral Dado uma $m \times m$ matriz A simétrica (i.e., $A = A^t$), então existe uma base ortonormal de auto-vetores $\{q_i\}$, (para definição de ortonormal, vide Definição 14 na próxima seção)

Ilustremos a relevância de auto-vetores, resolvendo E.D.O linear a seguir:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Sejam $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $q_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ e $q_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ Note que q_1 e q_2 são auto-vetores de B com auto-valores: $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -3$. Note que:

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t)) = c_1 \exp(t\lambda_1)q_1 + c_2 \exp(t\lambda_2)q_2$$

atende a E.D.O $x'(t) = Bx(t)$. Fato de $\{q_i\}$ ser base e unicidade de E.D.O garantem que todas as soluções são dadas desta forma.

Comentários: Cálculo de auto-vetores e auto-valores:

$Bv = \lambda v$ equivale a $(B - \lambda Id)v = 0$ e tal sistema tem solução não trivial se e somente se $(B - \lambda Id)$ não for invertível, ou seja se e somente se

$$\rho(\lambda) = \det(B - \lambda Id) = 0. \text{ Vejamos um exemplo: } B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Passo 1: Encontre os auto-valores, i.e., resolva $\rho(\lambda) = 0$,

$$0 = \rho(\lambda) = \det \left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = \lambda^2 + 4\lambda + 3$$

, i.e., $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$

Passo2: Encontre os auto-vetores, i.e, para cada λ_i resolva o sistema

$$\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para $\lambda_1 = -1$ solução é (x_2, x_2) , para $\lambda_2 = -3$ solução é $(-x_2, x_2)$.

Assim uma base ortonormal de auto-vetores é

$$\{q_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), q_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\}$$

Produto interno

Definição 11

O **produto interno** (canônico) é a aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $\langle u, v \rangle = \sum_i u_i v_i$

No caso \mathbb{R}^2

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

No caso \mathbb{R}^3

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Obs: Sejam $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ e as matrizes

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad U^t = [u_1 \quad u_2 \quad u_3] \quad (\text{transposta de } U)$$

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \\ &= [u_1 \quad u_2 \quad u_3] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \\ &= U^t V \end{aligned}$$

Def: Dado uma $n \times m$ matriz $A = [a_{ij}]$ a matriz transposta A^t é matriz $m \times n$ definida como $A^t = [a_{ji}]$ (ou seja as colunas de A se tornam linhas de A^t).

Proposição 12

Sejam $u, v, w \in \mathbb{R}^m$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. O produto interno canônico em \mathbb{R}^m atende as seguintes propriedades:

1. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
2. $\langle u + w, v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle$
3. $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$
4. $\langle u, u \rangle \geq 0$
5. $\langle u, u \rangle = 0$ se e somente se $u = 0$

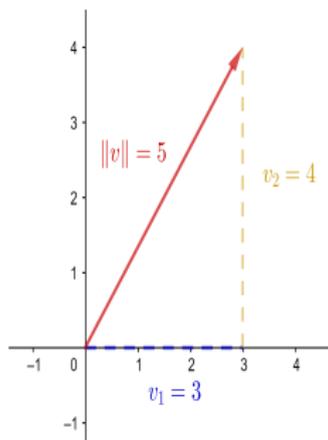
Definição 13

Seja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$. A **norma** de \mathbf{v} é definida como $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$

Ela medirá o **tamanho** do vetor \mathbf{v}

Ex: Seja $\mathbf{v} = (3, 4) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}\| &= \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \\ &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{9 + 16} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5\end{aligned}$$



Prob: Seja $v = (1, 1)$. Calcule:

(a) $\|v\|$

(b) $\|-3v\|$

(c) $\frac{v}{\|v\|}$

(d) $\left\| \frac{v}{\|v\|} \right\|$

Obs: Mais geralmente, $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$. Em particular se $\lambda = \frac{1}{\|v\|}$ temos

$$\left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = \frac{1}{\|v\|} \|v\| = 1$$

