

O PROBLEMA DE TRANSBORDO

1. Um Exemplo Introdutório e Seu Modelo Matemático

Conforme será visto a seguir, o modelo matemático do problema de transbordo é um problema de programação linear e pode ser resolvido pelo algoritmo simplex (convencional) ou simplex revisado. No entanto, tendo em vista a estrutura particular do sistema de restrições, é vantajoso tirar proveito desta estrutura e fazer as iterações do simplex revisado sobre o grafo orientado em lugar de utilizar tabelas com os coeficientes da forma canônica. O exemplo introdutório apresentado abaixo tem o intuito de preparar o caminho para uma discussão mais formal do problema.

O problema introdutório é apresentado no grafo orientado $G_0 = (N, A_0)$ da Figura 1, em que N é o conjunto de nós e A_0 é o conjunto de arcos orientados. Nesta figura são apresentados os parâmetros do problema de transbordo; as ofertas/demandas dos

nós $i \in N$ são representadas pelo parâmetro b_i .
 Por convenção, se $b_i > 0$, o nó i é um centro produtor, com oferta b_i , e, se $b_i < 0$, o nó i é um centro consumidor, com demanda igual a $-b_i$. A cada arco orientado $(i, j) \in A_0$, está associado o parâmetro c_{ij} que representa o custo unitário de transporte no arco (i, j) . O problema consiste em encontrar uma solução para levar o produto dos centros produtores aos centros consumidores, respeitando ofertas e demandas, que minimize o custo total de transporte.

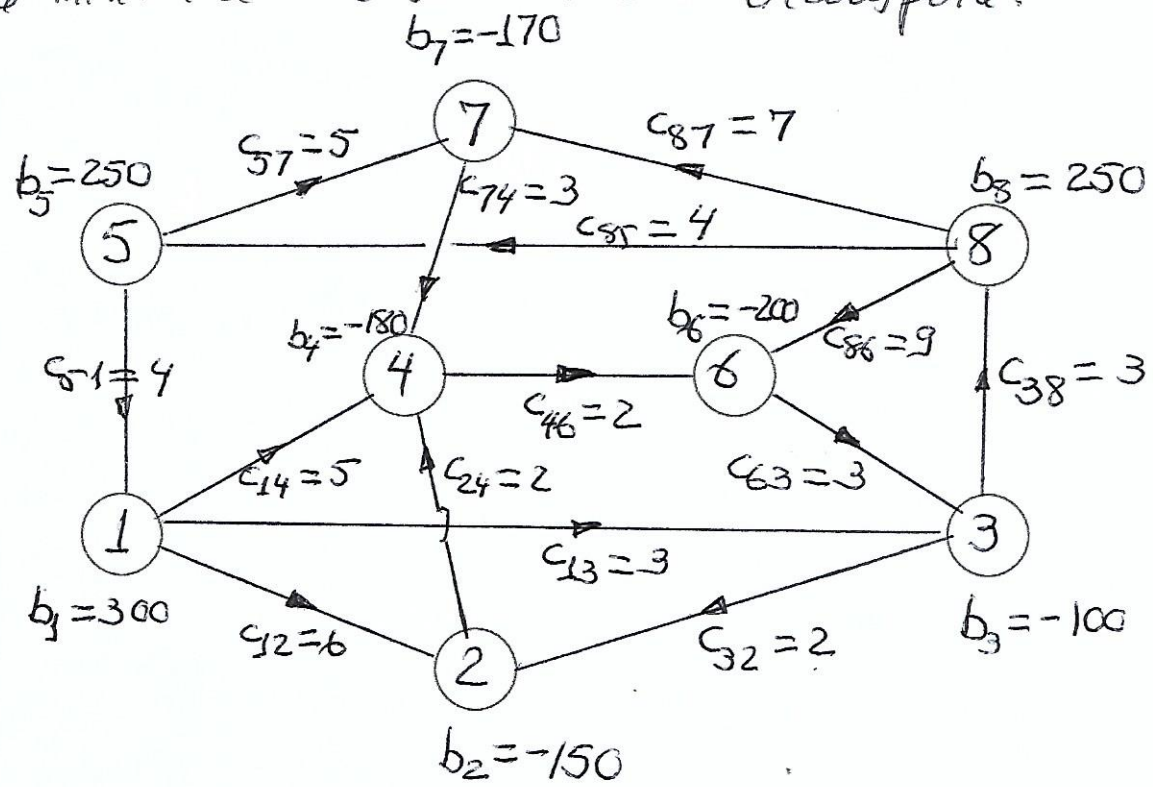


Figura 1. Um exemplo introdutório para o problema de transporte

Neste exemplo introdutório, há equilíbrio entre oferta e demanda nos nós da rede, de modo $\sum_{i=1}^8 b_i = 0$

Modelo Matemático para o Problema Inicial

3

Varáveis de decisão: x_{ij} quantidade de produto transportada no arco (i, j) .

Restrições Tendo em vista o equilíbrio entre oferta e demanda e a conservação de sinal para os b_i , a restrição para qualquer nó i pode ser escrita como:

$$\text{fluxo que sai do nó } i - \text{fluxo que chega ao nó } i = b_i$$

As equações específicas para cada nó estão no modelo matemático da página seguinte.

Função objetivo Como já mencionado, a função objetivo do problema é o custo total de transporte, que deve ser minimizado; trata-se, portanto, de uma visão de planeamento centrado.

Comentários a respeito do Modelo Matemático

1. Cada variável x_{ij} aparece duas vezes no sistema de equações do modelo matemático: com coeficiente $+1$ na equação do nó origem i ; e com coeficiente -1 na equação do nó de destino j .

Modelo Matemático

Minimizer C_t

$$C_7 = 6x_{12} + 3x_{13} + 5x_{14} + 2x_{24} + 2x_{32} + 3x_{33} + 2x_{46} + 4x_{51} + 5x_{57} + 3x_{63} + 3x_{74} + 4x_{85} + 9x_{86} + 7x_{87}$$

Sujeito a restrições

Nó 1	$x_{12} + x_{13} + x_{14}$	$-x_{51}$	$= 300$
Nó 2	$-x_{12}$	$+x_{24} - x_{32}$	$= -150$
Nó 3	$-x_{13}$	$+x_{32} + x_{38}$	$= -100$
Nó 4	$-x_{14} - x_{24}$	$+x_{46}$	$= -180$
Nó 5		$x_{51} + x_{57}$	$= 250$
Nó 6		$-x_{46}$	$= -200$
Nó 7		$-x_{57} + x_{74}$	$= -170$
Nó 8	$-x_{38}$	$+x_{85} + x_{86} + x_{87}$	$= 250$

$$x_{ij} \geq 0$$

2. O sistema de equações é redundante. De fato, somando-se todas as equações do sistema, obtém-se:

$$\sum_{(i,j) \in A_0} 0 x_{ij} = 0$$

sendo A_0 o conjunto de arcos orientados da rede.

3. Quaisquer 7 das 8 equações do sistema são independentes.
4. De (2) e (3), conclui-se que numa solução básica deste problema introdutório de transbordo há 7 variáveis básicas.
5. Relembrando a relação entre o custo reduzido da forma canônica e o custo da forma padrão:

$$\bar{c}_j = c_j - \pi A_j$$

com base no comentário (1), vale para o problema de transbordo a relação:

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi A_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$$

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j \quad (1)$$

2. Particularização do algoritmo simplex revisado ⁶ para o problema de transbordo, utilizando o grafo orientado a ele associado.

Considere-se a seguinte solução básica viável para o problema introdutório de transbordo, especificada por meio de suas variáveis básicas:

$$x_{12}^B = 450 \quad ; \quad x_{13}^B = 100$$

$$x_{24}^B = 300 \quad ; \quad x_{46}^B = 200$$

$$x_{51}^B = 250 \quad ; \quad x_{74}^B = 80 \quad ; \quad x_{87}^B = 250$$

Convém observar que os valores das variáveis não básicas são todos nulos.

