

Notas de aula de Física Quântica (4302311)

Edivaldo Moura Santos

1 de Outubro de 2023

Conteúdo

1	Radiação de cavidade	5
1.1	Propriedades gerais	5
1.2	Teoria clássica de Rayleigh-Jeans	8
1.3	Teoria de Planck	13
2	Comportamento corpuscular da radiação	21
2.1	O efeito fotoelétrico	21
2.2	Teoria de Einstein do efeito fotoelétrico	26
2.3	Espalhamento Compton	28
2.4	Raios-X	37
2.5	Produção de pares	39
2.6	Aniquilação de pares	39
3	Comportamento ondulatório da matéria	41

Capítulo 1

Radiação de cavidade

1.1 Propriedades gerais

O ano de 1900 é considerado como o de nascimento da física quântica. Foi em dezembro desse ano que Max Planck apresentou um trabalho na reunião da Sociedade Alemã de Física ¹, introduzindo a hipótese de quantização da energia e resolvendo o chamado problema da radiação de cavidade. O problema em questão lida com o conceito de corpo negro, definido como aquele que absorve toda a radiação que sobre ele incide, i.e., um absorvedor perfeito, independentemente do comprimento de onda. Um corpo em equilíbrio térmico a temperatura T com o meio que o circunda deve absorver energia do meio à mesma taxa em que emite energia ao meio. Sendo assim, um corpo negro é ao mesmo tempo um absorvedor e emissor perfeito.

No laboratório podemos criar sistemas que se aproximam de um corpo negro ideal. Por exemplo, tome o caso de uma cavidade mantida a temperatura fixa em que a parede da cavidade é conectada ao exterior por um pequeno orifício, como aquela representada na figura 1.1. Para um observador externo, o orifício apresentará propriedades de corpo negro, pois radiação incidente a partir do meio terá grande probabilidade de absorção após múltiplas reflexões no interior da cavidade. Por outro lado, uma vez que as paredes estão em equilíbrio térmico com o meio, elas emitem radiação que escapa pelo orifício.

O problema da radiação de cavidade lida com a questão de prever as propriedades da radiação emitida por uma ela. Mais precisamente, determinar a distribuição espectral da radiação especificada pela chamada *radiância espectral* $R_T(\nu)$ e definida de forma que

¹Planck, M. (1900b). *Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspectrum*. Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft. 2: 237-245. Translated in ter Haar, D. (1967). *On the Theory of the Energy Distribution Law of the Normal Spectrum..* Traduzido para o Português em Revista Brasileira de Ensino de Física 22, 538 (2000).

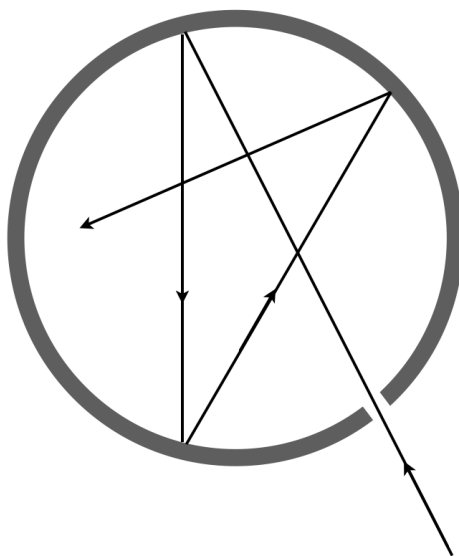


Figura 1.1: Cavidade esférica em equilíbrio térmico a temperatura T . O pequeno orifício na parede da cavidade permite que radiação seja absorvida do meio externo e emitida para o meio pela cavidade. O orifício tem propriedades de corpo negro.

$R_T(\nu)d\nu \equiv$ “energia por unidade de tempo e por unidade de área emitida na forma de radiação no intervalo de frequências entre ν e $\nu+d\nu$ ”, de forma que a unidade da radiância espectral é

$$[R_T(\nu)] = \frac{[\text{energia}]}{[\text{tempo}] \times [\text{área}] \times [\text{frequência}]} = \text{W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}(\text{SI})$$

Medidas precisas de radiância espectral já estavam disponíveis no final do século XIX como aquelas de Lummer & Pringsheim². Mesmo antes de tais medidas, Joseph Stefan (1879), baseado em medidas de John Tyndall da chamada *radiância total* R_T

$$R_T \equiv \int_0^{\infty} R_T(\nu) d\nu, \quad (1.1)$$

chegou à chamada *lei de Stefan*

$$R_T = \sigma T^4 \quad (\text{lei de Stefan}), \quad (1.2)$$

em que a constante de proporcionalidade σ é conhecida como *constante de Stefan-Boltzmann* e cujo valor numérico no SI é

$$\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4},$$

²O. Lummer, E. Pringsheim, Verh. Deutsch. Phys. Ges. 2, 174 (1900).

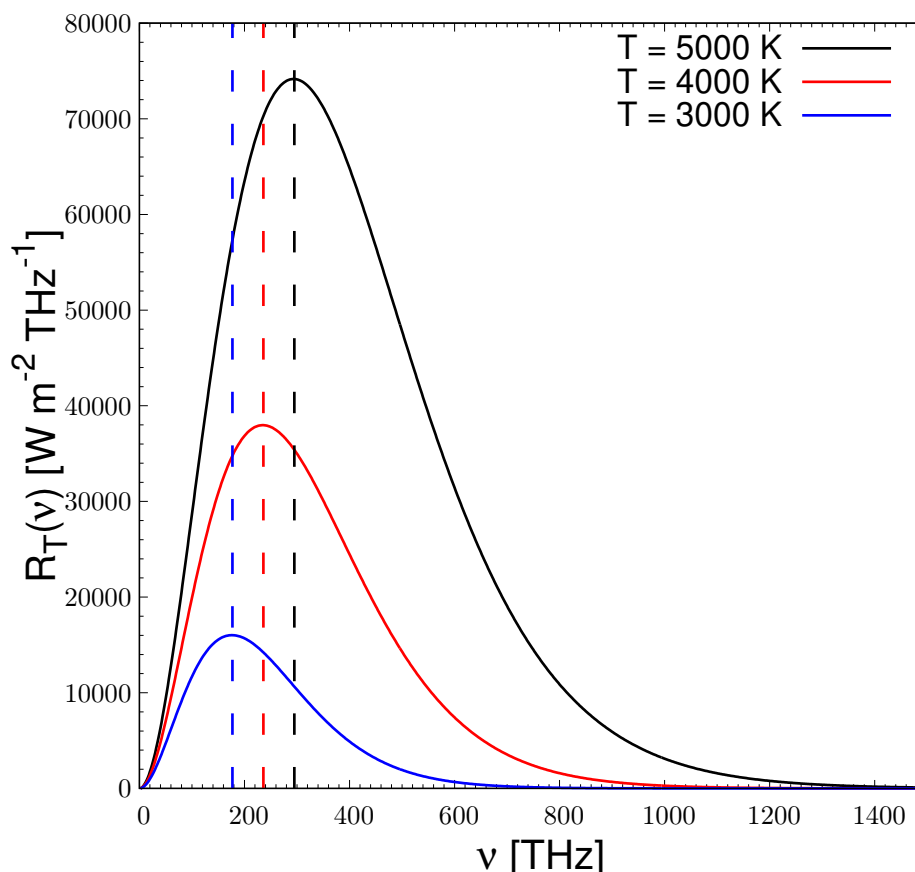


Figura 1.2: Radiação espectral em $\text{W m}^{-2} \text{THz}^{-1}$ em função da frequência em THz ($= 10^{12} \text{ Hz}$) para corpos negros de três temperaturas diferentes: 3000 K (azul), 4000 K (vermelho) e 5000 K (preto).

ou seja, a radiação total aumenta rapidamente com a quarta potência da temperatura.

Outra propriedade de $R_T(\nu)$, já notada em 1893 por Wilhelm Wien e conhecida como *lei do deslocamento de Wien*, afirma que a frequência ν_{max} na qual $R_T(\nu)$ atinge seu valor máximo, satisfaz

$$\nu_{max} = C_W T, \quad \text{onde } C_W = 5,9 \times 10^{10} \text{ Hz K}^{-1} \quad (\text{lei do deslocamento de Wien}), \quad (1.3)$$

ou seja, ν_{max} é diretamente proporcional a temperatura. Essa lei tem aplicações práticas muito importantes. Por exemplo, podemos utilizar medidas de $R_T(\nu)$ para determinar ν_{max} e, por meio da lei do deslocamento de Wien, estimar a temperatura de um corpo, como uma estrela.

A figura 1.2 mostra $R_T(\nu)$ em $\text{W m}^{-2} \text{THz}^{-1}$ em função da frequência em THz ($= 10^{12} \text{ Hz}$) para corpos negros de três temperaturas diferentes: 3000 K (azul), 4000 K (vermelho) e 5000 K (preto). Perceba o rápido aumento na área sob a curva de $R_T(\nu)$, i.e. a radiação total

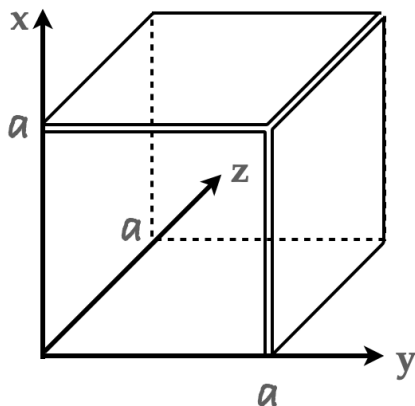


Figura 1.3: Cavidade cúbica com paredes metálicas de lado a e a temperatura T .

R_T , à medida que a temperatura aumenta, como esperado da lei de Stefan. O deslocamento da posição de máximo da radiação espectral (a frequência ν_{max}), representada pelas linhas pontilhadas verticais, também pode ser claramente percebida na figura.

1.2 Teoria clássica de Rayleigh-Jeans

Do ponto de vista teórico, uma das primeiras tentativas de deduzir uma expressão para $R_T(\nu)$ foi feita por Lord Rayleigh e James Jeans. Vamos reproduzir aqui em linhas gerais esse cálculo, usando os mesmos argumentos de Rayleigh e Jeans, ou seja, argumentos baseados no Eletromagnetismo Maxwelliano, na Termodinâmica, na Mecânica Estatística e na hipótese de que a energia é uma quantidade contínua. Nosso sistema de interesse é uma cavidade que, sem perda de generalidade, pode ser tomada como cúbica de lado a (figura 1.3). Como veremos, o resultado final é independente do formato da cavidade e pode ser demonstrado através de argumentos puramente termodinâmicos (ver exercício da lista de 1a).

A cavidade encontra-se em equilíbrio térmico a temperatura T , suas paredes são metálicas e assumiremos que no seu interior temos vácuo. Nestas condições, os elétrons dos átomos das paredes internas da cavidade vibram termicamente e a teoria clássica do Eletromagnetismo prevê que tais elétrons emitem radiação que preenche o interior da cavidade, ou seja, a energia no interior da cavidade é de natureza eletromagnética. No interior da cavidade, os campos elétrico \mathbf{E} e magnético \mathbf{B} devem satisfazer as equações de Maxwell no vácuo:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (\text{Gauss}), \quad (1.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{Faraday}), \quad (1.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{Ampère-Maxwell}). \quad (1.7)$$

Além disso, esses campos devem satisfazer as seguintes condições de contorno nas paredes metálicas

$$\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{0} \quad B_{\perp} = 0, \quad (1.8)$$

onde os símbolos \parallel e \perp indicam as componentes paralela e perpendicular às paredes da cavidade, respectivamente. Essas condições de contorno são consequências diretas das leis de Faraday e $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ³.

Em seu curso de Física III, você se deu conta de que as eqs. 1.4, 1.5, 1.7, 1.7 possuem soluções do tipo onda eletromagnética transversal com velocidade de propagação $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$. Na presença das condições de contorno 1.8, entretanto, as soluções adquirem propriedades distintas das que você viu anteriormente. Uma das soluções possíveis é chamada de modo transverso-elétrico (TE), que para o caso da cavidade cúbica de lado a , escolhendo o eixo- z ao longo de uma das arestas da cavidade (bem como os eixos x e y), o campo elétrico \mathbf{E} não possui componente ao longo de z . No modo TE, entretanto, o campo magnético \mathbf{B} possui componentes tanto paralela quanto perpendicular a z . Outra solução possível para as equações de Maxwell na geometria em questão é o modo transverso-magnético (TM) em que o campo magnético não possui componente ao longo de z , enquanto o campo elétrico pode ser tanto longitudinal (paralelo a z) quanto transversal (perpendicular a z).