A norma também permite criar uma **função distância**
 $d : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$d(a, b) = \|a - b\|$$

Tal função atende as propriedades:

- ▶ $d(a, b) \geq 0$, e $d(a, b) = 0$ e somente e $a = b$,
- ▶ $d(a, b) = d(b, a)$
- ▶ $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$

Considere os vetores $u, v \in \mathbb{R}^m$ O **ângulo** entre estes vetores é

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}$$

u, v são **ortogonais** se $\langle u, v \rangle = 0$

Definição 14

Uma base $\{\xi_i\}$ em \mathbb{R}^m é chamada **ortonormal** se

- ▶ $\|\xi_i\| = 1$
- ▶ $\langle \xi_i, \xi_j \rangle = 0$ para $i \neq j$

Ex: Duas bases ortonormais diferentes de \mathbb{R}^2

(a) $\{(1, 0), (0, 1)\}$

(b) $\{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})\}$

Proposição 15

Seja $\{\xi_i\}$ em \mathbb{R}^m uma base ortonormal de \mathbb{R}^m . Então para todo $v \in \mathbb{R}^m$ temos:

$$v = \sum_{i=1}^m \langle v, \xi_i \rangle \xi_i$$

Prova: Seja $v = \sum_i c_i \xi_i$. Multiplicando os 2 lados por ξ_{i_0} temos

$$\begin{aligned} \langle v, \xi_{i_0} \rangle &= \left\langle \sum_i c_i \xi_i, \xi_{i_0} \right\rangle \\ &= \sum_i \langle c_i \xi_i, \xi_{i_0} \rangle \\ &= \sum_i c_i \langle \xi_i, \xi_{i_0} \rangle \\ &= c_{i_0}. \end{aligned}$$

Comentários: Matrizes ortogonais

Uma $m \times m$ matriz Q é chamada **matriz ortogonal** se $\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^m$. A aplicação linear $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ (as vezes até denotada pelo mesmo simbolo Q) definida como $T(x) = Qx$ é chamada **isometria**.

Prob: Verifique que se T é isometria então ela preserva norma e preserva ângulo.

Prob: Verifique que Q é matriz ortogonal, se e somente se $QQ^t = Q^tQ = Id$.

Prob: Seja Q matriz ortogonal $m \times m$ e q_i suas colunas. Verifique que $\{q_i\}$ é base ortonormal de \mathbb{R}^m .

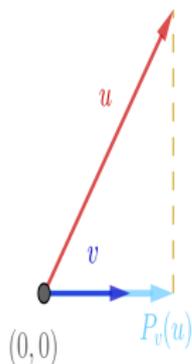
Prob: Verifique que: $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ e $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ são matrizes ortogonais.

Motivado pelo Proposição 15 definimos:

Definição 16

Sejam u, v vetores em \mathbb{R}^m . A **projeção** de u ao longo de v é definida como

$$P_v(u) = \left\langle u, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \frac{v}{\|v\|}$$



Ex Seja $(3, 5)$ e $(2, 0)$.

$$\begin{aligned} P_v(u) &= \left\langle u, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \frac{v}{\|v\|} \\ &= \left\langle (3, 5), \frac{(2, 0)}{2} \right\rangle \frac{(2, 0)}{2} \\ &= \left\langle (3, 5), (1, 0) \right\rangle (1, 0) \\ &= 3(1, 0) \\ &= (3, 0) \end{aligned}$$

Reta em \mathbb{R}^2 e distância

Definição 17 (Reta contendo zero)

$$\begin{aligned} R &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid N_1 x_1 + N_2 x_2 = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle (N_1, N_2), (x_1, x_2) \rangle = 0\} \end{aligned}$$

Obs: $N = (N_1, N_2)$ é um **vetor normal** a reta.