Passo 1 Exame de Otimidade de Solução Básica Viável Atual

A Figura 2, na página 8, mostra os arcos correspondentes às variáveis básicas; essa figura é útil para acompanhar o cálculo dos multiplicadores simplex associados à presente solução básica viável. Como visto em programação linear, o coeficiente de qualquer variável básica na função objetivo da respectiva forma canônica tem valor nulo. Portanto, para qualquer variável básica x_{ij}^B , a partir da expressão (1) da página 5, decorre:

$$\bar{c}_{ij}^B = 0 = c_{ij}^B - \pi_i + \pi_j \Rightarrow (\pi_i - \pi_j) = c_{ij}^B \quad (2)$$

Isto é, se (i, j) é arco de uma variável básica, a diferença entre os valores dos multiplicadores no nó origem i e no nó destino j é igual ao custo unitário do arco.

Para a presente solução básica viável:

7

$$\bar{c}_{12}^B = 0 = c_{12}^B - \pi_1 + \pi_2 \Rightarrow \pi_1 - \pi_2 = c_{12}^B = 6$$

$$\bar{c}_{13}^B = 0 = c_{13}^B - \pi_1 + \pi_3 \Rightarrow \pi_1 - \pi_3 = c_{13}^B = 3$$

$$\bar{c}_{24}^B = 0 = c_{24}^B - \pi_2 + \pi_4 \Rightarrow \pi_2 - \pi_4 = c_{24}^B = 2$$

$$\bar{c}_{46}^B = 0 = c_{46}^B - \pi_4 + \pi_6 \Rightarrow \pi_4 - \pi_6 = 2$$

$$\bar{c}_{51}^B = 0 = c_{51}^B - \pi_5 + \pi_1 \Rightarrow \pi_5 - \pi_1 = 4$$

$$\bar{c}_{74}^B = 0 = c_{74}^B - \pi_7 + \pi_4 \Rightarrow \pi_7 - \pi_4 = 3$$

$$\bar{c}_{87}^B = 0 = c_{87}^B - \pi_8 + \pi_7 \Rightarrow \pi_8 - \pi_7 = 7$$

Observe-se que há um sistema de 7 equações (igual ao número de variáveis básicas) com 8 (número de nós e de equações do sistema) incógnitas.

Trata-se de um sistema com infinitas soluções; para se obter uma delas, basta arbitrar o valor de um dos multiplicadores simplex e, a seguir, calcular sucessivamente os valores dos demais multiplicadores. A existência de uma infinidade de soluções decorre de considerar todas as 8 equações do sistema, ainda que uma delas seja combinação linear das demais.

Arbitrando-se $\pi_1 = 0$, os valores obtidos para os demais multiplicadores simplex são os seguintes:

$$\pi_2 = -6, \pi_3 = -3; \pi_4 = -8; \pi_5 = 4; \pi_6 = -10; \pi_7 = -5; \text{ e } \pi_8 = 2. \text{ De posse desses valores,}$$

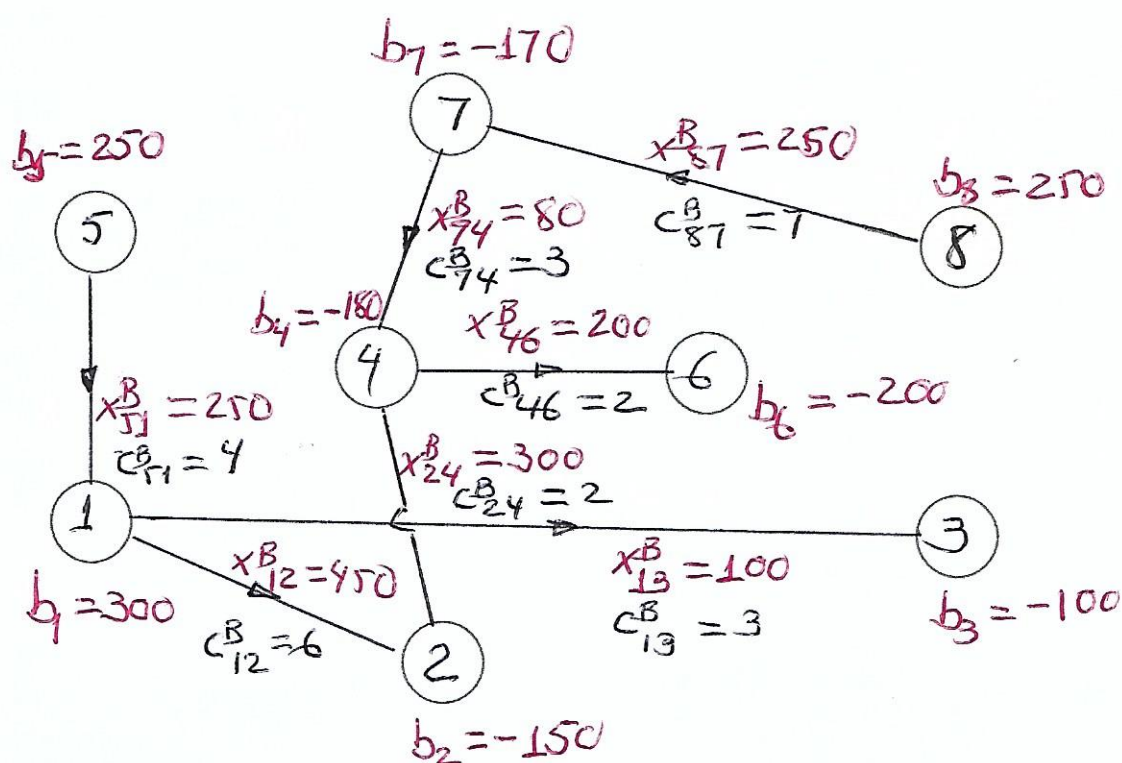


Figura 2 Variáveis básicas e respectivos valores para a solução básica viável inicial

é possível, utilizando a expressão (4), página 5, calcular os custos reduzidos $\bar{c}_{ij}^N$ das variáveis não básicas e, assim, examinar a otimalidade da solução básica viável atual. A Figura 3, na página 9, mostra os arcos das variáveis não básicas x_{ij}^N , com os custos unitários de transporte, c_{ij} , e os valores dos multiplicadores simplex dos nós da rede. Assim, é possível calcular, na própria figura, os custos reduzidos $\bar{c}_{ij}^N$, utilizando a supracitada expressão (4). Apenas para esta primeira iteração, o cálculo

dos valores de $\bar{c}_{ij}^N$ é feito abaixo, à parte da figura. 9

$$\text{VNB } x_{14}^N \quad \bar{c}_{14}^N = c_{14}^N - \pi_1 + \pi_4 = 5 - 0 + (-8) = -3$$

$$\text{VNB } x_{32}^N \quad \bar{c}_{32}^N = c_{32}^N - \pi_3 + \pi_2 = 2 - (-3) + (-6) = -1$$

$$\text{VNB } x_{38}^N \quad \bar{c}_{38}^N = c_{38}^N - \pi_3 + \pi_8 = 3 - (-3) + 2 = 8$$

$$\text{VNB } x_{57}^N \quad \bar{c}_{57}^N = c_{57}^N - \pi_5 + \pi_7 = 5 - 4 + (-5) = -4$$

$$\text{VNB } x_{63}^N \quad \bar{c}_{63}^N = c_{63}^N - \pi_6 + \pi_3 = 3 - (-10) + (-3) = 10$$

$$\text{VNB } x_{85}^N \quad \bar{c}_{85}^N = c_{85}^N - \pi_8 + \pi_5 = 4 - 2 + 4 = 6$$

$$\text{VNB } x_{86}^N \quad \bar{c}_{86}^N = c_{86}^N - \pi_8 + \pi_6 = 9 - 2 + (-10) = -3$$

Como existe $\bar{c}_{ij}^N < 0$, a solução básica viável atual não é ótima.