Tanto no modo TE quanto no TM, os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} oscilam harmonicamente no tempo com frequências angulares que formam um conjunto discreto

$$\omega_{\ell mn} = \frac{c\pi}{a} \sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2}, \quad (1.9)$$

onde (ℓ, m, n) é uma tripla de números naturais ($\ell, m, n = 0, 1, 2, \dots$). Em termos das frequências ν

$$\nu_{\ell mn} = \frac{\omega_{\ell mn}}{2\pi} = \frac{c}{2a} \sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2}, \quad (1.10)$$

ou usando a notação de Eisberg & Resnick [1]

$$\ell \longrightarrow n_x, \quad m \longrightarrow n_y, \quad n \longrightarrow n_z, \quad (1.11)$$

temos

$$\nu_{\ell mn} = \frac{c}{2a} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}. \quad (1.12)$$

Por exemplo, o campo eletromagnético completo para os modos $\text{TE}_{\ell 0 n}$ (i.e., tomando $m = 0$) é dado por

$$B_z(x, z, t) = B_0 \cos\left(\frac{\ell\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos(\omega t + \delta) \quad (1.13)$$

$$B_x(x, z, t) = -\frac{n}{\ell} B_0 \sin\left(\frac{\ell\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin(\omega t + \delta) \quad (1.14)$$

$$E_y(x, z, t) = -\frac{a\omega}{\ell\pi} B_0 \sin\left(\frac{\ell\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin(\omega t + \delta). \quad (1.15)$$

³Você pode deduzir as condições de contorno 1.8 tomando um circuito fechado retangular com um dos lados dentro e outro imediatamente fora da parede da cavidade no caso da lei de Faraday ou uma superfície gaussiana com uma das faces dentro e outra imediatamente fora da parede da cavidade.

Os modos $TE_{\ell mn}$ e $TM_{\ell mn}$ representam ondas eletromagnéticas estacionárias (não-propagantes) no interior da cavidade, conhecidas como os modos normais da cavidade, da mesma forma que uma corda sob tensão e presa nas extremidades ou uma membrana de periferia circular têm seus modos normais de vibração.

A energia eletromagnética total W_{EM} armazenada na cavidade, por sua vez, pode ser obtida integrando as respectivas densidades de energia elétrica e magnética no volume V da cavidade

$$W_{EM} = \int_V \left[\frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2 \right] dV. \quad (1.16)$$

Das equações 1.13, 1.14 e 1.15, vemos que o resultado dessa integração para um modo normal genérico $TE_{\ell mn}$, por exemplo, é:

$$W_{EM}^{\ell mn} = C_{\ell mn}^{TE} \cos^2(\omega t + \delta) + D_{\ell mn}^{TE} \sin^2(\omega t + \delta), \quad \text{com } \omega = \omega_{\ell mn}, \quad (1.17)$$

com uma expressão similar para os modos $TM_{\ell mn}$. Ou seja, a energia desses modos é idêntica àquela de um oscilador harmônico simples (OHS). Portanto, do ponto de vista da energia, os modos normais do campo eletromagnético de uma cavidade em equilíbrio térmico podem ser vistos como uma coleção (um ensemble) de osciladores harmônicos. Se quisermos então determinar $R_T(\nu)$, devemos ser capazes de determinar, dentre todos os possíveis infinitos modos normais, o quão provável é encontrar um determinado modo (ℓ, m, n) no interior da cavidade. Mais precisamente, qual o número médio de modos $N(\nu)d\nu$ no intervalo de frequências $[\nu, \nu + d\nu]$?

As triplas $(\ell, m, n) = (n_x, n_y, n_z)$ formam uma grade 3-dimensional de pontos num espaço abstrato, que do ponto de vista matemático é idêntico ao \mathbb{R}^3 . Dessa forma, podemos usar essa grade para o cálculo de $N(\nu)d\nu$, já que da equação 1.12, esse número deve ser igual à quantidade de pontos (n_x, n_y, n_z) , dada por $N(r)d(r)$, entre duas cascas esféricas centradas na origem do espaço abstrato e de raios r e $r + dr$ (ver figura 1.4)

$$N(\nu)d\nu = 2N(r)dr, \quad (1.18)$$

onde o fator 2 leva em conta que, para cada tripla, há dois modos normais possíveis do campo eletromagnéticos (TE ou TM). No caso de uma onda eletromagnética livre (não-confinada), você pode pensar em termos dos dois possíveis estados de polarização da onda.

Como a densidade média de pontos da grade é 1, temos que:

$$N(r)dr = \frac{1}{8} 4\pi r^2 = \frac{1}{2} \pi r^2, \quad (1.19)$$

com

$$r = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = \frac{2a}{c} \nu. \quad (1.20)$$

Portanto

$$N(\nu)d\nu = \pi \left(\frac{2a}{c} \nu \right)^2 \left(\frac{2a}{c} d\nu \right) = \frac{8\pi a^3}{c^3} \nu^2 d\nu. \quad (1.21)$$

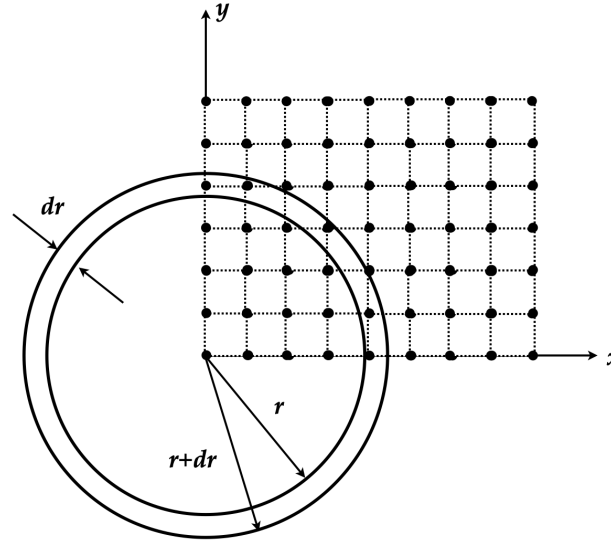


Figura 1.4: Projeção no plano xy da grade de pontos (n_x, n_y, n_z) juntamente com a projeção das cascas esféricas de raios r e $r + dr$.

Classicamente, a energia contida numa onda eletromagnética é uma variável contínua e, de acordo com a equação 1.16, proporcional ao quadrado da amplitude dos campos \mathbf{E} e \mathbf{B} . O próximo passo no tratamento de Rayleigh-Jeans foi estimar a energia média do ensemble de osciladores harmônicos representados pelos modos normais do campo eletromagnético. Aqui, Rayleigh e Jeans usaram a termodinâmica e a mecânica estatística para obter a resposta.

No equilíbrio térmico, a energia média $\bar{\epsilon}$ de um ensemble de osciladores pode ser obtida por meio da distribuição de Boltzmann, já que essa fornece a probabilidade de encontrar um oscilador com energia no intervalo $[\epsilon, \epsilon + d\epsilon]$

$$P(\epsilon)d\epsilon = C e^{-\beta\epsilon}d\epsilon, \quad \text{com} \quad \beta \equiv \frac{1}{k_B T}, \quad (1.22)$$

onde k_B é a chamada *constante de Boltzmann*, cujo valor numérico no SI é

$$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}, \quad (1.23)$$

e C é uma constante que pode ser obtida impondo-se a condição usual de normalização sobre uma distribuição de probabilidades (prove que $C = \beta = 1/k_B T$):

$$\int_0^{\infty} P(\epsilon)d\epsilon = 1. \quad (1.24)$$

Logo, para uma variável contínua como a energia de um oscilador clássico, temos para o seu

valor médio

$$\bar{\epsilon} = \frac{\int_0^{\infty} \epsilon P(\epsilon) d\epsilon}{\int_0^{\infty} P(\epsilon) d\epsilon} = k_B T. \quad (\text{Prove!}) \quad (1.25)$$

Esse resultado está de acordo com o *Teorema da Equipartição* da energia que afirma que no equilíbrio térmico, a energia média por grau de liberdade é $k_B T/2$. Para um oscilador harmônico simples mecânico, os graus de liberdade estão associados à sua posição e velocidade, ou de forma equivalente, à energia potencial devido à deformação da mola ($\propto \cos^2(\omega t + \delta)$) e a cinética ($\propto \sin^2(\omega t + \delta)$). Para os modos do campo de uma cavidade, estão associados simplesmente aos termos proporcionais a $\cos^2(\omega t + \delta)$ e $\sin^2(\omega t + \delta)$ da equação 1.17.

Sendo assim, a densidade média de energia no interior da cavidade de volume $V = a^3$ no intervalo de frequências $[\nu, \nu + d\nu]$ é dada pela chamada *fórmula de Rayleigh-Jeans*

$$\rho_T(\nu) d\nu \equiv \frac{[N(\nu) d\nu] \times \bar{\epsilon}}{V} = \frac{8\pi k_B T}{c^3} \nu^2 d\nu. \quad (1.26)$$

Perceba que o resultado final não possui qualquer dependência com a geometria da cavidade como esperado. Atente também ao fato de que estamos trabalhando com quantidades médias. De acordo com o Eletromagnetismo Maxwelliano, a densidade de energia eletromagnética não é uniforme no interior da cavidade, pois as amplitudes de \mathbf{E} e \mathbf{B} dependem da posição (eqs. 1.13, 1.14 e 1.15). Entretanto, o teorema da equipartição já fornece a média no equilíbrio térmico da energia armazenada nos campos, que pode ser vista também como uma média sobre as possíveis amplitudes. O último passo dessa dedução envolve conectar a densidade de energia por unidade de frequência $\rho_T(\nu)$ com a radiância espectral $R_T(\nu)$. Você fará essa conexão explícita na lista de exercícios 1a, mostrando que

$$R_T(\nu) = \frac{c}{4} \rho_T(\nu), \quad (1.27)$$

de forma que a previsão de Rayleigh-Jeans para a radiância espectral de uma cavidade em equilíbrio térmico a temperatura T é

$$R_T(\nu) = \frac{2\pi k_B T}{c^2} \nu^2 \quad (\text{Rayleigh-Jeans}). \quad (1.28)$$

A figura 1.5 mostra uma comparação entre a radiância $R_T(\nu)$ consistente com os dados experimentais (curva vermelha) e a previsão de Rayleigh-Jeans (curva preta), ambas para um corpo negro a temperatura $T = 2000$ K. Há uma clara discordância entre teoria e experimento. De acordo com a fórmula de Rayleigh-Jeans, a radiância espectral não possui um máximo (portanto, é inconsistente com a lei de deslocamento de Wien) e aumenta monotamente com o quadrado da frequência, $R_T(\nu) \propto \nu^2$, o que implicaria que quanto maior a frequência, mais a cavidade irradia naquela frequência. Além disso, ao invés de finita e proporcional a T^4 como previsto pela lei de Stefan, a radiância total da cavidade seria infinita (!)

$$R_T = \int_0^{\infty} R_T(\nu) d\nu \xrightarrow{\text{Rayleigh-Jeans}} \infty. \quad (1.29)$$

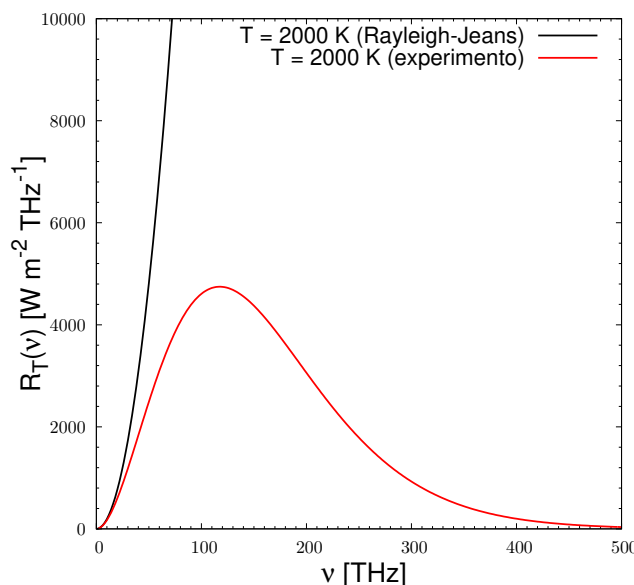


Figura 1.5: Comparação entre a radiação espectral clássica de Rayleigh-Jeans (preto) e aquela consistente com as medidas experimentais (vermelho) para um corpo negro a temperatura de 2000 K.

Essa discrepância ficou conhecida como a *catástrofe do ultravioleta*. Veremos na próxima seção como esse problema foi resolvido por Max Planck por meio de uma hipótese revolucionária sobre a natureza da energia.

1.3 Teoria de Planck

Vimos que a teoria de Rayleigh-Jeans para a radiação de cavidade, baseada no Eletromagnetismo clássico, na Termodinâmica e Mecânica Estatística (na forma do teorema da equipartição), bem como na hipótese de que a energia é uma quantidade física contínua, leva a uma radiação espectral em grande discordância com as medidas experimentais. A incompatibilidade é extrema na região de altas frequências.

Planck atacou esse problema sem mexer na parte do cálculo de Rayleigh-Jeans que se baseava no Eletromagnetismo clássico, de forma que o número médio de modos normais por intervalo de frequência $N(\nu)d\nu$ permaneceria o mesmo do tratamento de Rayleigh-Jeans. Tampouco abriu mão da distribuição de Boltzmann como a correta descrição da densidade de probabilidades das energias de um sistema em equilíbrio térmico. Sua linha de raciocínio foi buscar uma hipótese capaz de modificar a energia média $\bar{\epsilon}$ dos modos normais da cavidade, de forma a torná-la uma função da frequência $\bar{\epsilon}(\nu)$. Já que a teoria de Rayleigh-Jeans concordava com as medidas experimentais a baixas frequências e, portanto, o teorema da equipartição parecia válido nesse limite, o novo cálculo deveria satisfazer

$$\bar{\epsilon}(\nu) \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} k_B T. \quad (1.30)$$

Por outro lado, o fato da densidade de modos normais da teoria eletromagnética evoluir com ν^2 , enquanto as medidas de $R_T(\nu)$ indicarem um decrescimento monótono a altas frequências (acima de ν_{max}), induziu Planck a buscar uma alternativa capaz de levar ao seguinte comportamento a altas frequências

$$\bar{\epsilon}(\nu) \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0. \quad (1.31)$$

O valor médio da energia dos modos normais foi obtido anteriormente sob a hipótese de que a densidade de probabilidade da energia para um ensemble de modos em equilíbrio térmico a temperatura T é a de Boltzmann

$$P(\epsilon) = \frac{1}{k_B T} e^{-\epsilon/k_B T}, \quad (1.32)$$

e a natureza contínua da energia levou imediatamente ao resultado 1.25. Como já mencionado, Planck preservou em seus cálculos a validade da distribuição de Boltzmann como a correta descrição probabilística dos estados de energia de um sistema no equilíbrio térmico, onde os entes desse sistema (os modos normais do campo eletromagnético) são considerados independentes.