Obs: A distância de um ponto u a uma reta $N_1 x_1 + N_2 x_2 = 0$ é calculada como a projeção, i.e., $d = \|P_N(u)\|$

Prob: Calcule a distância de $u = (1, 3)$ a reta descrita pela equação da reta $3x_1 + 2x_2 = 0$

Definição 18 (Reta passando por $p = (p_1, p_2)$)

$$\begin{aligned} R &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid N_1(x_1 - p_1) + N_2(x_2 - p_2) = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle (N_1, N_2), ((x_1, x_2) - (p_1, p_2)) \rangle = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid N_1x_1 + N_2x_2 = c\} \end{aligned}$$

onde $c = \langle N, p \rangle$.

Obs: $N = (N_1, N_2)$ é um **vetor normal** a reta.

$$R = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid N_1 x_1 + N_2 x_2 = c\}$$

Prob: Sejam x_1 , x_2 quantidade de mercadorias A e B consumidas por uma pessoa. Sejam \$ 2,00 e \$ 3,00 os preços unitários de A e B respectivamente. Descreva em coordenadas euclidianas o espaço dos números de unidades das mercadorias, quando a despesas para mercadorias é \$ 10,00 e esboce tal conjunto.

$$R = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid N_1(x_1 - p_1) + N_2(x_2 - p_2) = 0\}$$

A distância de um ponto q a reta, R é calculada com a projeção, i.e., $d = \|P_N(U)\|$ onde $U = q - p$

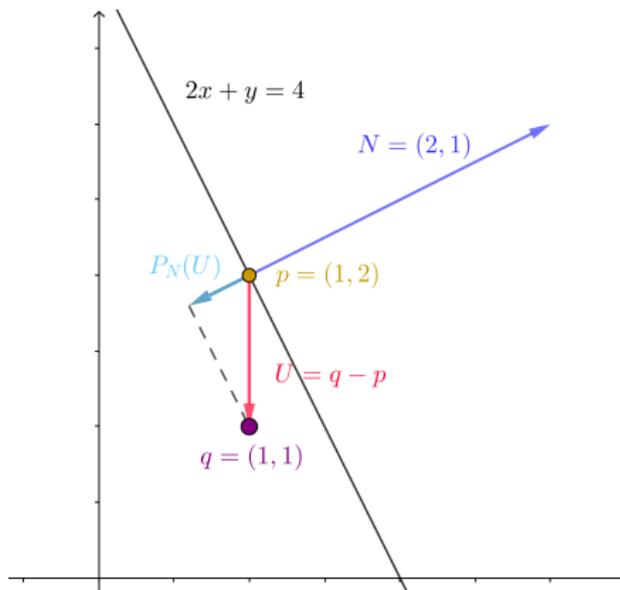


Figura: $d = \|P_N(U)\| = \frac{1}{\sqrt{5}}$

A **distância** de um ponto $q \in \mathbb{R}^2$ a **reta**

$$R = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid N_1(x_1 - p_1) + N_2(x_2 - p_2) = 0\}$$

é $d = \|P_N(U)\|$ onde $U = q - p$ e $p \in R$. Ou seja:

$$\begin{aligned}d &= \|P_N(U)\| \\&= \left| \left\langle U, \frac{N}{\|N\|} \right\rangle \right| \\&= \left| \left\langle q - p, \frac{N}{\|N\|} \right\rangle \right| \\&= \frac{1}{\|N\|} \left| \langle q, N \rangle - \langle p, N \rangle \right|\end{aligned}$$

$$d = \frac{|N_1 q_1 + N_2 q_2 - c|}{\sqrt{N_1^2 + N_2^2}}$$

Problema 19

Determine o ponto $\pi(q)$ na reta $2x + y = 4$ mais próximo do ponto $q = (1, 1)$.