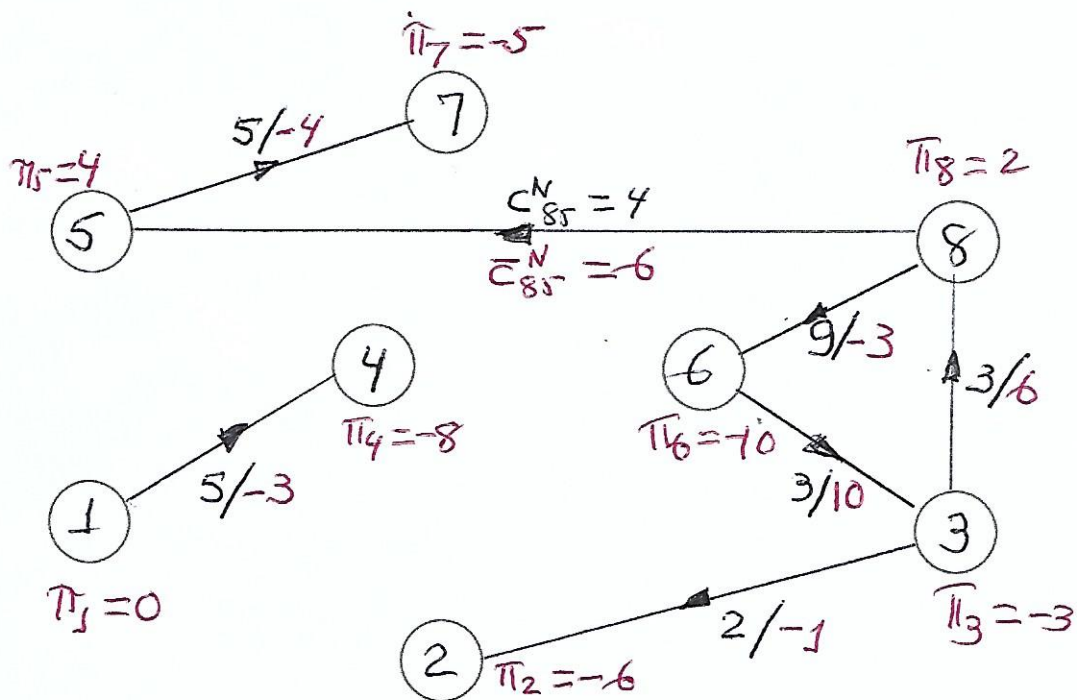


Figura 3 - Arestas das variáveis não básicas e valores dos custos reduzidos.

$$\min \{ \bar{c}_{ij}^N < 0 \} = \bar{c}_{57}^N = -4$$

A variável não básica atual x_{57} vai se tornar básica; liberando a variável x_{57} para crescer a partir de zero, é necessário estabelecer um limite superior para que nenhuma das variáveis básicas atuais assumam valor negativo. Para tanto, arbitre-se $x_{57} = \theta$ e considere-se o subgrafo formado pelos arcos das variáveis básicas atuais e pelo arco $(5,7)$. Há a formação de um (e um único) ciclo (não orientado); é necessário somar ou subtrair θ aos valores das variáveis básicas deste ciclo de maneira a satisfazer ofertas/demandas dos nós do ciclo. A figura 4, na página 11, mostra o subgrafo formado pelos arcos das variáveis básicas e o arco $(5,7)$, o ciclo formado e a alteração nos valores das variáveis básicas do ciclo quando se arbitra $x_{57} = \theta$. Para que nenhuma variável básica assumam valor negativo:

$$\theta = \min \{ x_{ij}^B \rightarrow x_{ij}^B - \theta \} = x_{51}^B = 250$$

Isto significa que a variável básica atual x_{51}

cedendo seu lugar a x_{57} na próxima solução básica. A Figura 5 mostra os valores das variáveis básicas da nova solução básica viável.

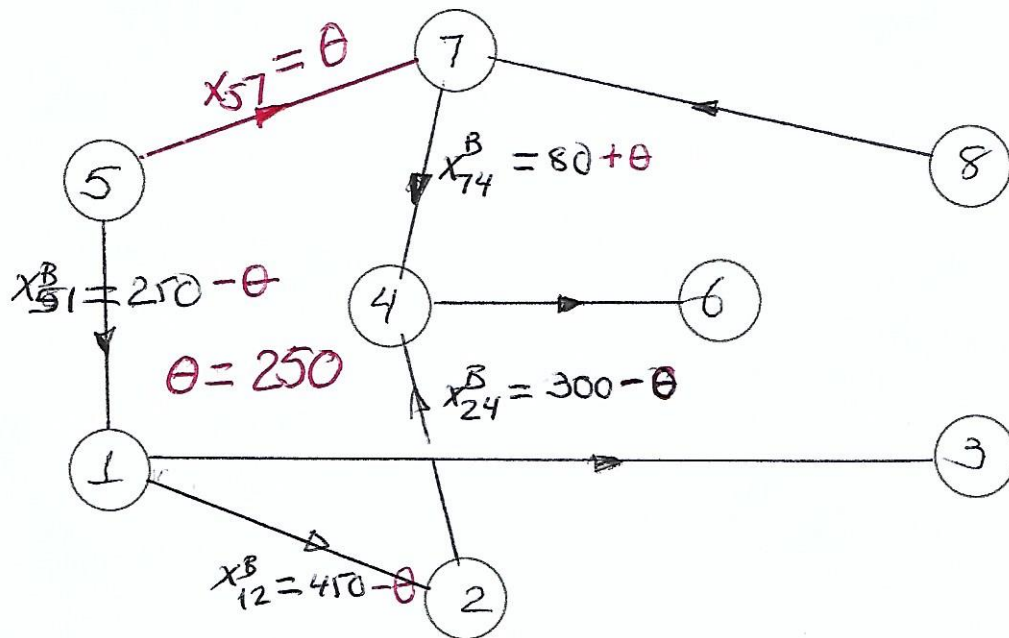


Figura 4 - Subgrafo composto pelos arcos das variáveis básicas e arco $(5,7)$, indicando o ciclo formado

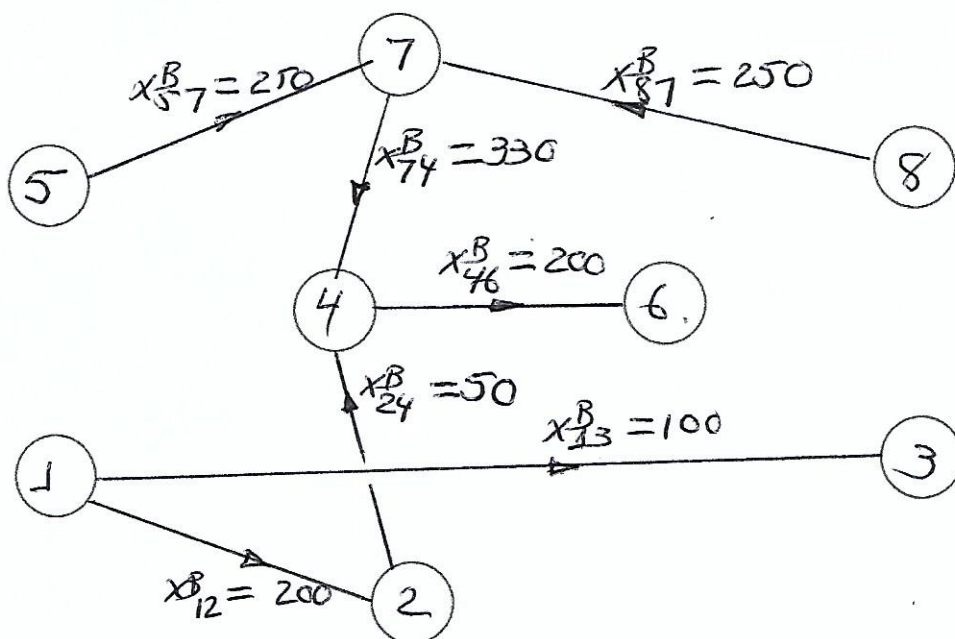


Figura 5 - Valores das variáveis básicas da nova solução básica viável

Cabe agora examinar a otimalidade da nova (segunda) solução básica viável. A Figura 6, mostrada na página 13 é uma reprodução da Figura 5, incluindo os custos unitários c_{ij}^B das variáveis básicas x_{ij}^B . Sabendo-se que, para as variáveis básicas, vale a relação (2), explicitada na página 6

$$\pi_i - \pi_j = c_{ij}^B \quad (2)$$

e que o valor de um dos multiplicadores simplex deve ser arbitrado, é possível calcular, diretamente sobre o grafo orientado $G_0 = (N, A_0)$ os valores dos multiplicadores simplex π_i 's. Por motivo didático, a indicação do procedimento é feita a seguir.

