

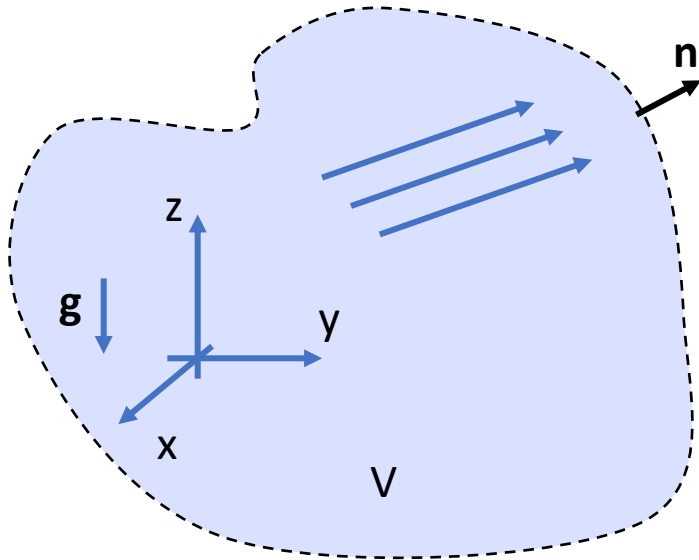
Hidrodinâmica I

Revisão de Fundamentos da Mecânica dos Fluidos



PNV3323 – Hidrodinâmica I
Prof. Dr. Jordi Mas Soler
Jordi.msoler@usp.br

Conservação da quantidade de movimento



A abordagem Lagrangiana permite escrever:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \vec{v} dV = \sum \vec{F}_{ext}$$

Tipos de força agem sobre uma partícula:

- Forças de contato/superfície
- Forças campo/corpo

Assim, a Qtde. de movimento pode ser reescrita como:

$$\frac{D}{Dt} (\rho \vec{v}) = -\nabla p + \rho \vec{g} \quad \rightarrow \quad \rho \left(\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \rho \vec{g}$$

O Modelo de Fluido Ideal

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \\ \rho \left(\frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}} \right) &= -\nabla p + \rho \bar{\mathbf{g}} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{4 equações para 4 incógnitas:} \\ \{v_x, v_y, v_z, p\} \end{array}$$

Há duas condições nas quais as equações podem ser integradas (Langrange):

1. Escoamento permanente
2. Escoamento irrotacional: $\nabla \times \bar{\mathbf{v}}(x, y, z, t) = \bar{\mathbf{0}}$

Escoamento Potencial

Lagrange propôs como uma possível solução das Equações de Euler (*teorema de Stokes*):

$$\vec{v}(x, y, z, t) = \nabla \phi(x, y, z, t)$$

$\phi(x, y, z, t)$ é chamado de potencial de velocidade do escoamento.

Aplicando à Equação da Continuidade resultará:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

Equação de Laplace

Escoamento Potencial

Aplicando à Equação de Euler resultará:

$$\rho \left(\frac{d\bar{\phi}}{dt} + \frac{1}{2} \nabla \phi \nabla \phi \right) + p + \rho g z = C(t) \quad \text{Equação de Bernoulli}$$

Se, além de irrotacional, o escoamento for permanente (i.e. $\bar{v} = \bar{v}(x, y, z)$)

$$\rho \left(\frac{1}{2} \nabla \phi \nabla \phi \right) + p + \rho g z = C$$

Equações de governo do Escoamento Potencial

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \\ \rho \left(\frac{d\bar{\phi}}{dt} + \frac{1}{2} \nabla \phi \nabla \phi \right) + p + \rho g z &= C(t) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{2 equações para 2 incógnitas:} \\ \{\phi, p\} \end{array}$$

A definição da função ϕ x, y, z, t que representa a solução do problema *particular* de escoamento potencial de interesse requer, então: Estabelecer e verificar as restrições físicas impostas ao escoamento *nas fronteiras de seu domínio* **Problema de valor de Contorno (PVC)**