Sol: Note que $p = (1, 2)$ pertence a reta. Defina

$U = (1, 1) - (1, 2)$. Note que $P_N(U) = \frac{-1}{\sqrt{5}} \frac{(2, 1)}{\sqrt{5}}$

$$\begin{aligned}\pi(q) &= \left(U - P_N(U) \right) + p \\ &= \left((0, -1) - \frac{(-2, -1)}{5} \right) + (1, 2) \\ &= \left(\frac{7}{5}, \frac{6}{5} \right)\end{aligned}$$

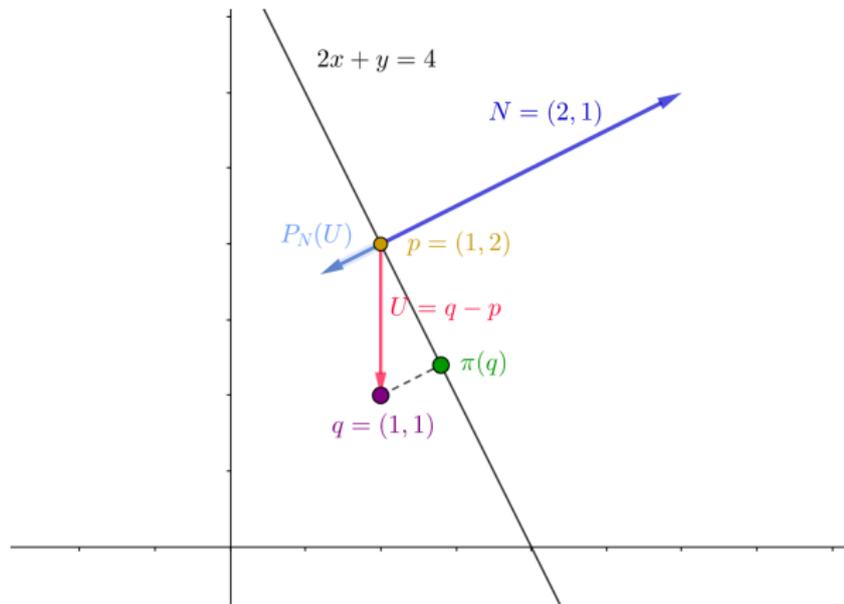


Figura: $\pi(q) = (U - P_N(U)) + p$

Planos em \mathbb{R}^3 e distância

Definição 20 (Plano contendo zero)

$$\begin{aligned} P &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \langle (N_1, N_2, N_3), (x_1, x_2, x_3) \rangle = 0\} \end{aligned}$$

$N = (N_1, N_2, N_3)$ é um **vetor normal** a reta.

A **distância de um ponto u ao plano $N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 = 0$** é calculada com a projeção, i.e.,

$$d = \|P_N(u)\| = \left\| \left\langle u, \frac{N}{\|N\|} \right\rangle \frac{N}{\|N\|} \right\| = \left| \left\langle u, \frac{N}{\|N\|} \right\rangle \right|$$

Definição 21 (Plano passando por $p = (p_1, p_2, p_3)$)

$$\begin{aligned} P &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid N_1(x_1 - p_1) + N_2(x_2 - p_2) + N_3(x_3 - p_3) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle (N_1, N_2, N_3), ((x_1, x_2, x_3) - (p_1, p_2, p_3)) \rangle = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 = c\} \end{aligned}$$

onde $c = \langle N, p \rangle$.

Obs: $N = (N_1, N_2, N_3)$ é um **vetor normal** a reta.

Prob: Sejam x_1 , x_2 , x_3 o número de unidades das mercadorias A , B e C consumidas por uma pessoa. Sejam \$2,00 e \$3,00 e \$4,00 os preços unitários de A , B e C respectivamente. Descreva em coordenadas euclidianas o espaço dos números de unidades das mercadorias, quando a despesas para mercadorias é \$10,00 e esboce tal conjunto.