Variáveis básicas

x_{12}^B	$\pi_1 - \pi_2 = 6$
x_{13}^B	$\pi_1 - \pi_3 = 3$
x_{24}^B	$\pi_2 - \pi_4 = 2$
x_{46}^B	$\pi_4 - \pi_6 = 2$
x_{74}^B	$\pi_7 - \pi_4 = 3$
x_{57}^B	$\pi_5 - \pi_7 = 5$
x_{87}^B	$\pi_8 - \pi_7 = 7$

Arbitrando-se para π_2 o valor zero, $\pi_2 = 0$, são obtidos os seguintes valores para os demais multiplicadores simplex: $\pi_1 = 6$; $\pi_3 = 3$; $\pi_4 = -2$; $\pi_6 = -4$; $\pi_7 = 1$; $\pi_5 = 6$; e $\pi_8 = 8$.

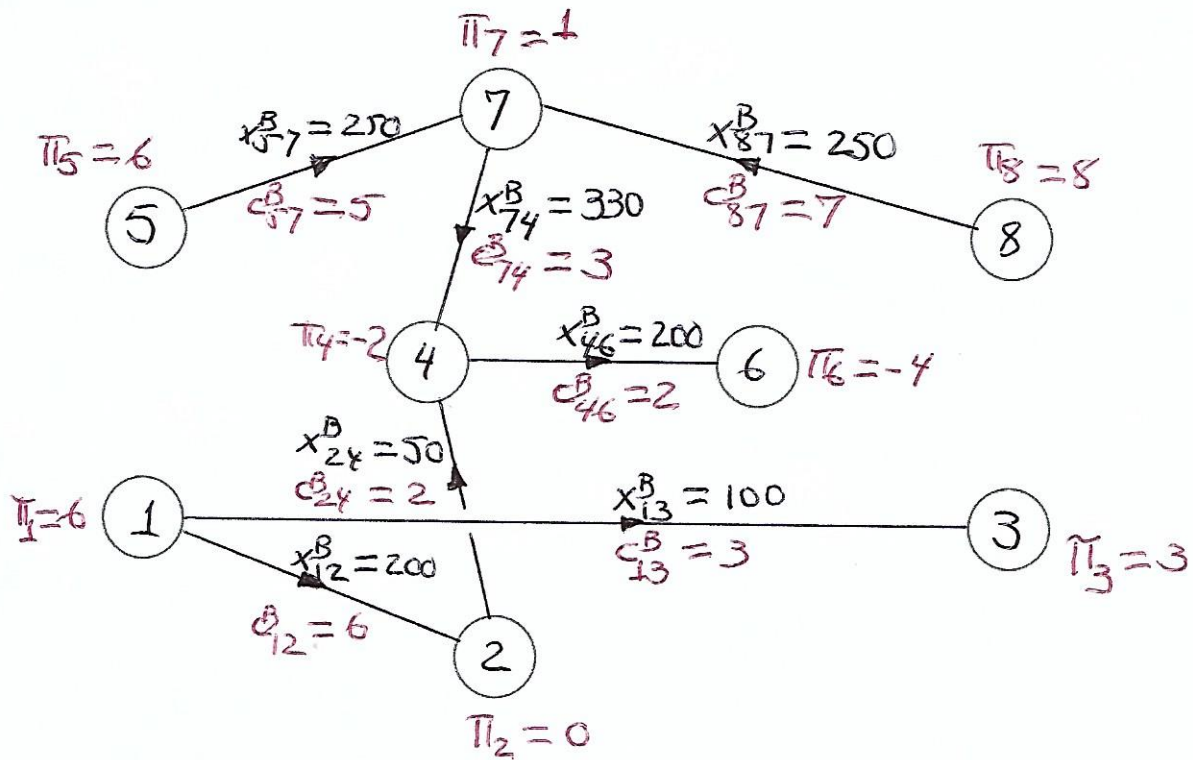


Figura 6 Valores das variáveis básicas e dos multiplicadores simplex da segunda solução básica viável

Conhecidos os valores dos multiplicadores simplex, o passo seguinte é calcular, para as variáveis não básicas x_{ij}^N , os custos reduzidos $\bar{c}_{ij}^N$, por meio da relação:

$$\bar{c}_{ij}^N = c_{ij}^N - \pi_i + \pi_j \quad (3)$$

Este cálculo é feito diretamente na Figura 7, que mostra os arcs das variáveis não básicas da

segunda solução básica viável.

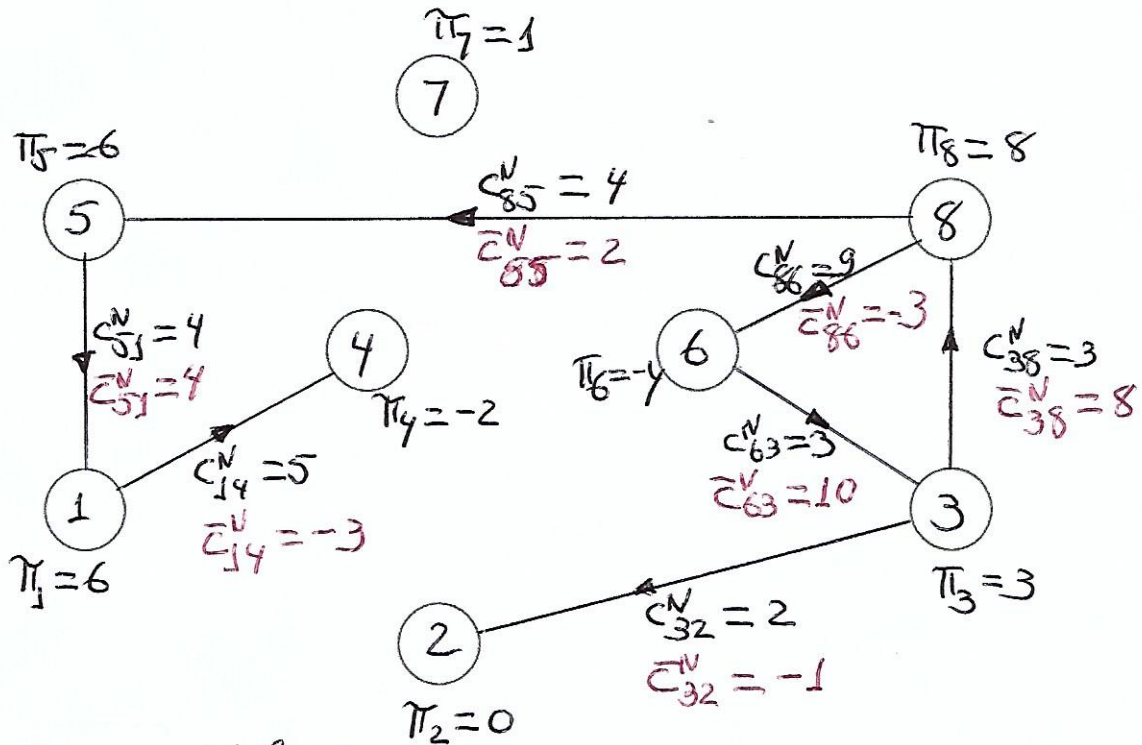


Figura 7 Cálculo dos $\bar{c}_{ij}^N$ para as variáveis não básicas da segunda solução básica viável

Como existe $\bar{c}_{ij}^N < 0$, esta segunda solução básica viável não é ótima. Utilizando a regra do simplex, cabe determinar $\min \{ \bar{c}_{ij}^N < 0 \}$. No presente caso, há um empate:

$$\min \{ \bar{c}_{ij}^N < 0 \} = \bar{c}_{14}^N = \bar{c}_{86}^N = -3$$

Escolhe-se, arbitrariamente, x_{14} para se tornar variável básica. Para determinar qual das variáveis básicas atuais irá se tornar não básica, cedendo o lugar a x_{14} , considere-se o subgrafo contendo os arcos das variáveis básicas atuais e o arco da variável x_{14} , mostrado na Figura 8. Constata-se a formação de um ciclo (não orientado)