Planck tinha fortes razões teóricas para preservar a distribuição de Boltzmann, uma vez que ela surge de argumentos probabilísticos bastantes gerais acerca de como a energia de um sistema se distribui entre seus entes constituintes. Por exemplo, a independência dos entes implica que a probabilidade de encontrar um dos modos normais com energia ϵ_1 e um outro com energia ϵ_2 é dada por

$$P = P(\epsilon_1)(\epsilon_2) \quad (1.33)$$

O argumento central que leva à distribuição de Boltzmann é que quaisquer outras configurações em que a dupla de modos tenha energia total $\epsilon_1 + \epsilon_2$ é igualmente provável, ou seja, a probabilidade em questão deve depender somente da soma de energias e a representaremos por $Q(\epsilon_1 + \epsilon_2)$. Portanto, devemos ter necessariamente

$$P(\epsilon_1)(\epsilon_2) = Q(\epsilon_1 + \epsilon_2), \quad (1.34)$$

e essa última equação leva naturalmente a uma distribuição de probabilidades exponencial como a de Boltzmann.

Neste ponto, Planck fez uma hipótese radical acerca da natureza da energia dos modos normais da cavidade. Ao invés de contínua, a energia seria uma quantidade discreta, tomando apenas valores uniformemente distribuídos

$$\epsilon = 0, \Delta\epsilon, 2\Delta\epsilon, 3\Delta\epsilon, \dots \quad (1.35)$$

e foi um passo além ao postular que essa quantidade fundamental de energia $\Delta\epsilon$ estava relacionada à frequência do modo normal da forma mais simples possível

$$\Delta\epsilon = h\nu \quad (1.36)$$

onde h é uma constante de proporcionalidade conhecida como *constante de Planck* e cujo valor experimental atual no SI é

$$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J s}. \quad (1.37)$$

Sob a hipótese de que ϵ é uma quantidade discreta, precisamos refazer o cálculo da energia média $\bar{\epsilon}$, trocando as integrais por somas discretas

$$\bar{\epsilon} = \frac{\int_0^{\infty} \epsilon P(\epsilon) d\epsilon}{\int_0^{\infty} P(\epsilon) d\epsilon} \longrightarrow \bar{\epsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n P(\epsilon_n)}{\sum_{n=0}^{\infty} P(\epsilon_n)}, \quad \text{com } \epsilon_n \equiv nh\nu. \quad (1.38)$$

Rayleigh-Jeans
Planck

Temos então

$$\bar{\epsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu \frac{e^{-nh\nu/k_B T}}{k_B T}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nh\nu/k_B T}}{k_B T}} = k_B T \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha e^{-n\alpha}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}}, \quad (1.39)$$

em que na última passagem, definimos a variável auxiliar $\alpha \equiv h\nu/k_B T$. O denominador da equação anterior é uma série geométrica. Definindo $x \equiv e^{-\alpha}$, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-e^{-\alpha}}. \quad (1.40)$$

Introduzindo uma variável auxiliar β , podemos escrever o numerador como

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha e^{-n\alpha} = - \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{d}{d\beta} e^{-n\alpha\beta} \right]_{\beta=1} = - \left[\frac{d}{d\beta} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha\beta} \right) \right]_{\beta=1}. \quad (1.41)$$

Logo

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha e^{-n\alpha} = - \left[\frac{d}{d\beta} \frac{1}{1-e^{-\alpha\beta}} \right]_{\beta=1} = - \left[\frac{-\alpha^{-\alpha\beta}}{(1-e^{-\alpha\beta})^2} \right]_{\beta=1} = \frac{\alpha e^{-\alpha}}{(1-e^{-\alpha})^2}. \quad (1.42)$$

Portanto

$$\bar{\epsilon} = k_B T \frac{\alpha e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}} = \frac{h\nu e^{-h\nu/k_B T}}{1-e^{-h\nu/k_B T}}, \quad (1.43)$$

ou de forma equivalente

$$\bar{\epsilon}(\nu) = \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}. \quad (1.44)$$

O limite de baixas frequências da teoria de Planck será tomado comparando-se a energia do pacote $\Delta\epsilon = h\nu$ com a energia clássica média no equilíbrio térmico $k_B T$, ou seja, $h\nu \ll k_B T$. Nesse limite, como desejado por Planck, a sua teoria e a de Rayleigh-Jeans coincidem

$$\bar{\epsilon} \left(\nu \ll \frac{h}{k_B T} \right) \simeq \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{k_B T} + \dots - 1} \simeq k_B T. \quad (\text{baixas frequências}) \quad (1.45)$$

Já no limite de altas frequências ($h\nu \gg k_B T$), devido à presença do termo exponencial na equação 1.44, temos

$$\bar{\epsilon} \left(\nu \gg \frac{h}{k_B T} \right) \simeq 0. \quad (\text{altas frequências}). \quad (1.46)$$

Dessa forma, a densidade de energia por intervalo de frequência $\rho_T(\nu)$ na teoria de Planck satisfaz

$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{[N(\nu)d\nu] \times \bar{\epsilon}(\nu)}{V} = \frac{1}{a^3} \left[\pi \left(\frac{2a}{c} \right)^3 \nu^2 d\nu \right] \left[\frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \right], \quad (1.47)$$

ou seja

$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} d\nu \quad (\text{Planck}). \quad (1.48)$$

Podemos escrever ρ_T também em função do comprimento de onda λ , impondo que a densidade de energia emitida no intervalo infinitesimal de frequência $[\nu, \nu + d\nu]$ seja mapeada no correspondente intervalo de comprimento de onda $[\lambda, \lambda + d\lambda]$

$$|\rho_T(\lambda)d\lambda| = |\rho_T(\nu)d\nu| \implies \rho_T(\lambda) = \rho_T(\nu) \left| \frac{d\nu}{d\lambda} \right|, \quad (1.49)$$

e usando a relação de dispersão usual de ondas eletromagnéticas livres $c = \lambda\nu$, temos

$$\rho_T(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} d\lambda \quad (\text{Planck}). \quad (1.50)$$

Assim como $\rho_T(\nu)$ assume seu valor máximo numa frequência ν_{max} (de acordo com a lei de Wien), $\rho_T(\lambda)$ também deve exibir um máximo para algum comprimento de onda λ_{max} . Deve-se tomar cuidado, entretanto, com o fato de que, apesar de estarmos lidando com radiação emitida na forma de ondas eletromagnéticas livres, $\lambda_{max}\nu_{max} \neq c$ (!). Você deve fornecer uma explicação para esse fato aparentemente contraintuitivo na lista de exercícios 1a.

A figura 1.6 mostra a radiância espectral $R_T(\lambda) = \frac{c}{4}\rho_T(\lambda)$, definida como:

$R_T(\lambda)d\lambda \equiv$ “energia por unidade de tempo e por unidade de área emitida na forma de radiação no intervalo de comprimentos de onda $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ ”, de forma que a unidade da radiância espectral é

$$[R_T(\lambda)] = \frac{[\text{energia}]}{[\text{tempo}] \times [\text{área}] \times [\text{comprimento de onda}]} = \text{W m}^{-2} \text{ m}^{-1} (\text{SI})$$

Em 1965, os engenheiros americanos Arno Penzias e Robert Wilson da Bell Labs, ao operarem uma antena para comunicação via satélite, descobriram a chamada radiação cósmica de fundo (CMB do inglês *Cosmic Microwave Background*)⁴, um campo de radiação altamente

⁴A. Penzias and R. Wilson, *A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s.*, The Astrophysical Journal, vol. 142, pp. 419-421, 1965

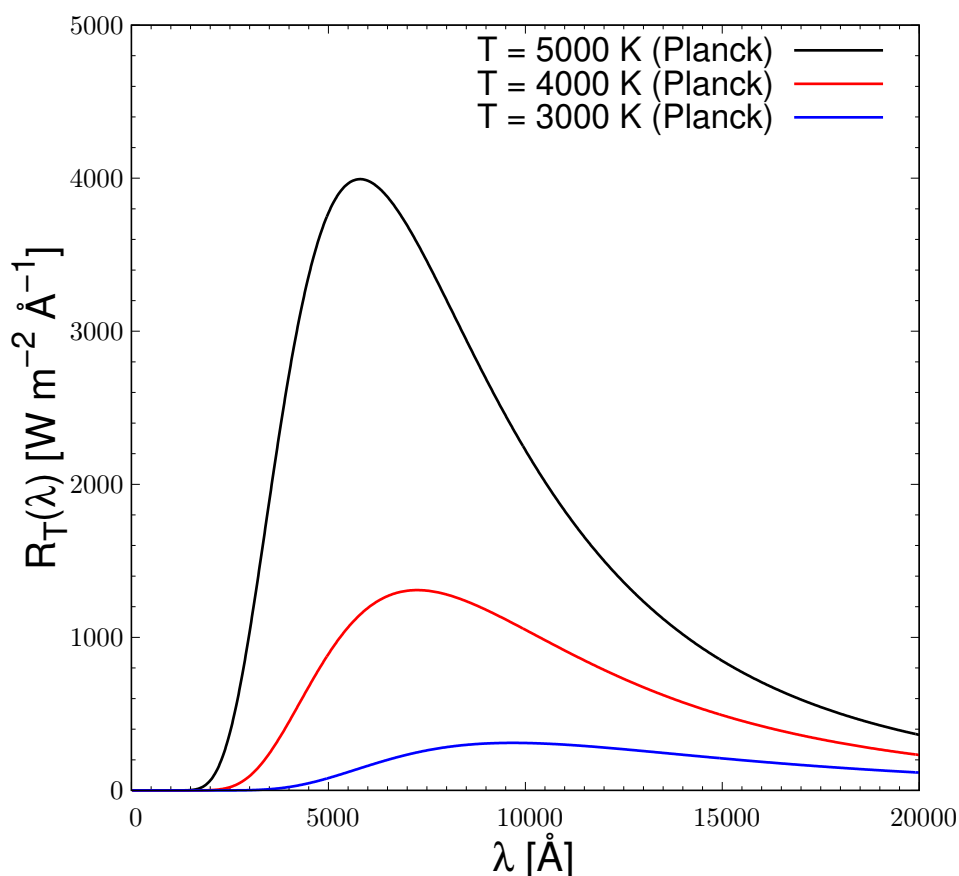


Figura 1.6: Radiação espectral em $\text{W m}^{-2} \text{Å}^{-1}$ em função do comprimento de onda em Angstroms ($1\text{Å} = 10^{-10} \text{ m}$) para corpos negros de três temperaturas diferentes: 3000 K (azul), 4000 K (vermelho) e 5000 K (preto).

isotrópico⁵. A interpretação teórica para o CMB é que se trata de um campo de radiação primordial, isto é, criado durante o Big Bang e em equilíbrio térmico. A expansão do universo, ao longo dos cerca de 13.7 bilhões de anos após o Big Bang, levou a um resfriamento do CMB, de forma que sua temperatura atual deveria ser de apenas alguns Kelvins acima do zero absoluto. Na década de 1990, o satélite COBE mediu pela primeira vez o espectro dessa radiação num amplo intervalo de frequências na região de microondas⁶. A figura 1.7 mostra a radiação espectral por unidade de ângulo sólido, ou intensidade, isto é $R_T(\nu)/4\pi$ medida pelo COBE⁷. A curva preta sólida representa a radiação de um corpo negro a temperatura $T_{\text{CMB}} = 2.725 \text{ K}$. O CMB é, possivelmente, o sistema físico mais próximo de um corpo negro já medido pelo

⁵Os níveis típicos de anisotropia observados são de uma parte em 100000 (10^{-5}).