A **distância** de um ponto $q \in \mathbb{R}^3$ ao plano

$$P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid N_1(x_1 - p_1) + N_2(x_2 - p_2) + N_3(x_3 - p_3) = 0\}$$

é $d = \|P_N(U)\|$ onde $U = q - p$ e $p \in P$. Ou seja:

$$\begin{aligned}d &= \|P_N(U)\| \\&= \left| \left\langle U, \frac{N}{\|N\|} \right\rangle \right| \\&= \left| \left\langle q - p, \frac{N}{\|N\|} \right\rangle \right| \\&= \frac{1}{\|N\|} \left| \langle q, N \rangle - \langle p, N \rangle \right|\end{aligned}$$

$$d = \frac{|N_1 q_1 + N_2 q_2 + N_3 q_3 - c|}{\sqrt{N_1^2 + N_2^2 + N_3^2}}$$

Obs: Considere 2 planos:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 = c\}$$

$$\tilde{P} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \tilde{N}_1 x_1 + \tilde{N}_2 x_2 + \tilde{N}_3 x_3 = \tilde{c}\}$$

Suponha que $N \neq \lambda \tilde{N}$ (i.e., são linearmente independentes). Então o conjunto $P \cap \tilde{P}$ é uma **reta** em \mathbb{R}^3 .

Subespaços vetoriais e aplicações lineares

Proposição 22

Sejam $u = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$ e $v = (a_{12}, a_{22}, a_{32})$ vetores com $u \neq \lambda v$ (i.e., linearmente independentes). Considere $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear $T(x) = Ax$ onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Então a imagem de T é um plano contendo zero. Um vetor normal N a este plano atende $\langle N, u \rangle = 0 = \langle N, v \rangle$

$$\text{i.e., } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Além disto os vetores u e v são uma base deste plano.

Prob Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear

$$T(x) = Ax.$$

- (a) Calcule um vetor normal N a imagem de T .
- (b) Determine a projeção ortogonal de $q = (2, 2, 0)$ no plano, i.e., o ponto $\pi(q)$ contido no plano tal que $\|q - \pi(q)\|$ é a distancia de q ao plano.

Dica da solução de (b) $\pi(q) = q - P_N(q)$

Obs: No caso particular $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ onde as colunas são linearmente independentes, é possível usar o **produto vetorial** (que só existe em dimensão 3) para calcular um vetor normal N .

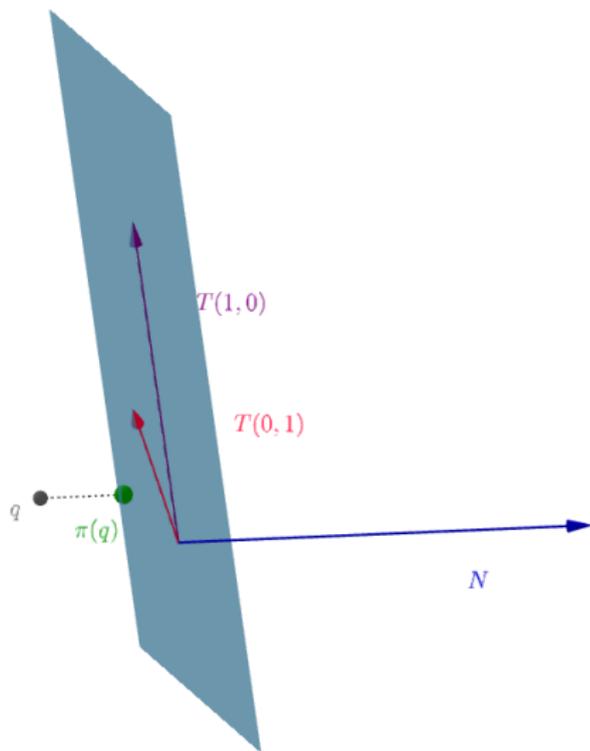


Figura: $\pi(q) = q - P_N(q)$

Definição 23

Um subconjunto $W \subset \mathbb{R}^{m+k}$ é chamado **subespaço vetorial** de \mathbb{R}^{m+k} se:

- (a) u e $v \in W$ então $u + v \in W$
- (b) $u \in W$ então $\lambda u \in W$ para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ex: Retas em \mathbb{R}^2 contendo zero; planos em \mathbb{R}^3 contendo zero; retas em \mathbb{R}^3 contendo zero são subespaços vetoriais.