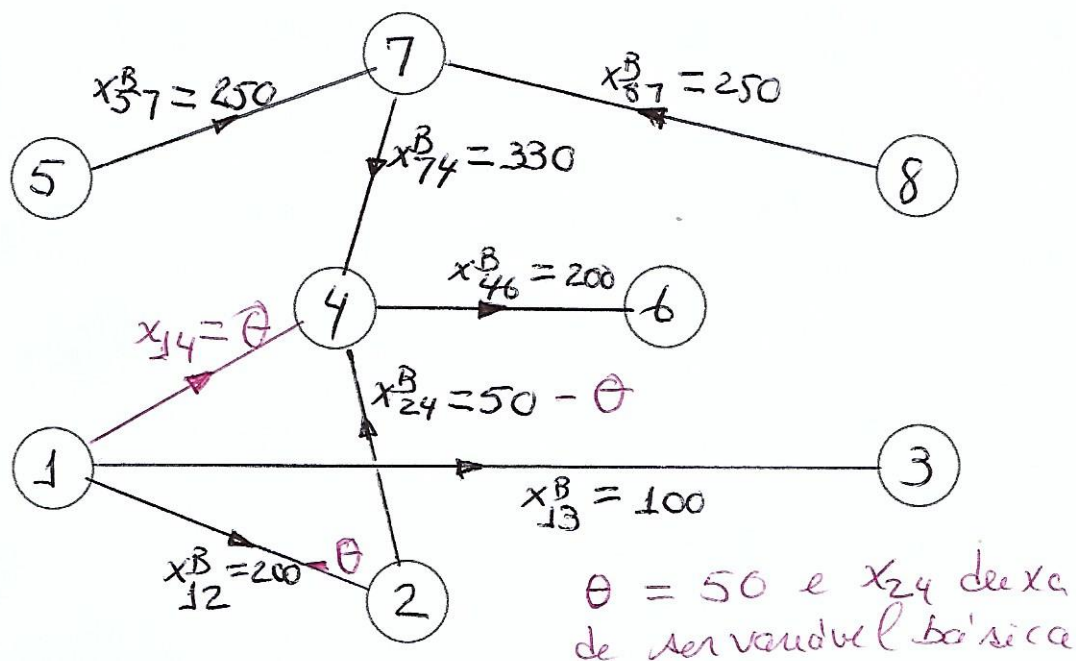


Figura 8. Subgrafo composto pelas arestas das variáveis básicas atuais e arco da variável x_{14} , mostrando o ciclo formado

composto pelas arestas das variáveis básicas x_{12} e x_{24} e arco da variável x_{14} . Ao se arbitrar $x_{14} = \theta$,

é necessário reduzir os valores de x_{24}^B para $50 - \theta$ e de x_{12}^B para $200 - \theta$. Logo, o limite superior para manter a viabilidade das variáveis básicas é $\theta = 50$, valor para o qual x_{24}^B assume valor zero e deixa de ser variável básica. Observe-se que não há alteração dos valores das variáveis básicas cujos arcos não fazem parte do ciclo.

A Figura 9 mostra os valores das variáveis básicas da terceira solução básica viável desse exemplo introdutório do problema de transporte. Impondo-se, para as variáveis básicas x_{ij}^B , $\pi_i - \pi_j = \bar{c}_{ij}^B$ (decorrente de $\bar{c}_{ij}^B = 0$) e, arbitrando novamente $\pi_2 = 0$, são calculados e mostrados na Figura 4 os valores

res dos multiplicadores simplex para cada um dos nós do grafo.

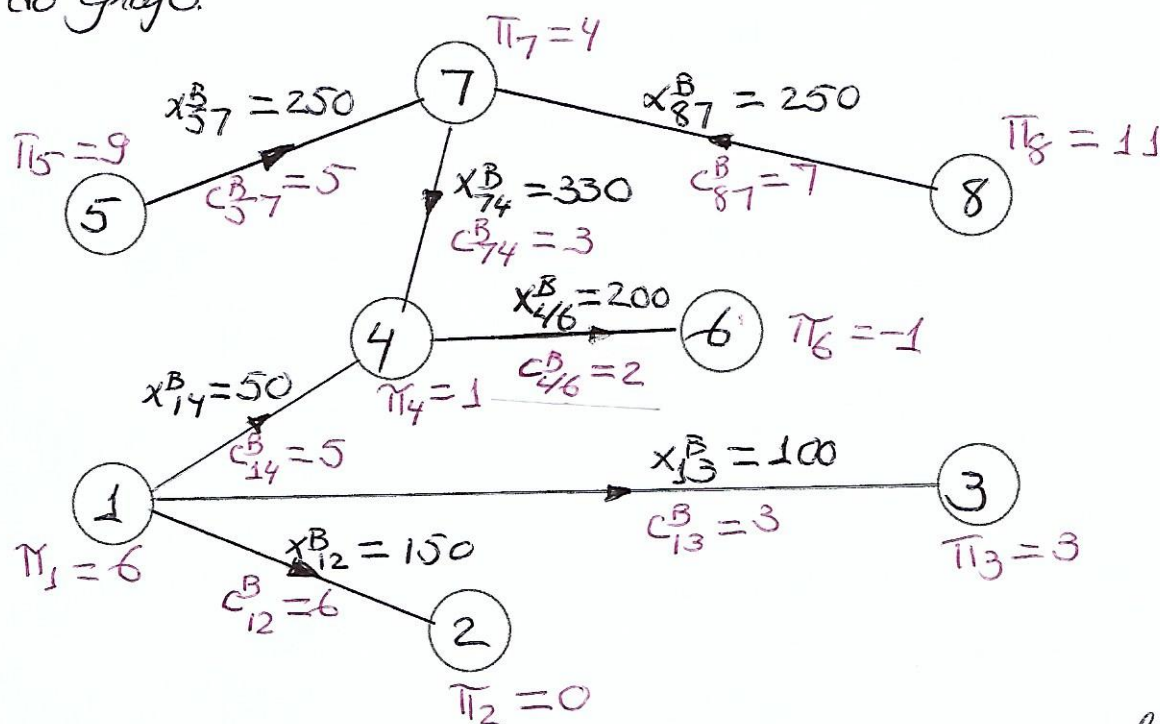


Figura 9. Valores das variáveis básicas e dos multiplicadores simplex para a terceira solução básica viável

Obtidos os valores dos multiplicadores simplex, são, a seguir, calculados os custos reduzidos das variáveis não básicas x_{ij}^N por meio da relação (2): $\bar{c}_{ij}^N = c_{ij}^N - \pi_i + \pi_j$. Na Figura 10 são mostrados os valores dos $\bar{c}_{ij}^N$. Desde que existem $\bar{c}_{ij}^N < 0$, esta terceira solução básica viável também não é uma solução ótima. Neste caso,

$$\min \{ \bar{c}_{ij}^N < 0 \} = \bar{c}_{86}^N = -3$$

Assim, a variável não básica atual x_{86} é escolhida para se tornar básica. Para determinar qual das variáveis básicas atuais deixará de ser básica, codando o lugar a x_{86} , examina-se, no subgrafo formado pelos arcos das variáveis básicas atuais e pelo arco (8,6), o ciclo formado pelos arcos das variáveis x_{86} , x_{46} , x_{74} e