⁶Mather et al. 1994, *Astrophysical Journal*, 420, 439, *Measurement of the Cosmic Microwave Background Spectrum by the COBE FIRAS Instrument*, Wright et al. 1994, *Astrophysical Journal*, 420, 450, *Interpretation of the COBE FIRAS CMBR Spectrum*,

⁷A intensidade está em MJy sr^{-1} (mega-Jensky por esteroradiano), onde $1 \text{ Jy} = 10^{-26} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$

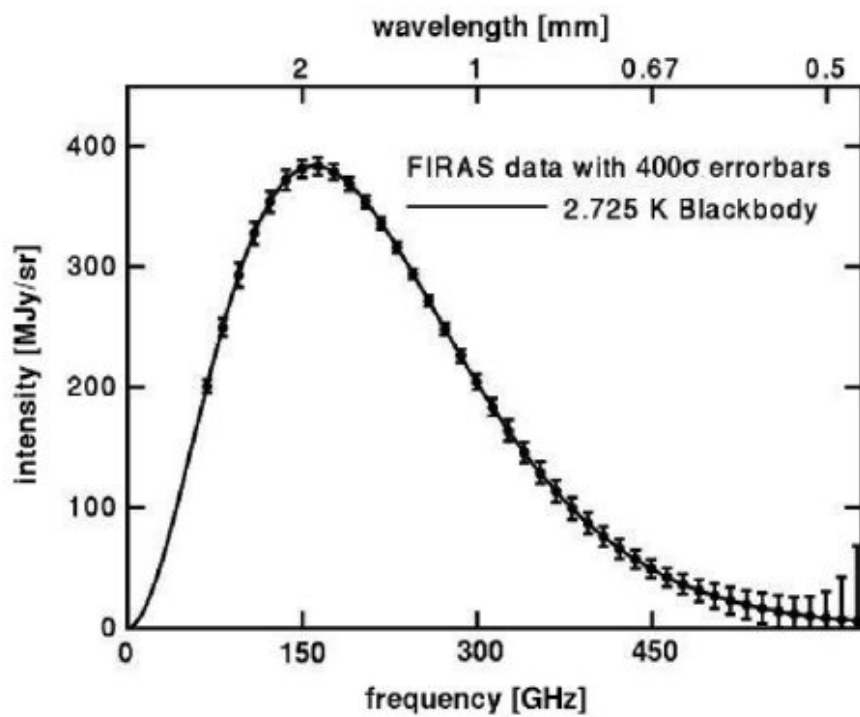


Figura 1.7: Radiância espectral por unidade de ângulo sólido ($R_T(\nu)/4\pi$) em MJy sr^{-1} da radiação cósmica de fundo (CMB) medida pelo satélite COBE. A curva contínua preta representa a radiância de um corpo negro a temperatura de 2.725 K. As barras de incerteza foram multiplicadas por um fator 400 para se tornarem visíveis a olho nu. Fonte: Mather et al. 1994, ApJ, 420, 439.

homem.

Já a figura 1.8 mostra a radiância espectral $R_T(\lambda)$ do sol na região do ultravioleta, visível e infravermelho medida no topo da atmosfera e no nível do mar. No mesmo gráfico, a radiância espectral de um corpo negro a temperatura $T = 5778^\circ\text{C}$ é mostrado para efeito de comparação. Para essa temperatura, o corpo negro possui uma radiância total igual àquela medida para o sol, ou seja, $R_T = 1367 \text{ W m}^{-2}$, também conhecida como *constante solar*. Perceba que a aproximação de que a atmosfera solar emite como um corpo negro é válida para se obter uma estimativa inicial da sua temperatura, mas claramente essa hipótese tem suas limitações, já que na superfície solar há fenômenos fora do equilíbrio em ação. O espectro ao nível do mar indica forte absorção em vários comprimentos de onda associada a moléculas específicas na atmosfera terrestre como água, oxigênio e dióxido de carbono.

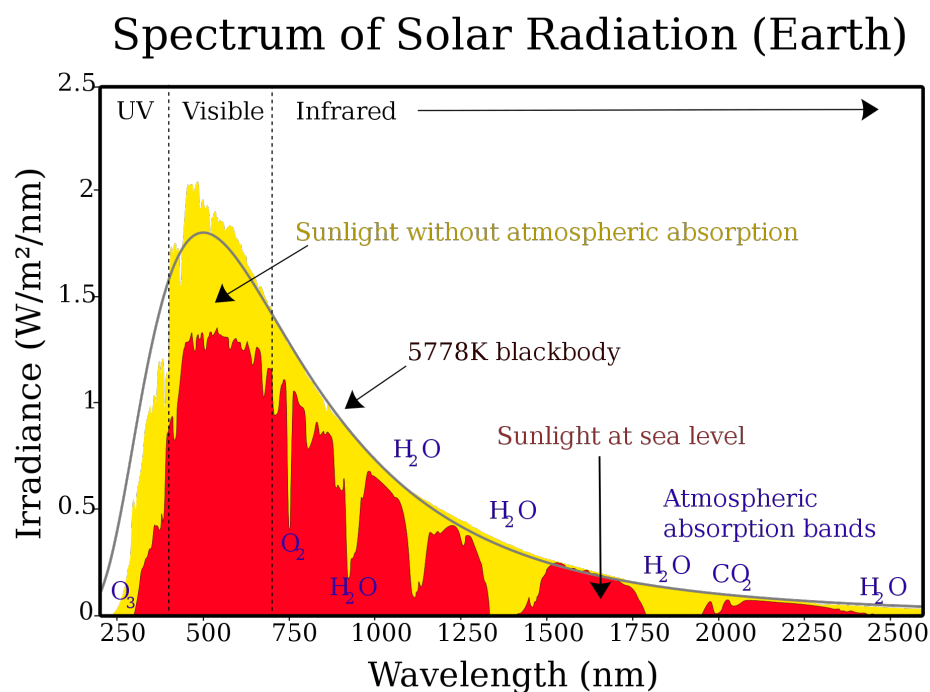


Figura 1.8: Radiância espectral $R_T(\lambda)$ solar em $\text{W m}^{-2} \text{nm}^{-1}$ em função do comprimento de onda em nm medida no topo da atmosfera (amarelo) e no nível do mar (vermelho). Para comparação, a radiância de um corpo negro ideal a temperatura $T = 5778^\circ\text{C}$ é mostrada em preto. Fonte: Solar irradiance. (2023, August 15). In Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Solar_irradiance

Capítulo 2

Comportamento corpuscular da radiação

2.1 O efeito fotoelétrico

Uma série de experimentos realizados nas três primeiras décadas do século XX consolidaram a ideia de que a radiação possui aspectos corpusculares quando analisamos a sua interação com a matéria. Esses mesmos experimentos também forneceram amplas evidências de que o campo eletromagnético é quantizado, ou sejam formado de pequenos pacotes fundamentais que iremos estudar neste capítulo.

Até o início do século XX, a ideia de que fenômenos eletromagnéticos eram bem explicados em termos de sua natureza ondulatória estava bem estabelecida. Essa ideia encontrava respaldo tanto do lado experimental quanto do teórico. Os experimentos de 1886 e 1887 realizados por Heinrich Hertz em Karlsruhe ^{1 2 3} confirmaram a existência de ondas eletromagnéticas previstas na teoria de Maxwell. Na teoria Maxwelliana, a luz é um exemplo de onda eletromagnética e experiências de interferência e difração realizados no início do século XIX por Thomas Young ^{4 5} corroboravam com a sua natureza ondulatória.

Ao tentar justificar sua hipótese de quantização da energia no interior da cavidade, Planck preferiu pensar que os elétrons nas paredes da cavidade é que emitiam de forma discretizada. Entretanto, Einstein, em 1905, foi além e propôs uma nova teoria em que o próprio campo eletromagnético (incluindo aquele existente no interior de uma cavidade) teria uma certa "granularidade", ou seja, existiria na forma de pequenos pacotes ou *quanta*, mais tardes chamados

¹Hertz, H.R. *Ueber sehr schnelle elektrische Schwingungen*, Annalen der Physik, vol. 267, no. 7, p. 421-448, May 1887

²Hertz, H.R. *Ueber die Einwirkung einer geradlinigen elektrischen Schwingung auf eine benachbarte Strombahn*, Annalen der Physik, vol. 270, no. 5, p. 155-170, March 1888

³Hertz, H.R. *Ueber die Ausbreitungsgeschwindigkeit der electrodynamischen Wirkungen*, Annalen der Physik, vol. 270, no. 7, p. 551-569, May 1888

⁴Young, T. (1807). *A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts*. Vol. 1. William Savage. Lecture 39, pp. 463-464.

⁵ Young, T. (1802). *The Bakerian Lecture: On the Theory of Light and Colours*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 92: 12-48.

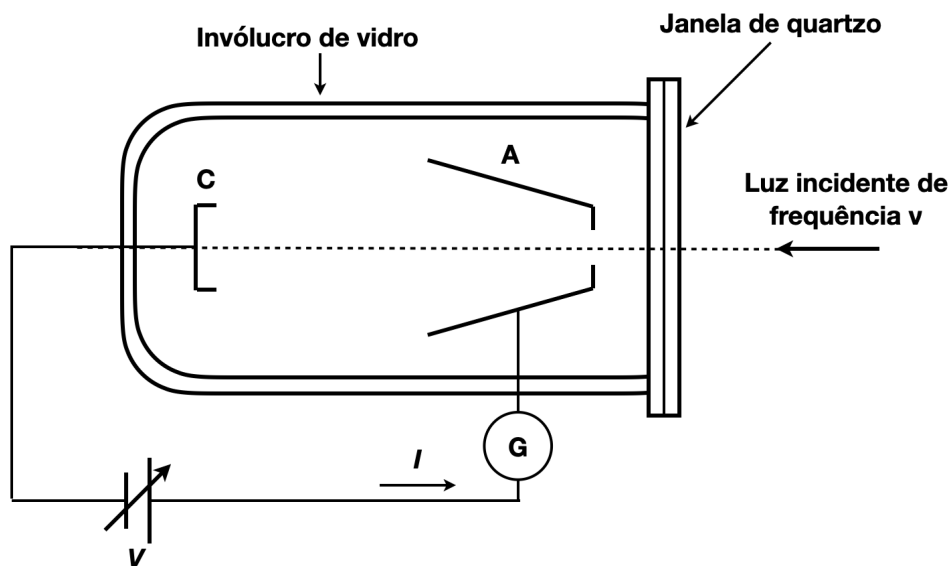


Figura 2.1: Representação esquemática do aparato experimental para medição do efeito fotoelétrico. Um invólucro de vidro evacuado possui dois eletrodos. Um cátodo C emissor de elétrons e um ânodo A coletor de elétrons. Uma diferença de potencial $V = V_A - V_C$ é aplicada entre C e A e a corrente elétrica I induzida quando da incidência de luz de frequência ν sobre C é medida pelo galvanômetro G.

de *fótons*. A teoria de Einstein explicava com sucesso os experimentos de emissão fotoelétrica realizados por Philipp Lenard entre 1886 e 1902⁶. A figura 2.1 contém um desenho esquemático do aparato usado por Lenard para suas medidas. Nela, dois eletrodos metálicos (o cátodo C e o ânodo A) se encontram dentro de um invólucro de vidro no interior do qual se faz vácuo. O invólucro possui uma janela de quartzo na sua parte frontal, permitindo a entrada de luz cuja frequência ν pode ser controlada. Entre o cátodo e o ânodo, uma diferença de potencial controlável $V = V_A - V_C$ é aplicada. Lenard observou que a incidência de luz ultravioleta sobre C gerava uma corrente elétrica I mensurável através do galvanômetro G .

Uma contribuição fundamental dos estudos de Lenard do efeito fotoelétrico foi demonstrar que a energia dos elétrons emitidos pelo cátodo era independente da intensidade da luz incidente. Essa constatação foi essencial na formulação de Einstein do conceito de *quantum* do campo eletromagnético⁷. Todavia, reconhecida a devida importância de tais medidas, elas ainda podem ser consideradas, de certo modo, qualitativas. Em 1914, Millikan fez medidas bastante minuciosas e sistemáticas, de modo a testar da forma mais direta possível as previsões de Einstein de uma teoria corpuscular da luz⁸.

⁶Lenard, P. (1902). *Ueber die lichtelektrische Wirkung*. Annalen der Physik. 313 (5): 149-198.

⁷Einstein, Albert (1905). *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt* [On a Heuristic Point of View about the Creation and Conversion of Light]. Annalen der Physik (in German). 17 (6): 132-148

⁸Millikan, R. (1914). *A Direct Determination of "h"*. Physical Review. 4 (I): 73-75

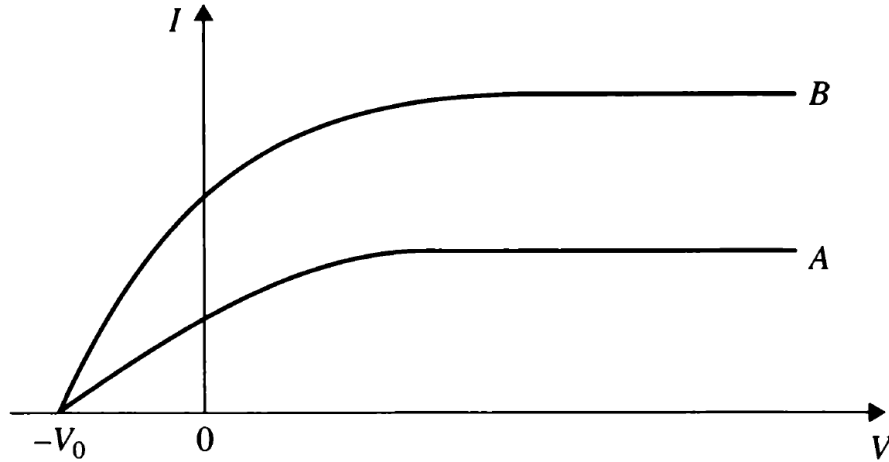


Figura 2.2: Gráfico da corrente I no galvanômetro da figura 2.1 em função da diferença de potencial V aplicada entre o cátodo e o ânodo para duas intensidades da luz incidente (A e B). Diferentes intensidades incidentes, levam a correntes de saturação distintas. Entretanto, o potencial limite $V_0 = -V = V_C - V_A$ para o qual a corrente vai a zero é independente da intensidade luminosa.