Obs Se $W \subset \mathbb{R}^{m+k}$ é subespaço vetorial, então $0 \in W$ (pelo item (b)).

Prob Seja $T : \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ aplicação linear definida como $T(x) = Ax$. Verifique que $W = T^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^{m+k} \mid Ax = 0\}$ é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^{m+k}

Definição 24

Sejam $W \subset \mathbb{R}^{m+k}$ um subespaço vetorial. Um subconjunto de vetores $\{\xi_i\}_{i=1}^m$ de W é chamado **base** de W se

- ▶ todo $w \in W$ pode ser escrita como **combinação linear** da base $\{\xi_i\}_{i=1}^m$, ou seja $w = \sum_{i=1}^m w_i \xi_i$ onde $w_i \in \mathbb{R}$;
- ▶ de uma forma **única** ou seja $\sum_{i=1}^m a_i \xi_i = \sum_{i=1}^m b_i \xi_i$ implica $a_i = b_i$ (os vetores são **linearmente independentes**).

Obs: Os vetores de $\{\xi_i\}_{i=1}^m$ serem linearmente independentes equivale a dizer que $a_i = 0$ para todo i é única solução de

$$\sum_{i=1}^m a_i \xi_i = 0$$

Obs: Duas bases de W tem que ter o mesmo número de vetores m . Assim definimos **dimensão** de W como $m = \dim(W)$

Prob: Verifique:

- ▶ A reta em \mathbb{R}^2 , $W = \{x \in \mathbb{R}^2, N_1x_1 + N_2x_2 = 0\}$ tem dimensão 1.
- ▶ O plano em \mathbb{R}^3 $W = \{x \in \mathbb{R}^3, N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 = 0\}$ tem dimensão 2.
- ▶ A reta em \mathbb{R}^3
 $W = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ tem dimensão 1

Comentários (exemplo trabalhado): Determinemos uma base

$W = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\}$ onde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix}. \text{ Seja } U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ a matriz escalonada de } A.$$

Note que $x \in W \Leftrightarrow Ux = 0 \Leftrightarrow x = (-3x_2 + x_4, x_2, -x_4, x_4)$.

Assim $\dim(W) = 2$ (o número de variáveis livres.) Uma base $\{\xi_i\}$ de W é:

$$\xi_1 = (-3, 1, 0, 0) \quad (x_2 = 1, x_4 = 0)$$

$$\xi_2 = (1, 0, -1, 1) \quad (x_2 = 0, x_4 = 1)$$

Obs: Imagens de aplicações lineares $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ são **subespaços vetoriais**.

Obs: Seja uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ definida como $T(x) = Ax$. Então as colunas de A são **base** da imagem $W = \text{Im}(T)$ se uma das equivalências vale:

- ▶ T é injetora,
- ▶ as colunas de A são linearmente independentes,
- ▶ todas as colunas de U (obtidas no escalonamento de A) são pivôs, i.e., existem m pivôs.

No caso acima $\dim W = m$

Comentários (exemplo trabalhado): Determinemos uma base

$W = \text{im}(T) = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid y = T(x), \forall x \in \mathbb{R}^4\}$ onde $T(x) = Ax$ para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix}. \text{ Seja } U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ matriz escalonada de } A.$$

Utilizando decomposição $A = LU$ possível mostrar que:

As **colunas** de A que são base de W coincide com as **posições** das colunas de U onde tem os **pivôs**. Ou seja base $\{\xi_1, \xi_2\}$ de $W = \text{Im}(T)$ é:

$$\xi_1 = (1, 2, -1)$$

$$\xi_2 = (3, 9, 3)$$

e $\dim(W) = \text{Im}(T) = 2$ é o **número de variáveis pivôs**.