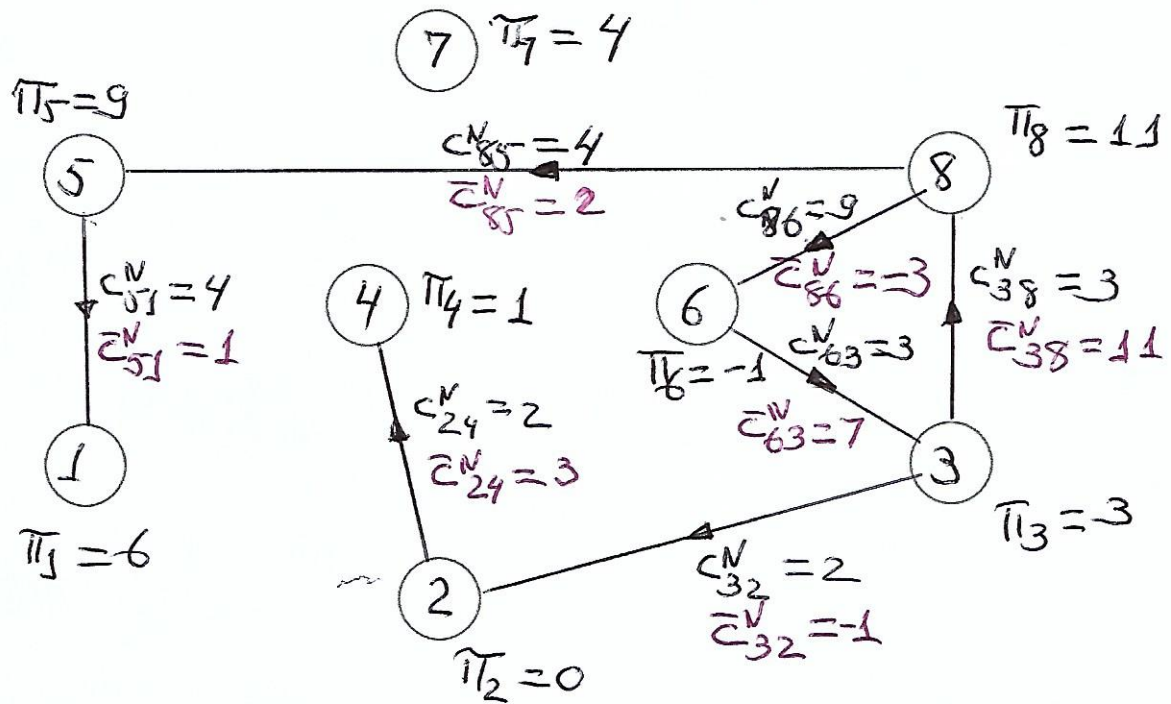


Figura 10 Valores dos $\bar{c}_{ij}^N$ da terceira solução básica viável.

x_{87} . Atribuindo-se o valor $x_{86} = \theta$, para atender as restrições de oferta/demanda nos nós do ciclo, é necessário alterar os valores das variáveis básicas x_{46}^B , x_{74}^B e x_{87}^B para $200 - \theta$, $330 - \theta$ e $250 - \theta$, respectivamente. Logo, o limite para o crescimento de x_{86} é $\theta = 200$, implicando que a variável básica atual x_{46} deixará de ser básica. A Figura 11 mostra o subgrafo constituído pelo arco da variável x_{86} e pelos arcos das variáveis básicas da terceira solução básica viável, no qual se observa o ciclo formado pelos arcos das variáveis x_{86} , x_{46} , x_{74} e x_{87} . A Figura 12 mostra os valores das variáveis básicas da 4ª solução básica viável; ficaram inalterados os valores das variáveis básicas x_{12}^B , x_{13}^B , x_{14}^B e x_{57}^B cujos arcos não fazem parte do ciclo.

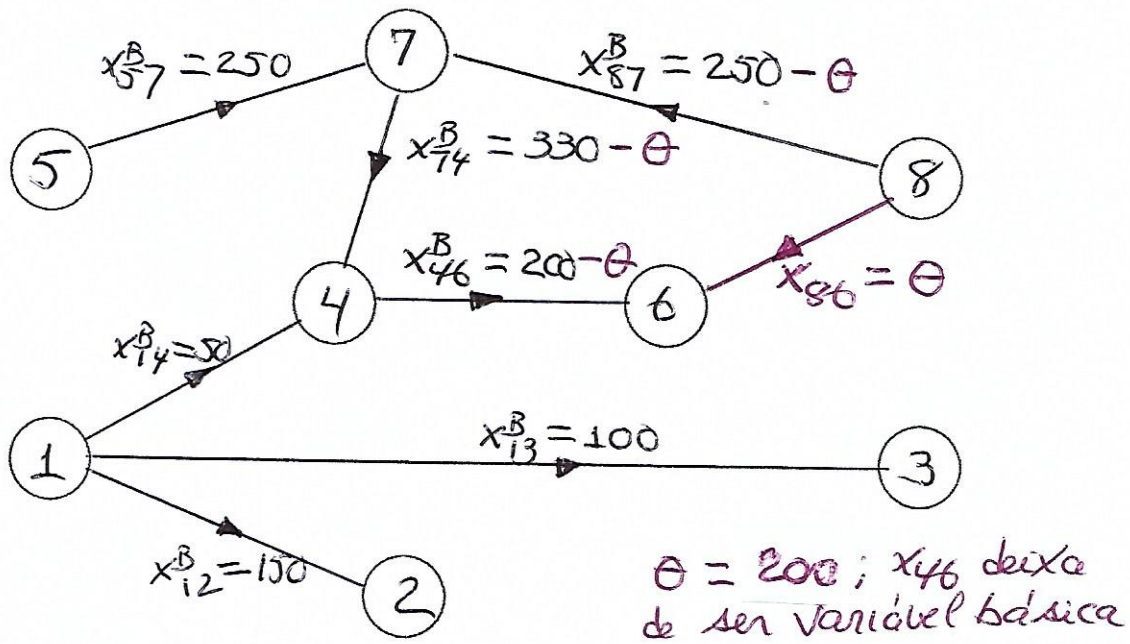


Figura 11 Subgrafo constituído pelo arco da variável x_{86} e pelos arcos das variáveis básicas atuais; indicando o ciclo formado.

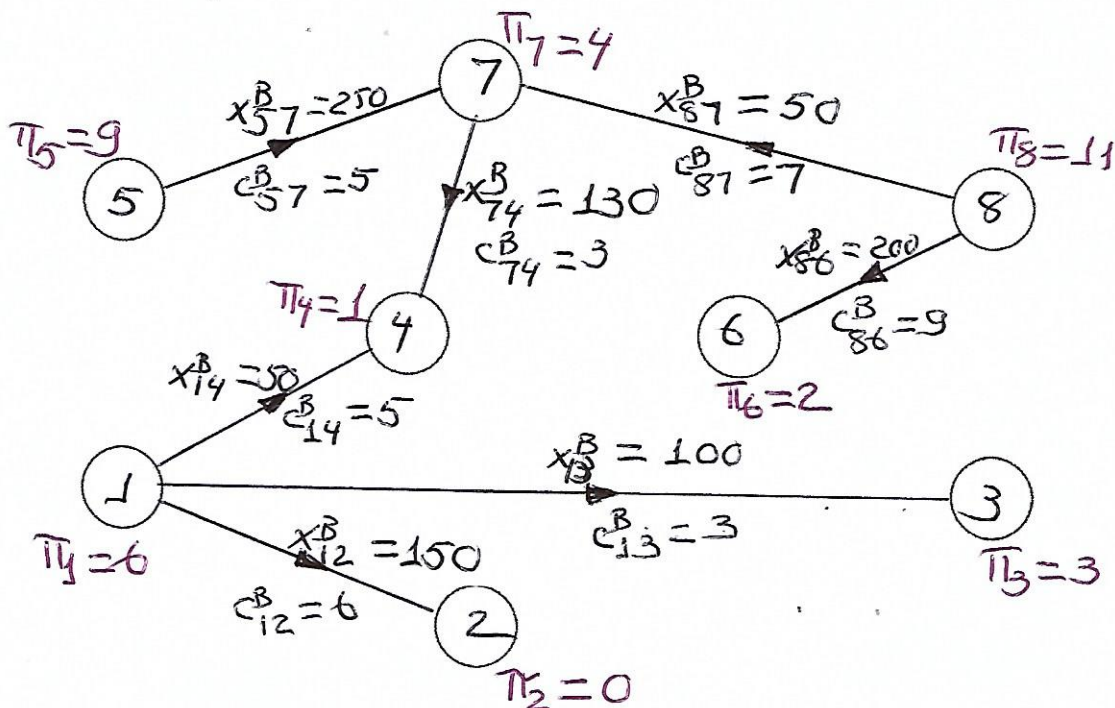


Figura 12. Valores das variáveis básicas e dos multiplicadores simplex para a 4ª seleção básica atual

Na Figura 13 são mostrados os valores dos multiplicadores simplex correspondentes à quarta solução básica viável. Eles foram calculados a partir da relação válida para variável básica

$$\pi_i - \pi_j = c_{ij}^B \quad (2)$$

tendo sido arbitrado o valor $\pi_2 = 0$. Com a finalidade de examinar a otimalidade desta quarta solução básica viável, são calculados os custos reduzidos $\bar{c}_{ij}^N$ das variáveis não básicas x_{ij}^N por meio da expressão (2)

$$\bar{c}_{ij}^N = c_{ij}^N - \pi_i + \pi_j \quad (3)$$

A Figura 8 apresenta para cada variável não básica x_{ij}^N da 4ª solução básica viável o valor obtido para o custo reduzido $\bar{c}_{ij}^N$.