As medidas experimentais obtidas com o aparato representado na figura 2.1 podem ser resumidas nos gráficos das figuras 2.2 e 2.3. Perceba que as variáveis experimentais de controle são a tensão V entre o cátodo C (emissor de elétrons) e o ânodo A (coletor de elétrons), a intensidade $|\overline{\mathbf{S}}|$ (entendida como a média no tempo da magnitude do vetor de Poynting $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ e medida em W m^{-2} no SI) e a frequência ν da luz incidente.

Perceba também que o gráfico $I \times V$ da figura 2.2 indica a existência de uma corrente de saturação, não importa o quão intensa seja a luz incidente. As medidas de corrente e tensão são mostradas na figura para duas intensidades (A e B). O mesmo gráfico indica que a corrente de saturação final depende da intensidade da onda, mais precisamente, ela é diretamente proporcional à intensidade incidente ($I_{sat} \propto |\overline{\mathbf{S}}|$). Além disso, vemos que existe uma tensão negativa entre o cátodo e o ânodo ($-V_0$) para a qual a corrente no galvanômetro é nula e, mais importante ainda, o valor dessa tensão independe da intensidade da onda. A tensão positiva V_0 é chamada de *potencial limite*.

Ao incidir sobre o cátodo, a luz ejeta elétrons da superfície do metal, de forma que tais elétrons devem emergir de C com uma certa distribuição de energias cinéticas. Para $V > 0$, o campo elétrico aponta de A para C, enquanto para $V < 0$, ele aponta de C para A. Ou seja, para $V > 0$, os elétrons são acelerados na direção de A, enquanto para $V < 0$, eles são desacelerados (ver figura 2.4).

Dessa forma, a existência do potencial limite V_0 implica que os elétrons emitidos em C devem ter uma energia cinética máxima K_{max} relacionada com V_0 por

$$K_{max} = eV_0, \quad (2.1)$$

uma vez que nessa situação, o trabalho realizado pelo campo elétrico \mathbf{E} sobre o elétron no

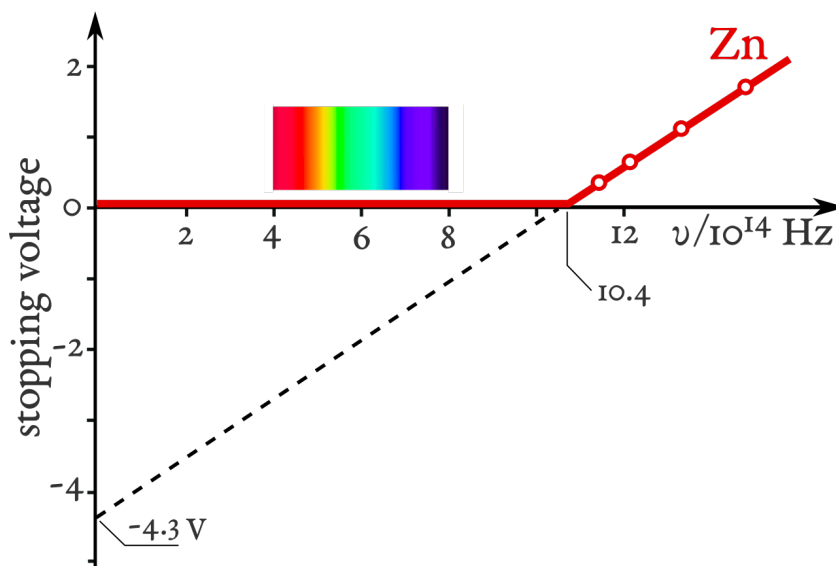


Figura 2.3: Potencial limite (*stopping voltage*) em Volts em função da frequência ν em Hertz da luz incidente sobre um cátodo de zinco, cuja função trabalho $w = 4.3$ eV. Abaixo da frequência $\nu_0 = 10.4 \times 10^{14}$ Hz, não há liberação de fotoelétrons do cátodo. Fonte: Photoelectric effect. (2023, September 2). In Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Photoelectric_effect.

percurso CA ($W = -eV_0$) é igual à variação de energia cinética $\Delta K = -K_{max}$, levando a corrente fotoelétrica a zero para tensões menores que $-V_0$. Já as medidas do potencial limite para diferentes frequências de luz incidente apresentadas no gráfico $V_0 \times \nu$ da figura 2.3 mostram claramente que o potencial limite, por sua vez, é diretamente proporcional à frequência. Além disso, indicam que existe um frequência mínima ν_0 abaixo da qual não se observa o efeito fotoelétrico, ou seja, não há emissão de elétrons do cátodo para frequências $\nu < \nu_0$.

A teoria clássica da luz (ondulatória) falha na explicação dessas medidas experimentais por três razões principais:

1. Na teoria clássica, a intensidade da onda é proporcional ao quadrado da amplitude do campo elétrico ($|\mathbf{S}| \propto |\mathbf{E}|^2$) e a interação luz-elétron se dá por meio da força elétrica $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$ exercida pelo campo da onda incidente sobre os elétrons do cátodo. Nesse cenário, a energia cinética máxima K_{max} , e portanto V_0 , deveriam depender da intensidade luminosa.
2. Classicamente, o efeito fotoelétrico deveria ocorrer para qualquer frequência da luz incidente, dependendo somente da intensidade da onda e do tempo de observação. Do ponto de vista clássico, o campo elétrico da onda incidente age de forma contínua sobre o elétron do cátodo, acelerando-o até que este ganhe energia suficiente para escapar do cátodo.

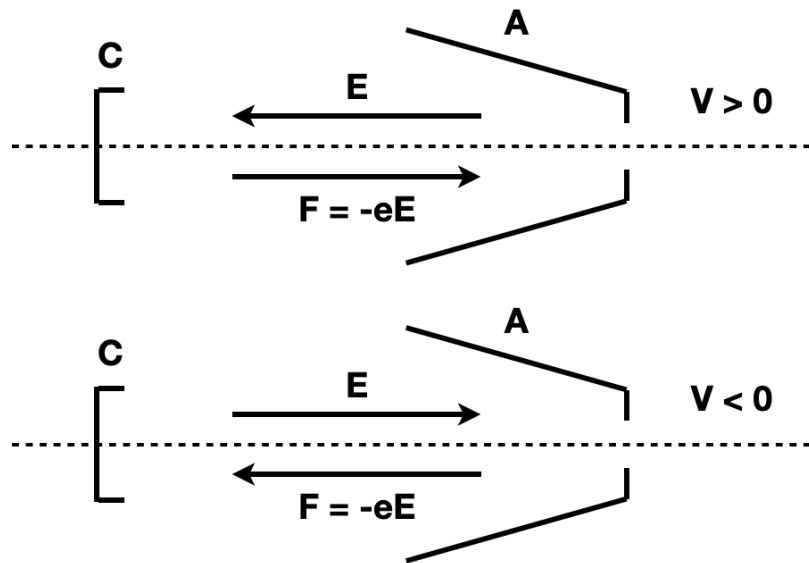


Figura 2.4: Campo elétrico \mathbf{E} e força elétrica $e\mathbf{E}$ agindo sobre os elétrons liberados pelo cátodo C para tensões $V = V_A - V_C$ positivas (em cima) e negativa (em baixo), indicando aceleração (em cima) e desaceleração (em baixo) entre C e A.

3. Também de acordo com o cenário clássico, para uma dada intensidade luminosa incidente, deve haver um intervalo de tempo entre a chegada da onda no cátodo e a emissão dos primeiros fotoelétrons. O atraso em questão deve ser cada vez mais pronunciado, quanto menor a intensidade luminosa. Isso se deve ao fato de que a energia luminosa clássica está distribuída uniformemente na frente de onda e a área efetiva para absorção de energia por um elétron deve ser aquela representada pela eletrosfera do correspondente átomo do cátodo, portanto, a área transversal de absorção seria aquela de um disco de raio atômico ($\sim 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$). Em especial, para baixas intensidades incidentes, o elétron deve permanecer absorvendo energia da onda luminosa até ganhar o suficiente para se livrar da barreira de potencial entre o interior e o exterior do metal. Todavia, nenhum atraso desse tipo foi observado até hoje.

EXERCÍCIO: Usando a teoria ondulatória clássica, estime o atraso temporal entre a chegada da luz incidente sobre um cátodo contendo sódio na sua superfície. Assuma que a luz incidente é gerada por uma lâmpada de potência $P = 1$ W (emitida isotropicamente) e posicionada a $L = 1$ m do cátodo. Adote como energia mínima para que um elétron seja ejetado do sódio o valor $\Delta E = 2,1$ eV.

SOLUÇÃO

Para emissão isotrópica, a intensidade luminosa que chega ao cátodo de sódio é

$$|\mathbf{S}| = \frac{P}{4\pi L^2},$$

de modo que o tempo necessário para um elétron da placa adquirir uma energia ΔE por meio da absorção contínua de energia a partir da frente de onda durante um tempo Δt pode ser obtido por

$$\Delta E = |\mathbf{S}| \pi r^2 \Delta t,$$

onde assumimos que a área efetiva de absorção por um átomo de sódio pode ser aproximada por um disco de raio r (igual ao raio atômico que aqui tomaremos com 1 \AA). Portanto

$$\Delta t = \frac{\Delta E}{|\mathbf{S}| \pi r^2} = \frac{4\Delta E}{P} \left(\frac{L}{r}\right)^2 = \frac{4 \times (2,1 \text{ eV}) \times (1,6 \times 10^{-19} \text{ J/eV})}{1 \text{ J/s}} \left(\frac{1 \text{ m}}{10^{-10} \text{ m}}\right)^2 \simeq 134,4 \text{ s}.$$

Ou seja, a teoria clássica indica nesse caso que seria necessário um pouco mais de dois minutos para observar os primeiros elétrons serem ejetados da placa coberta de sódio. Entretanto, as primeiras medidas do efeito fotoelétrico já indicavam que o atraso, se existisse, deveria ser menor que 10^{-9} s (!)

2.2 Teoria de Einstein do efeito fotoelétrico

Na teoria de Einstein, o campo eletromagnético é formado de pequenos pacotes de energia, ou *quantum*, mais tarde denominado de *fóton*. Ainda de acordo com Einstein, experimentos de interferência e difração são feitos em condições onde o número de fótons envolvidos é muito grande, de modo que os resultados nesses casos são determinados pelo comportamento médio desses numerosos fótons. Dizemos que nesses experimentos o *número de ocupação* de fótons é muito grande. Nessas condições, a propagação dos fótons é bem descrita por ondas eletromagnéticas clássicas. A teoria de Einstein traz toda uma nova maneira de interpretar a forma como a radiação é emitida e absorvida.

De acordo com Einstein, um quantum de energia E de um fóton está associado à sua frequência ν por meio de

$$E = h\nu \quad (\text{Einstein}), \quad (2.2)$$

e que no caso particular do efeito fotoelétrico, esse fóton é completamente absorvido por um elétron do cátodo. Em tais condições, a energia cinética do elétron ao emergir do cátodo é dada por

$$K = h\nu - w, \quad (2.3)$$

onde w é a energia cinética total perdida pelo elétron para sair do metal e deve envolver tanto a energia gasta para escalar a barreira de potencial entre o interior e o exterior do cátodo, quanto perdas por colisão. Para um elétron que emerge do metal sem colisões, sua energia cinética é máxima e, portanto

$$K_{max} = h\nu - w_0, \quad (2.4)$$

onde w_0 , chamada de *função trabalho*, é a energia mínima para extrair um elétron do cátodo. A função trabalho é uma propriedade característica do material do cátodo e para os metais é da ordem de alguns eV.

A teoria de Einstein explica todos os aspectos dos dados do efeito fotoelétrico:

1. A energia cinética K_{max} não depende da intensidade da onda incidente.

Uma variação na intensidade da luz incidente altera apenas a quantidade de fótons por unidade de área e de tempo atingindo o cátodo, mas não a frequência de cada fóton, portanto, de acordo com a eq. 2.4, a energia cinética máxima, e por conseguinte V_0 , é independente da intensidade incidente.

2. Existência de uma frequência de corte ν_0 .

Para que o efeito fotoelétrico ocorra, a energia do fóton incidente deve ser no mínimo w_0 , logo

$$h\nu_0 = w_0 \quad \implies \quad \nu_0 = \frac{w_0}{h}. \quad (2.5)$$

3. Ausência de atraso na emissão.

Uma vez que a energia é suprida ao elétron em pacotes concentrados e não espalhada uniformemente pela frente de onda, tão logo o cátodo é iluminado, haverá pelo menos um fóton para dar início ao efeito.

Ainda de acordo com a teoria de Einstein, como $K_{max} = eV_0 = h\nu - w_0$, temos que

$$V_0 = \frac{h}{e}\nu - \frac{w_0}{e}, \quad (2.6)$$

ou seja, deve existir uma relação linear entre o potencial limite e a frequência da luz incidente, cujo coeficiente angular é igual à razão entre a constante de Planck e a carga do elétron h/e .