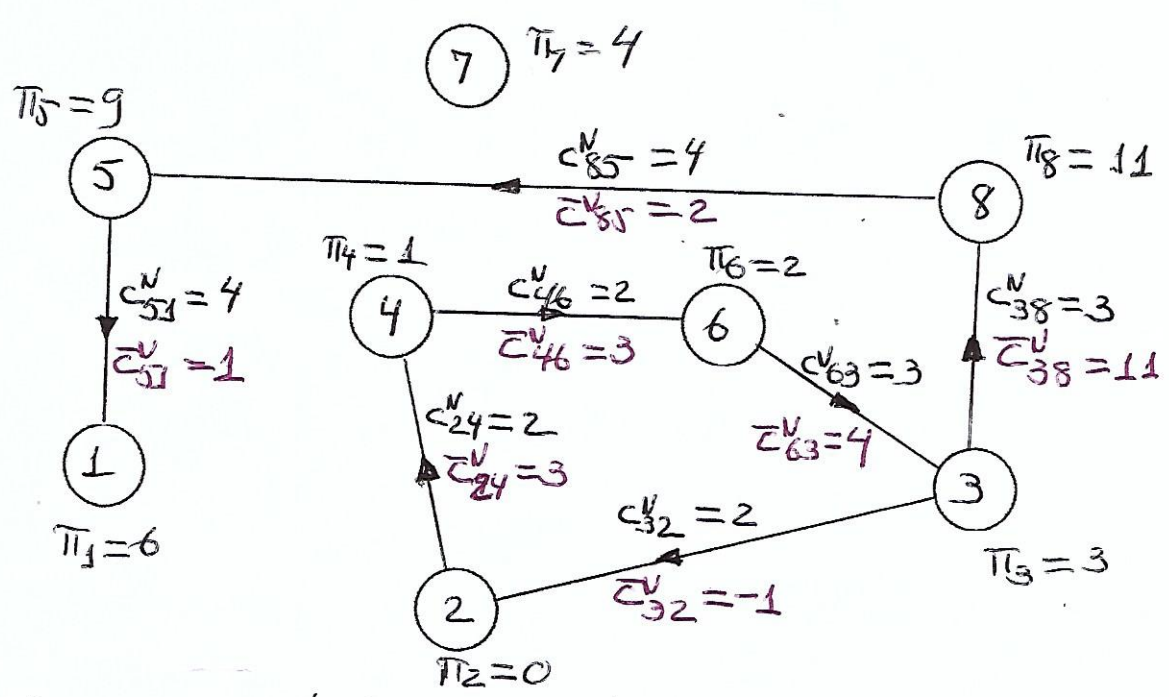


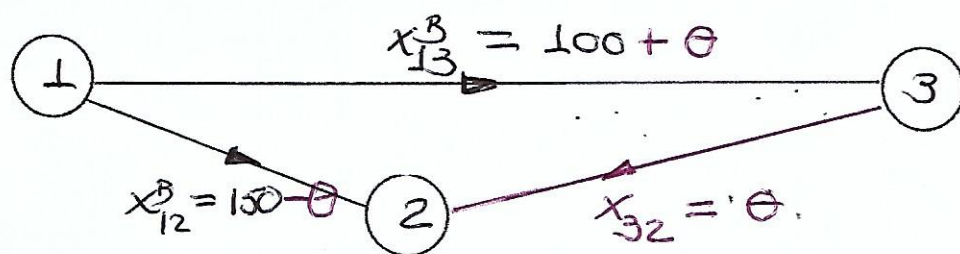
Figura 13. Valores dos $\bar{c}_{ij}^N$ para a 4ª solução básica viável

Há uma única variável não básica com $\bar{c}_{ij}^N < 0$ para a 4ª solução básica viável - é x_{32}^N , com $\bar{c}_{32}^N = -1$.

Portanto, é x_{32} que vai se tornar básica; pelo exemplo da Figura 12, onde aparecem os arcos das variáveis básicas da solução básica atual, é fácil identificar

o ciclo formado pelo arco da variável x_{32} com os arcos das variáveis básicas atuais x_{13}^B e x_{12}^B . Tal ciclo é mostrado na Figura 14 abaixo; ao se atribuir

$x_{32} = \theta$, é necessário alterar os valores de x_{13}^B e x_{12}^B para $100 + \theta$ e $150 - \theta$, respectivamente, a fim de atender as restrições de oferta/demanda nos nós do ciclo. Sendo assim, o limite para o crescimento de x_{32} é $\theta = 150$, valor para o qual x_{12} assume valor nulo e deixa de ser variável básica. A Figura 15 mostra os valores das variáveis básicas para a 5ª solução básica viável.



$\theta = 150$; x_{12} deixa
de ser variável básica

Figura 14 Ciclo formado pelo arco da variável x_{32} com os arcos das variáveis básicas x_{12} e x_{13}

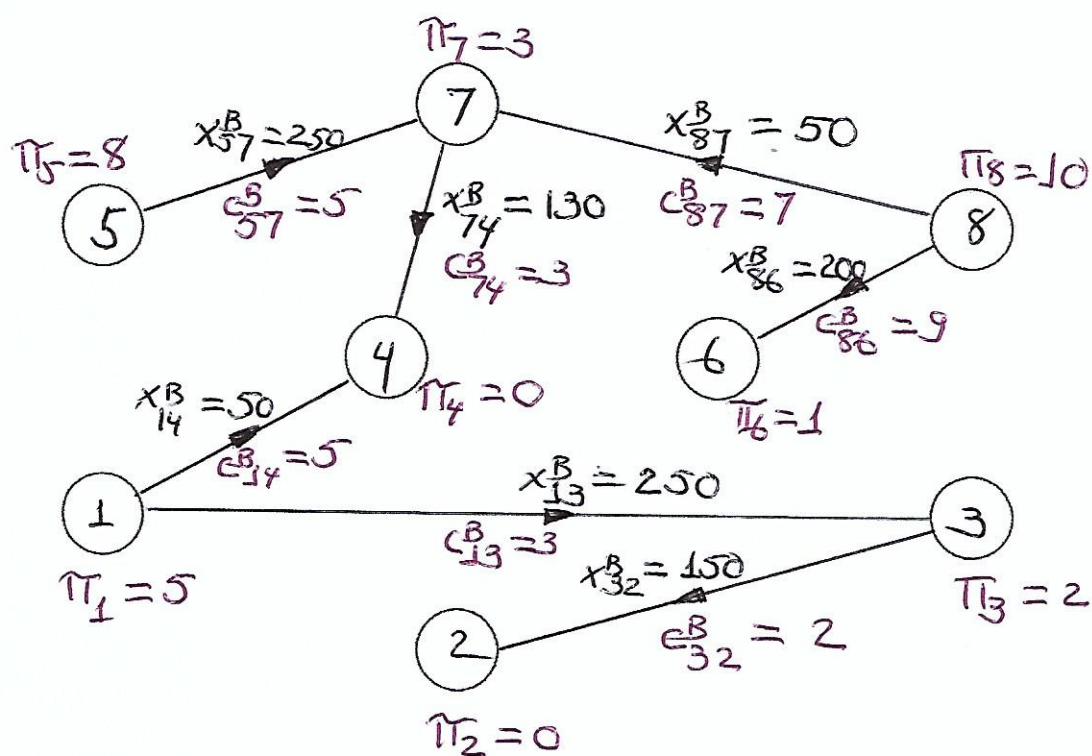


Figura 15 Valores das variáveis básicas e dos multiplicadores simplex para a 5ª solução básica viável

A Figura 15, além de mostrar os valores das variáveis básicas para a 5ª solução básica viável mostra também os multiplicadores simplex a ela associados. Os valores desses multiplicadores foram calculados com base na expressão (2) válida para as variáveis básicas:

$$\pi_i - \pi_j = c_{ij}^B \quad (2)$$

razão pela qual os c_{ij}^B aparecem na Figura 15, e arbitrando-se para o multiplicador simplex π_2 o valor $\pi_2 = 0$. A Figura 16 mostra os custos reduzidos $\bar{c}_{ij}^N$ das variáveis não básicas x_{ij}^N , calculados pela equação (3)

$$\bar{c}_{ij}^N = c_{ij}^N - \pi_i + \pi_j \quad (3)$$

utilizando os valores dos multiplicadores simplex da Figura 15. Como não há nenhuma variável não básica x_{ij}^N com $\bar{c}_{ij}^N < 0$, esta quinta solução básica viável é ótima. O valor da função objetivo, calculado pela soma de $c_{ij}x_{ij}^B$, é igual a 5030.