Em 1914, Robert Millikan obteve o valor $h = 6,57 \times 10^{-34}$ J s com incerteza de 5%⁹, valor este compatível com o obtido por Planck usando sua teoria de quantização da energia contida nos modos normais de uma cavidade em equilíbrio térmico. A carga e do elétron ($=1,6 \times 10^{-19}$ C) foi determinada anteriormente pelo próprio Millikan numa série de medidas na Universidade de Chicago iniciadas em 1909 e que culminaram com seu famoso experimento da gota de óleo¹⁰. Portanto, conhecendo-se a carga do elétron, um ajuste do modelo linear $V_0 \times \nu$ da equação 2.6 fornece, por meio dos coeficientes angular e linear, medidas da constante de Planck e da função trabalho, respectivamente. Em cálculos de efeito fotoelétrico e de sistemas atômicos em geral, onde as energias típicas são dadas em eV, é útil trabalhar com a constante de Planck em unidades apropriadas

$$h = 4,14 \times 10^{-15} \text{ eV s.} \quad (2.7)$$

A obtenção de valores consistentes da constante h em dois problemas completamente distintos, do ponto de vista experimental, ou seja, radiação de cavidade e efeito fotoelétrico, deu robustez à teoria corpuscular da luz.

EXERCÍCIO (E&R): Usando a teoria de Einstein para a luz, estime o fluxo de fótons incidente sobre uma placa metálica quando iluminada por uma lâmpada de $P = 1$ W a $L = 1$ m de distância. Assuma que a emissão é isotrópica e a luz é monocromática com comprimento de onda $\lambda = 5890$ Å (luz amarela).

SOLUÇÃO

A energia de cada fóton emitido pela lâmpada é

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(4,14 \times 10^{-15} \text{ eV s}) \times (3 \times 10^8 \text{ m/s})}{5,89 \times 10^{-7} \text{ m}} = 2,1 \text{ eV} = 3,4 \times 10^{-19} \text{ J.}$$

Dessa forma, o fluxo de fótons é dado por

$$\Phi = \frac{|\mathbf{S}|}{h\nu} = \frac{P}{4\pi L^2} \frac{1}{h\nu} = \left(\frac{1 \text{ J/s}}{4\pi(1 \text{ m})^2} \right) \left(\frac{1}{3,4 \times 10^{-19} \text{ J}} \right) = 2,4 \times 10^{17} \frac{\text{fótons}}{\text{m}^2 \text{ s}}.$$

2.3 Espalhamento Compton

A natureza corpuscular da radiação eletromagnética se manifestou de forma espetacular num experimento realizado por Arthur Holly Compton em 1923¹¹, no qual um feixe de raios-X era

⁹Millikan, R. (1914). *A Direct Determination of "h"*. Physical Review. 4 (I): 73-75

¹⁰Millikan, R. A. (1913). *On the Elementary Electrical Charge and the Avogadro Constant*. Physical Review. Series II. 2 (2): 109-143.

¹¹Compton, Arthur H. (May 1923). *A Quantum Theory of the Scattering of X-Rays by Light Elements*. Physical Review. 21 (5): 483-502.

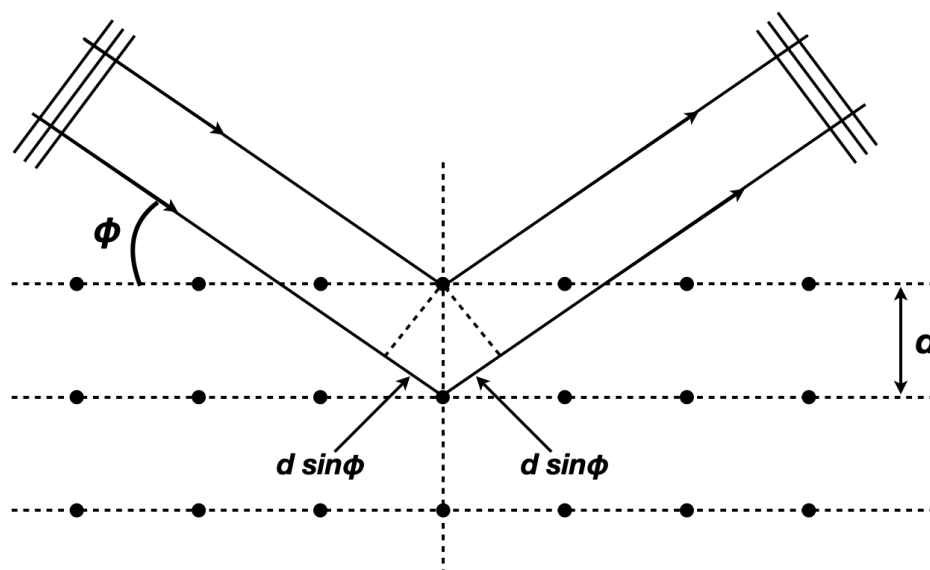


Figura 2.5: Espalhamento de raios-X por planos atômicos adjacentes de uma rede cristalina de constante d . Para um ângulo de espalhamento como representado na figura, há uma diferença de caminho óptico igual a $2 d \sin \theta$ entre os feixes espalhados.

espalhado por um alvo de grafite. Os raios-X tinham sido descobertos por Wilhelm Röntgen em 1895, de forma que já se sabia que se tratava de radiação eletromagnética de alta frequência.

O espalhamento de raios-X por diversas substâncias foi primeiro estudado por C.G. Barkla em 1909, mas a interpretação precisa dos resultados era dificultada pelo fato de que ainda não era possível, na época, medir o comprimento de onda dessa radiação. Entretanto, em 1912, Max von Laue e mais tarde W. L. Bragg¹² mostraram que os comprimentos de onda podiam ser determinados estudando-se difração de raios-X em cristais, e validaram o método com diversas substâncias para as quais análises físico-químicas forneciam informação sobre a estrutura cristalina.

A chamada *lei de Bragg* estabelece uma relação entre o comprimento de onda λ da radiação incidente no cristal, o ângulo de espalhamento ϕ e a constante da rede cristalina d , de modo que feixes refletidos por planos atômicos adjacentes interfiram de forma construtiva, como mostrado na figura 2.5. Ou seja, a diferença de caminho óptico entre os dois feixes que emergem do cristal deve ser igual a um número inteiro n de comprimentos de onda. Nessas condições, temos

$$n\lambda = 2 d \sin \phi. \quad (\text{Bragg}) \quad (2.8)$$

O experimento de Compton, que descreveremos a seguir, só foi possível graças à determinação precisa dos comprimentos de onda dos raios-X usando um espectrômetro cristalino baseado na lei de difração de Bragg. A figura 2.6 mostra um esquema do experimento utilizado

¹²Bragg, W. H.; Bragg, W. L. (1913). *The Reflexion of X-rays by Crystals*. Proc. R. Soc. Lond. A. 88 (605): 428-38.

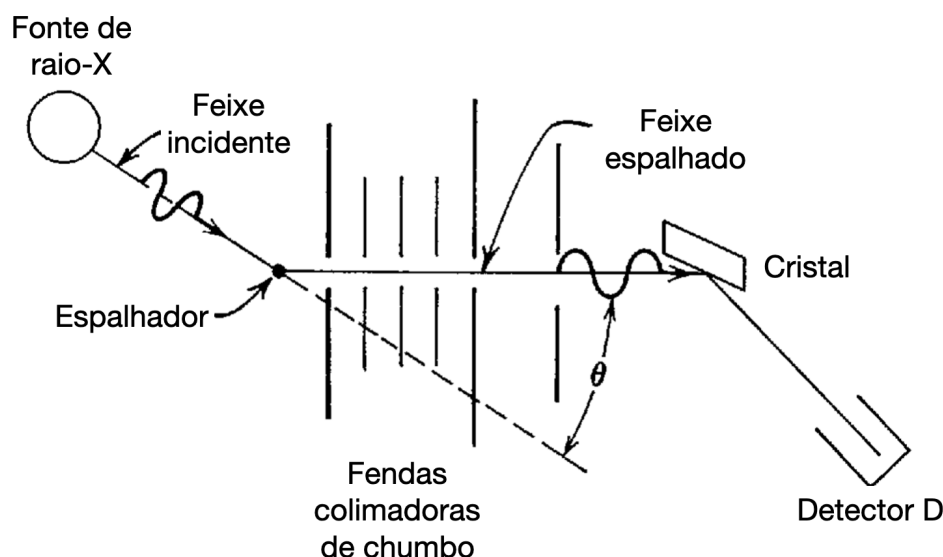


Figura 2.6: Representação esquemática do aparato experimental usado por Compton em 1923. Uma fonte de raios-X produz um feixe incidente sobre um material espalhador (grafite), dando origem a um feixe de raios-X espalhados em ângulo θ que por sua vez é colimado por um conjunto de fendas de chumbo e incide sobre um cristal que o difrata em direção ao detector D onde sua intensidade é finalmente registrada. Figura adaptada de [1].

por Compton em 1923. Nele, um feixe de raios-X monocromático de comprimento de onda λ_0 incide sobre um material espalhador (grafite neste caso), de modo que um feixe de raios-X espalhados emerge do material com ângulo θ , medido com respeito ao feixe incidente, e é colimado por uma série de fendas feitas de chumbo. A colimação é tal que o feixe espalhado é focalizado sobre um cristal, cuja constante de rede é conhecida, de modo que o comprimento de onda do feixe espalhado pode ser determinado via lei de Bragg medindo-se os ângulos de espalhamento ϕ no cristal que maximizam a intensidade no detector de raios-X.

Os dados mostraram que, embora o feixe incidente fosse inicialmente monocromático de comprimento de onda λ_0 , a intensidade de raios-X espalhados apresenta picos em dois comprimentos de onda, o original (λ_0) e um comprimento λ_1 , maior que o original por uma quantidade $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0 > 0$, hoje conhecida como *deslocamento Compton* e que varia com o ângulo de espalhamento θ . A figura 2.7 mostra uma representação gráfica dos dados de Compton. Nela, a intensidade (medida no detector D) do feixe de raios-X espalhado é representada no eixo- y em função do seu comprimento de onda no eixo- x , esse último determinado a partir da lei de Bragg. Quatro ângulos de espalhamento são mostrados ($\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$). Com exceção do ângulo de espalhamento frontal $\theta = 0^\circ$, todos os demais apresentam dois picos em que o de menor comprimento de onda coincide com aquele do feixe incidente (λ_0), enquanto o segundo pico tem comprimento de onda cada vez mais afastado de λ_0 quanto maior o ângulo de espalhamento.

A presença desse segundo comprimento de onda não podia ser explicada pela teoria clássica

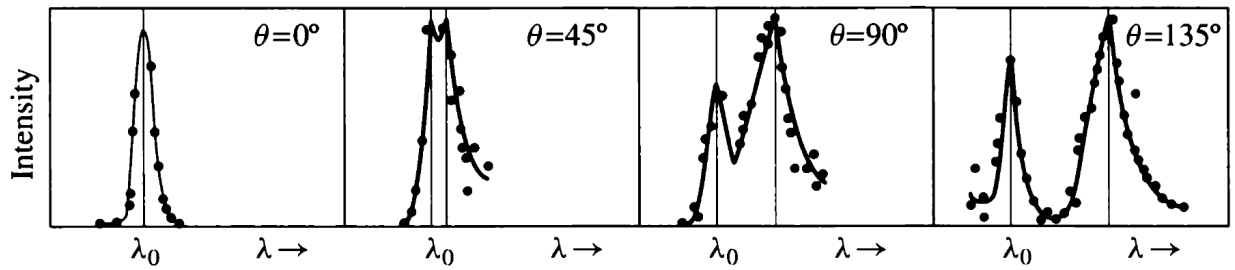


Figura 2.7: Gráfico da intensidade do feixe de raios-X espalhados (eixo- y) em função do seu comprimento de onda para quatro ângulos de espalhamento ($\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$). Os dados são os originais tomados de Compton. Extraído de [2].

de espalhamento desenvolvida por Thomson e Rayleigh e baseada na teoria eletromagnética de Maxwell. No espalhamento Rayleigh clássico, a radiação espalhada é gerada pelos elétrons do material espalhador. Tais elétrons são acelerados pelo campo elétrico $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t)$ da onda incidente, de forma a oscilarem na mesma frequência ω do campo. Diz-se que a onda eletromagnética incidente gera um momento de dipolo oscilante $\mathbf{p}(t)$ sobre cada elétron. Se a amplitude do dipolo eletrônico é p_0 e assumirmos, sem perda de generalidade que o campo elétrico na posição do elétron está na direção z , o momento de dipolo induzido é dado por

$$\mathbf{p}(t) = p_0 \cos(\omega t) \hat{z}. \quad (2.9)$$

Nessas condições, a teoria Maxwelliana implica que a uma distância r muito distante do dipolo elétrico, o vetor de Poynting \mathbf{S} é dado por

$$\mathbf{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \left(\frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{16\pi^2 c} \right) \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \cos^2[\omega(t - r/c)] \hat{\mathbf{r}}, \quad (2.10)$$

ou seja, a energia flui na direção radial ($\hat{\mathbf{r}}$) a partir de cada elétron e o próprio vetor de Poynting oscila na mesma frequência ω da onda eletromagnética incidente, indicando que a radiação emitida tem o mesmo comprimento de onda da radiação incidente. Se tomarmos a média no tempo do vetor de Poynting ao longo de um período completo $T = 2\pi/\omega$ de oscilação do campo, temos

$$\langle \mathbf{S} \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \mathbf{S} dt = \left(\frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \right) \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.11)$$

Das equações 2.10 e 2.11, vemos também que, classicamente, a intensidade espalhada é máxima na direção perpendicular ao campo elétrico ($\theta = \pi/2$), ou seja, é máximo no plano xy para uma onda incidente com polarização na direção z . Em particular, a potência por unidade área emitida ao longo da direção z ($\theta = 0$) é nula. Os interessados nos detalhes do cálculo anterior podem consultar o capítulo 11 da referência [3].

Compton interpretou seus resultados tratando os raios-X como partículas transportando tanto energia quanto momento linear. Já vimos que a teoria de Einstein para o efeito fotoelétrico postula que a radiação existe na forma de pequenos pacotes de energia $E = h\nu$. Ao mesmo tempo, sua teoria da relatividade restrita implica que a energia total de uma partícula relativística de massa de repouso m e velocidade v pode ser escrita como

$$E = \gamma mc^2, \quad \text{com} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta \equiv \frac{v}{c}. \quad (2.12)$$

Como fótons viajam à velocidade da luz, a energia finita $E = h\nu$ de um quantum do campo eletromagnético implica que eles têm massa nula e, portanto, sua energia relativística é puramente cinética. Ainda de acordo com a teoria da relatividade restrita de Einstein, podemos fazer uso da relação relativística energia-momento

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 = (mc^2 + K)^2, \quad (2.13)$$

que quando aplicada a fótons ($m = 0$) implica que

$$E = pc \quad \implies \quad p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (\text{fótons}). \quad (2.14)$$

Por outro lado, de acordo com a relação energia-momento 2.13, podemos escrever também

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 = m^2 c^4 + 2mc^2 K + K^2 \quad \implies \quad p^2 c^2 = K^2 + 2mc^2 K. \quad (2.15)$$

Vale a pena notar que tal relação se aplica também a uma onda eletromagnética clássica, já que a essa também está associada uma densidade de energia u (energia por unidade de volume)

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2, \quad (2.16)$$

bem como uma densidade de momento linear \mathcal{P}_{EM} (momento linear por unidade de volume) que pode ser escrita em termos do vetor de Poynting

$$\mathcal{P}_{\text{EM}} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}. \quad (2.17)$$

Tome uma onda eletromagnética plana monocromática de frequência ω se propagando na direção z

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z, t) &= E_0 \cos(kz - \omega t + \delta) \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{B}(z, t) &= \frac{E_0}{c} \cos(kz - \omega t + \delta) \hat{\mathbf{y}}, \end{aligned}$$

e obtenha uma relação entre $u(z, t)$ e $\mathcal{P}_{\text{EM}}(z, t)$.

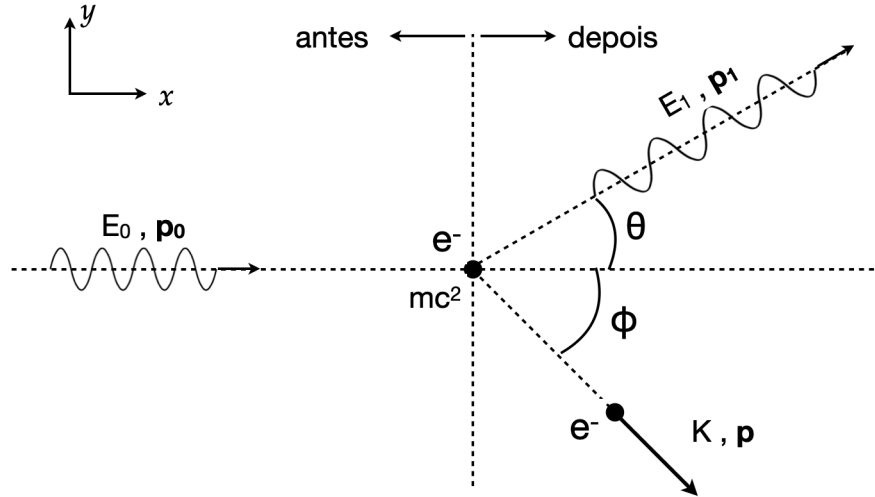


Figura 2.8: Geometria do espalhamento Compton de acordo com a teoria corpuscular da luz de Einstein. Um fóton de raio-X com energia $E_0 = h\nu_0$ e momento linear $\mathbf{p}_0 = E_0/c$ incide sobre um elétron em repouso e , portanto, de energia relativística inicial mc^2 . Após a interação fóton-elétron, um fóton emerge (feixe espalhado) fazendo um ângulo θ com a direção do fóton incidente e carrega energia E_1 e momento linear \mathbf{p}_1 , juntamente com o elétron de energia cinética K e momento linear \mathbf{p}_1 que faz um ângulo ϕ com a direção do fóton incidente.

Vamos então analisar o efeito Compton como um espalhamento elástico entre um fóton de raio-X incidente de energia E_0 e um elétron livre inicialmente em repouso com energia relativística mc^2 , no sentido de que tanto a energia relativística quanto o momento relativístico totais devem se conservar durante o processo. A rigor, os elétrons do grafite não estão livres. Entretanto, para o cálculo que se segue, assumiremos que as energias de ligação dos elétrons de interesse (\sim eV) podem ser desprezadas em comparação à energia dos fótons incidentes (\sim keV). A geometria do espalhamento é representada na figura 2.8.

De acordo com as energia, momentos e ângulos de espalhamento da figura 2.8, impondo conservação de momento linear ao espalhamento fóton-elétron em questão, obtemos

$$p_0 = p_1 \cos \theta + p \cos \phi \quad (2.18)$$

$$0 = p_1 \sin \theta - p \sin \phi \quad (2.19)$$

Já a conservação da energia relativística, que incluye energia de repouso mc^2 e energia cinética K , implica

$$E_0 + mc^2 = E_1 + K + mc^2, \quad (2.20)$$

de modo que a energia cinética K do elétron após o espalhamento pode ser escrita em termos da diferença de energia dos fótons incidente (E_0) e espalhado (E_1)

$$K = E_0 - E_1 = (p_0 - p_1)c. \quad (2.21)$$

A partir das equações 2.18 e 2.19 de conservação de momento linear, temos

$$(p_0 - p_1 \cos \theta)^2 + p_1^2 \sin^2 \theta = p^2 \implies p_0^2 - 2p_0 p_1 \cos \theta + p_1^2 = p^2, \quad (2.22)$$

de modo que se fizermos uso da relação 2.15, podemos reescrever o lado direito da última equação como

$$p_0^2 - 2p_0 p_1 \cos \theta + p_1^2 = \frac{K^2}{c^2} + 2mK, \quad (2.23)$$

enquanto a equação 2.21 nos leva a

$$p_0^2 - 2p_0 p_1 \cos \theta + p_1^2 = (p_0 - p_1)^2 + 2mc(p_0 - p_1) = p_0^2 - 2p_0 p_1 + p_1^2 + 2mc(p_0 - p_1). \quad (2.24)$$

Portanto

$$mc(p_0 - p_1) = p_0 p_1 (1 - \cos \theta), \quad (2.25)$$

de forma que dividindo ambos os lados da equação anterior por $p_0 p_1$, chegamos a

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0} = \frac{1}{mc} (1 - \cos \theta). \quad (2.26)$$

Se usarmos a relação entre momento linear e comprimento de onda para os fótons incidente e espalhados $p = h/\lambda$ da equação 2.14, chegamos à equação principal que relaciona os comprimentos de onda dos fótons envolvidos, o chamado *deslocamento Compton* $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0$, com o ângulo de θ de *espalhamento Compton*

$$\lambda_1 - \lambda_0 \equiv \Delta\lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta) \quad (\text{equação de Compton}). \quad (2.27)$$

Perceba novamente a presença da constante de Planck h no resultado final. A combinação h/mc possui unidades de comprimento e recebe o nome especial de *comprimento de onda Compton do elétron*¹³ λ_C

$$\lambda_C \equiv \frac{h}{mc} = 2,43 \times 10^{-12} \text{ m} = 0,0243 \text{ \AA}. \quad (2.28)$$

Perceba que, assim como observado nas medidas de Compton, $\Delta\lambda$ é independente do comprimento de onda da radiação incidente. No caso que tratamos, em que os raios-X espalham elétrons que podem ser considerados essencialmente livres, o deslocamento Compton também é independente do material espalhador. A figura 2.9 mostra o comportamento do deslocamento Compton em função do ângulo de espalhamento θ . Vemos que para fótons espalhados na direção e sentido do feixe incidente ($\theta = 0$), o deslocamento Compton é nulo, ou seja, o fóton espalhado possui o mesmo comprimento de onda do fóton incidente. Para qualquer outro ângulo de espalhamento, $\Delta\lambda > 0$, em particular, o deslocamento Compton aumenta monotonamente com θ , atingindo seu valor máximo para $\theta = \pi$, isto é, quando o fóton espalhado emerge no sentido oposto ao do fóton incidente, com um comprimento de onda $\lambda_1 = \lambda_0 + 2\lambda_C$.

¹³Ainda não iniciamos neste curso nosso estudo sobre as propriedades ondulatórias da matéria, portanto neste momento, não vamos tentar interpretar fisicamente a natureza deste comprimento de onda. Entretanto, aqueles já familiarizados com tais propriedades vão reconhecer que λ_C é consistente com o comprimento de onda de de Broglie de um elétron no limite ultrarelativístico $\beta \rightarrow 1$.

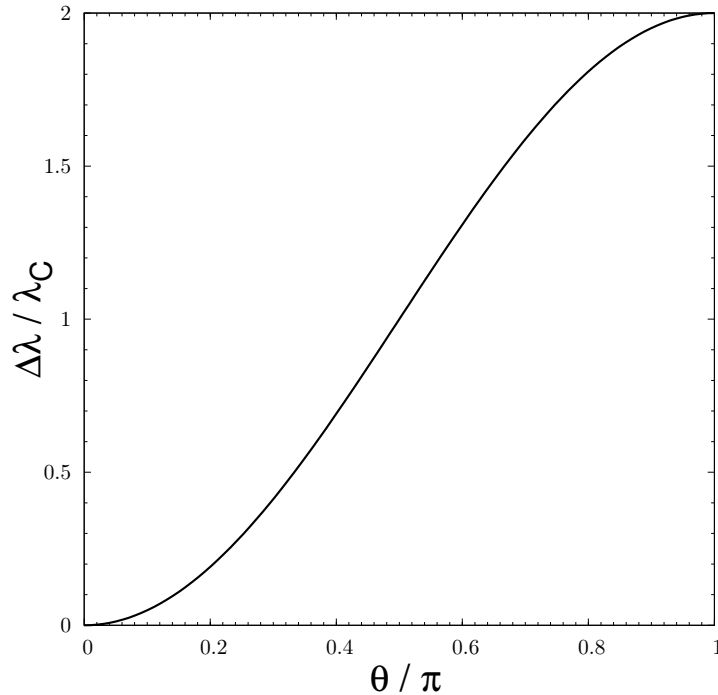


Figura 2.9: Deslocamento Compton $\Delta\lambda$ (ver equação 2.27) em unidades do comprimento de onda Compton do elétron λ_C (ver equação 2.28) em função do ângulo de espalhamento θ .

Exceto pela presença ubíqua do pico de intensidade centrado em λ_0 para qualquer ângulo de espalhamento θ na figura 2.7, todas as demais propriedades dos dados podem ser explicadas pela teoria de espalhamento que acabamos de deduzir. De acordo com nosso cálculo, o pico de intensidade espalhada relativo a λ_0 deveria estar presente apenas para $\theta = 0$. Nos demais ângulos de espalhamento, um único pico centrado em $\lambda_1 = \lambda_0 + \Delta\lambda$ deveria ser observado. Entretanto, se ao invés de um elétron livre, o espalhamento se der com um elétron fortemente ligado, na prática, o átomo como um todo deve recuar durante o processo de espalhamento ao absorver parte do momento do fóton incidente. Esse caso pode ser obtido sem muita dificuldade fazendo modificações no cálculo anterior. Do ponto de vista de conservação da energia e do momento linear, basta substituir a massa de repouso do elétron m pela correspondente massa de repouso do átomo M . Dado que $M \gg m$

$$\Delta\lambda = \frac{h}{Mc}(1 - \cos\theta) = \left(\frac{m}{M}\right) \lambda_C(1 - \cos\theta) \ll \lambda_C, \quad (2.29)$$

o que explicaria a presença do pico em torno do comprimento incidente λ_0 nas medidas de Compton, dado que λ_C já é um deslocamento bastante pequeno. Por exemplo, para um átomo de hidrogênio com um único próton de massa de repouso M_p em seu núcleo, a razão de massas

anterior seria¹⁴

$$\frac{m}{M} = \frac{mc^2}{M_p c^2} \simeq \frac{511 \text{ keV}}{1 \text{ GeV}} = 5,11 \times 10^{-4}. \quad (2.30)$$

Você pode ficar tentado a pensar que o fóton espalhado é simplesmente o fóton incidente que transfere parte da sua energia durante o espalhamento ao elétron e altera seu comprimento de onda e frequência de forma contínua durante o processo. Neste curso, não temos condições de escrutinar mais a fundo o que se passa durante a interação fóton-elétron. Isso exige uma teoria fundamental da interação entre luz e partículas carregadas conhecida como *Eletrodinâmica Quântica*. De acordo com essa teoria, a interação em questão, em certo sentido, é descontínua, com o elétron absorvendo o fóton incidente e, em seguida, emitindo um outro fóton, o espalhado.

Ao revisar o cálculo de espalhamento que acabamos de realizar, você se dará conta de que o resultado depende fundamentalmente da aplicação da conservação de momento linear e energia, tratando o elétron e, mais importante ainda, o fóton como sendo essencialmente "bolas de bilhar". Nesse sentido, o cálculo é muito similar àqueles realizados num curso de física clássica. Isso pode também deixá-los tentados a assumir que, assim como no caso clássico, se prepararmos as condições iniciais de forma bastante cuidadosa, por exemplo, colimando o feixe de raios-X incidentes de forma a deixá-lo cada vez mais fino, a distribuição de ângulos de espalhamento deveria, por sua vez, tornar-se também cada vez "mais fina" em torno de um ângulo específico. Pelo menos, esse é o caso para o espalhamento clássico de bolas de bilhar em que as condições iniciais definem completamente o resultado do espalhamento¹⁵. Entretanto, no caso do espalhamento Compton, não há como prever o valor do ângulo de saída do fóton ou do elétron, não importa o quão cuidadoso tenha sido o preparo das condições iniciais. Tudo o que pode ser calculado são as probabilidades associadas a cada ângulo de espalhamento θ . No caso particular do espalhamento Compton, também não temos condições de calcular essas probabilidades com o ferramental matemático dessa disciplina. Você já deve desconfiar que essas probabilidades também podem ser calculados no âmbito da Eletrodinâmica Quântica. Isso não quer dizer que não seremos capazes de calcular qualquer probabilidade ao longo do semestre. O terceiro bloco inteiro dessa disciplina será dedicado exatamente ao cálculo de probabilidades associadas a certos sistemas quânticos. A diferença principal com respeito aos sistemas tipicamente tratados em Eletrodinâmica Quântica é que nossos sistemas estarão em estados especiais, chamados de estacionários, ao invés de interagindo dinamicamente uns com os outros como no caso dos fótons e elétrons no espalhamento Compton. A única exceção será o sistema representado pelo átomo de hidrogênio que envolve a interação elétrica entre prótons e elétrons. Ainda assim, analisaremos esse sistema quando ele se encontrar em estados ditos estacionários.

Uma análise cuidadosa do procedimento usando por Compton em suas medidas evidencia um ponto curioso, e aparentemente contraditório, da teoria corpuscular da radiação. Se por um lado, tal caráter corpuscular é essencial para explicar os dados experimentais, para os

¹⁴As energias de repouso de um elétron ($mc^2 \simeq 511 \text{ keV}$) e de um próton ($M_p c^2 \simeq 1 \text{ GeV}$) são valores que você deve memorizar, pois são extremamente úteis em várias estimativas que aparecerão ao longo desse curso.

¹⁵Para duas bolhas de bilhar de massas idênticas, como visto em seu curso de Física 1, a linha unindo os centros das bolas durante o instante de contato, define o ângulo de espalhamento.

quais a teoria clássica falha miseravelmente em descever, a determinação dos comprimentos de onda do feixe espalhado depende fundamentalmente da lei de Bragg que, por sua vez, está assentada sobre o caráter ondulatório do feixe espalhado, já que se baseia no conceito de interferência entre feixes refletidos em distintas camadas do espectrômetro cristalino (!) Essas duas manifestações (corpúscular e ondulatória) do mesmo feixe de raios-X parece levar a uma contradição irreparável. Entretanto, veremos que essa é uma característica fundamental da teoria quântica, tanto da radiação quanto da matéria, ou seja, uma espécie de *dualidade* que, em muitas situações e no mesmo experimento, leva um ente quântico a se comportar ora como partícula ora como onda. Perceba, entretanto, que apesar de estarmos lidando com os mesmos entes no caso do espalhamento Compton, isto é, os fótons de raios-X espalhados, a natureza corpúscular se manifesta somente na interação com os elétrons do material espalhador, enquanto a natureza ondulatória se manifesta somente na passagem pelo cristal analisador. Ou seja, em cada uma dessas interações, um ou outro caráter se manifesta, e não ambos. Exploraremos mais essa dualidade quando nos debruçarmos sobre a natureza ondulatória da própria matéria.

2.4 Raios-X

Os raios-X foram descobertos por Wilhelm Röntgen em 1895 no curso de seus estudos sobre os raios catódicos¹⁶. O feito lhe valeu o prêmio Nobel em Física em 1901, bem como outras honrarias associadas à medicina, já que em 22 de dezembro do mesmo ano, ele produziria a primeira radiografia da mão de sua esposa Anna Bertha. Raios-X são ondas eletromagnéticas e, portanto, possuem propriedades como polarização e podem sofrer interferência e difração.

Sabemos hoje que raios-X podem ser produzidos por meio da desaceleração de um feixe de elétrons (raios catódicos). A figura 2.10 mostra um desenho esquemático de um tubo de raios-X. O cátodo C é formado por um filamento aquecido pela passagem de uma corrente elétrica. Os elétrons liberados pelo cátodo são então acelerados em direção ao ânodo A devido à existência de uma diferença de potencial $V = V_A - V_C$ entre esses dois eletrodos, adquirindo no percurso energia cinética $K = eV$. Tanto o cátodo quanto o ânodo encontram-se no interior de tubo de vidro onde se fez vácuo. Ao atingir o ânodo, raios-X são produzidos com uma certa distribuição de comprimentos de onda. A distribuição típica desses comprimentos de onda para um tubo de raios catódicos pode ser vista na figura 2.11. Curvas para quatro valores distintos da tensão de aceleração são mostradas: preto (20 kV), vermelho (30 kV), azul (40 kV) e verde (60 kV). Perceba que, para cada valor de V , o espectro possui um comprimento de onda mínimo, que representaremos por λ_{min} , abaixo do qual não há emissão de raios-X.

A forma das curvas apresentadas na figura 2.11 dependem da tensão de aceleração V e, em menor grau, do material do ânodo. Entretanto, a experiência mostra que o comprimento de onda λ_{min} só depende de V . A simples existência de um valor mínimo para os comprimentos de onda emitidos já põe a teoria clássica da radiação numa posição muito delicada. Na teoria eletromagnética clássica, a intensidade de uma onda está associada à sua amplitude e não ao

¹⁶Wilhelm Röntgen, "Ueber eine neue Art von Strahlen. Vorläufige Mitteilung", in: Aus den Sitzungsberichten der Würzburger Physik-med. Gesellschaft Würzburg, pp. 137-147, 1895.

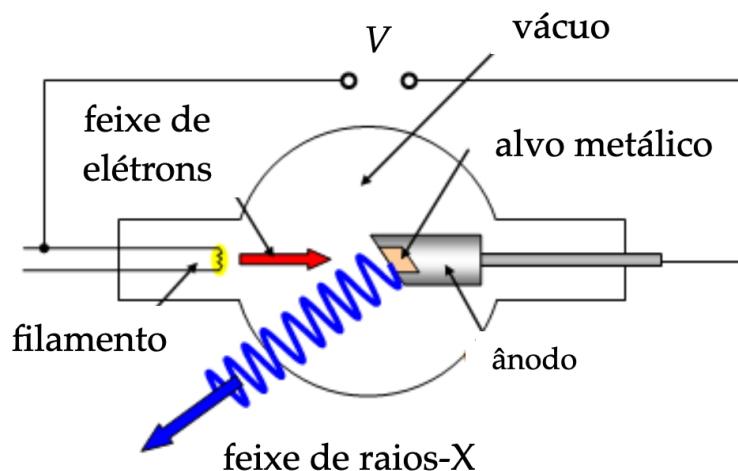


Figura 2.10: Tubo de raios-X, onde um filamento aquecido representando o cátodo C libera elétrons que são acelerados em direção ao ânodo A por uma diferença de potencial V . Os elétrons atingem um alvo metálico. O sistema todo encontra-se em vácuo.

comprimento de onda. Portanto, classicamente, espera-se que o tubo de raios-X emita em todos os possíveis comprimentos de onda desde $\lambda = 0$ até comprimentos arbitrariamente grandes.

Já do ponto de vista quântico, em que o campo eletromagnético é formado por fótons, a existência de λ_{min} é natural. Nesse caso, os elétrons incidentes sobre o ânodo são desviados pelo campo Coulombiano dos núcleos atômicos do material do ânodo e a variação de energia do sistema elétron-núcleo nessas interações aparece na forma de fótons. A figura 2.12 mostra uma interação elétron-núcleo com a produção de um fótons de raios-X no estado final. O processo pelo qual um elétron emite um fóton quando é desacelerado é chamado de *bremstrahlung* do alemão *brem*s = frenamento + *strahlung* = radiação.

A energia cinética típica dos elétrons no tubo de raios-X está na faixa de keV, ou seja, muito menor que a energia de repouso dos núcleos atômicos. Nessas condições, podemos desprezar a energia de recuo do núcleo atômico. Portanto, a energia do fóton emitido deve satisfazer

$$h\nu = K - K', \quad (2.31)$$

de forma que o fóton mais energético emitido é aquele em que o elétron vai ao repouso ($K' = 0$) após a interação com um único núcleo atômico. Ou seja

$$h\nu_{max} = \frac{hc}{\lambda_{min}} = K = eV, \quad (2.32)$$

e podemos escrever finalmente para o comprimento de onda mínimo

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{eV}. \quad (2.33)$$

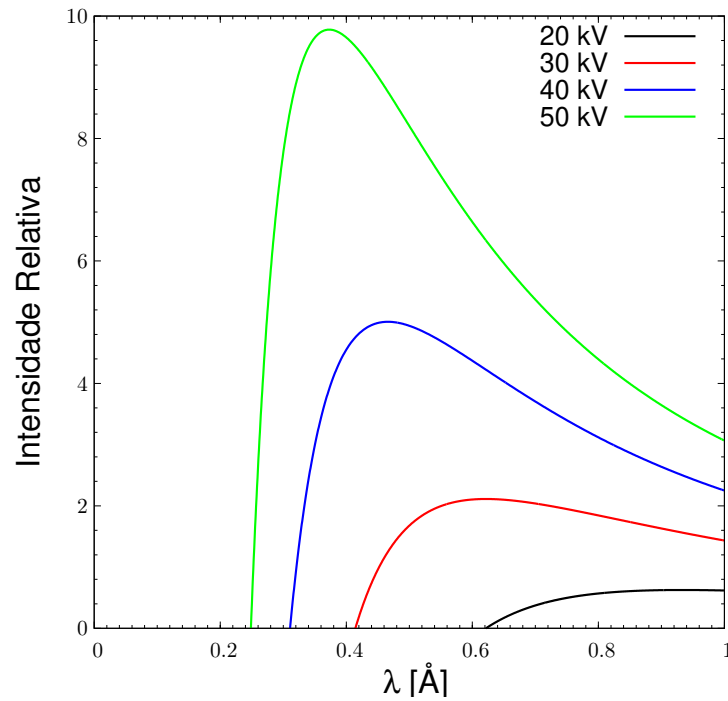


Figura 2.11: Espectro de raios-X emitido por um tubo de raios catódicos para alguns valores da tensão de aceleração V : preto (20 kV), vermelho (30 kV), azul (40 kV) e verde (60 kV).

O limite clássico da expressão anterior pode ser obtido fazendo a constante de Planck ir a zero

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{eV} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad (2.34)$$

2.5 Produção de pares

2.6 Aniquilação de pares

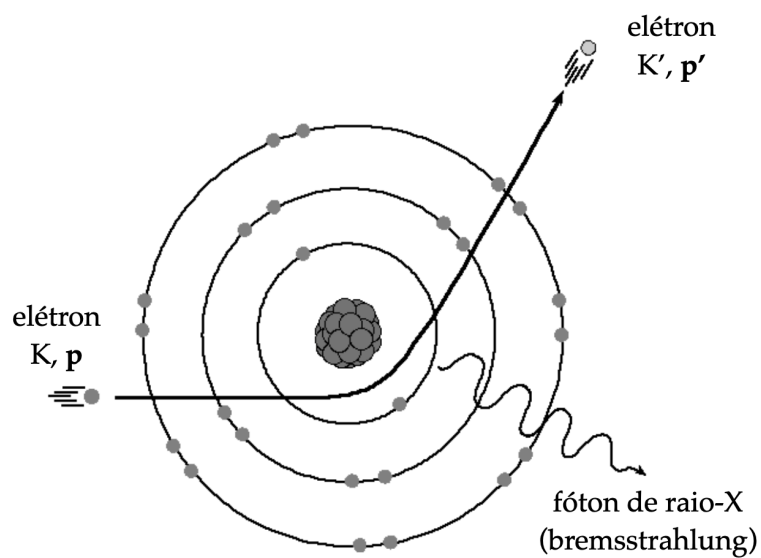


Figura 2.12: Interação elétron-núcleo com a produção de um fóton de bremsstrahlung na faixa de raios-X.

Capítulo 3

Comportamento ondulatório da matéria

Bibliografia

- [1] Robert Eisberg e Robert Resnick, Física Quântica - Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas, GEN LTC; 1a edição, 1979.
- [2] B. H. Bransden and C. J. Joachain, *Quantum Mechanics*, Pearson Education, 2nd edition, 2000.
- [3] David Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, Third Edition, 1999.