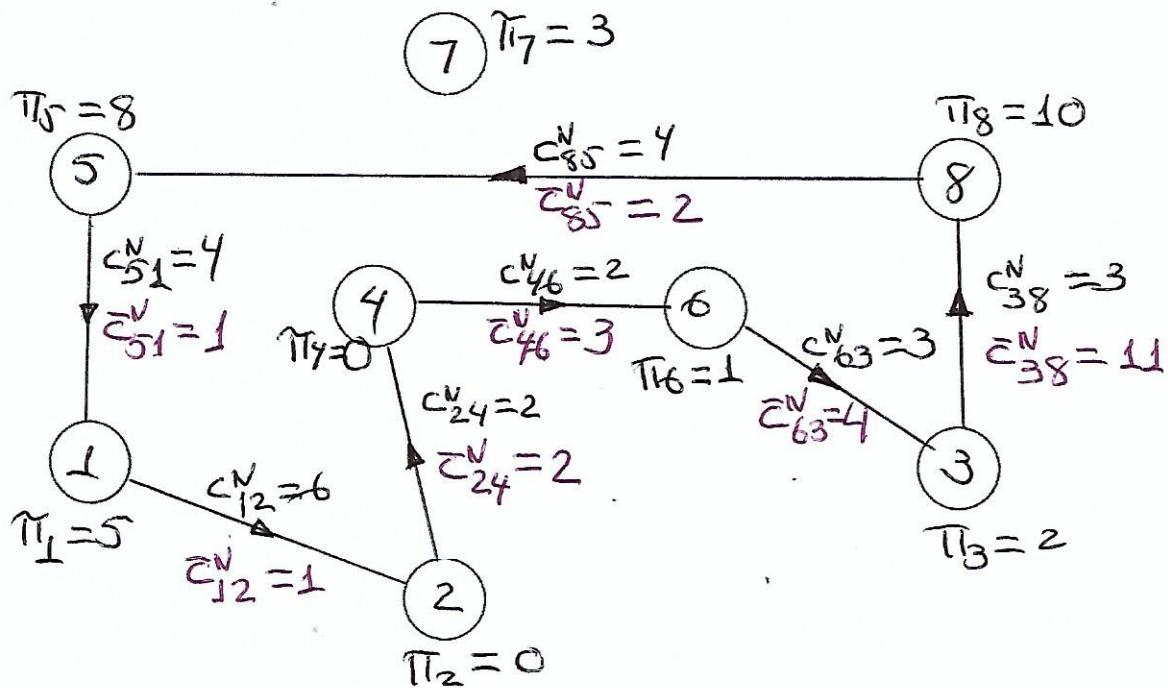


Figura 16. Valores dos custos reduzidos para as variáveis não básicas da 5ª solução básica viável.

3 O Conceito de Árvore em um Grafo Não Orientado

O algoritmo simplex examina somente soluções básicas viáveis de um problema de programação linear na busca de uma solução ótima. Em uma solução básica viável, somente as variáveis básicas podem assumir valores diferentes de zero. As colunas das variáveis básicas no sistema de equações do problema de programação linear são linearmente independentes formando uma matriz inversível B , denominada base.

No caso do problema de transbordo definido em um grafo orientado, há um interesse em saber a natureza dos arcos associados às variáveis básicas.

A Figura 17. mostra o grafo ^{orientado} $G_0 = (N, A_0)$ associado ao problema introdutório de transbordo enquanto a Figura 18 mostra o grafo não orientado $G = (N, A)$, subjacente ao grafo orientado G_0 , com a eliminação da orientação dos arcos.

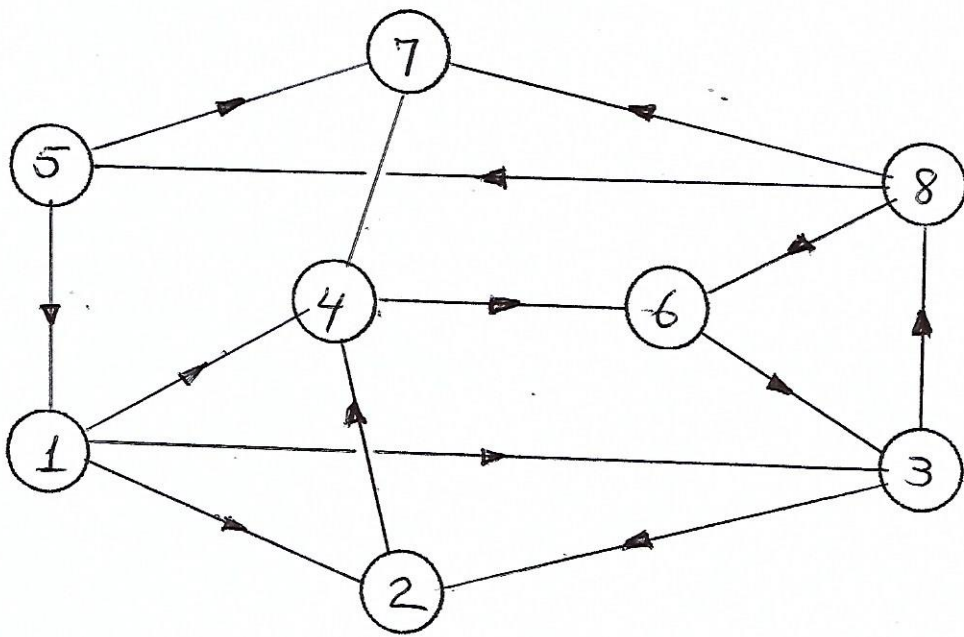


Figura 17 Grafo orientado associado ao problema introdutório de transbordo

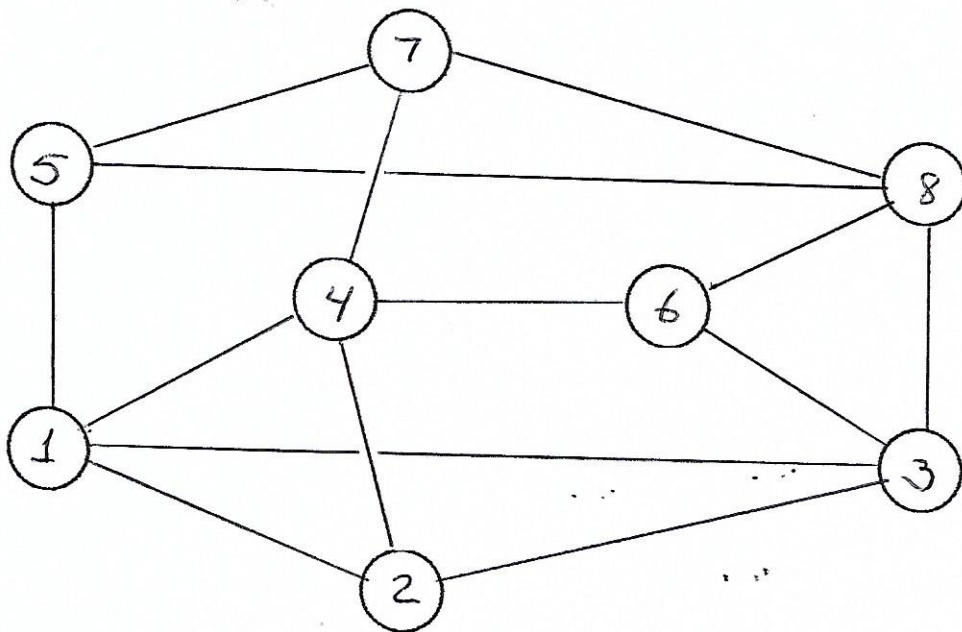


Figura 18 Grafo não orientado subjacente ao grafo orientado do problema introdutório de transporte

Árvore

Dado um grafo não orientado $G = (N, A)$,
uma árvore em G é um subgrafo

$G' = (N', A')$ conexo e que não contém ciclos.

Sem a preocupação com formalizar as definições
de subgrafo, conexidade e inexistência de
ciclos, são mostradas na Figura 19 algumas
árvores no grafo da Figura 18

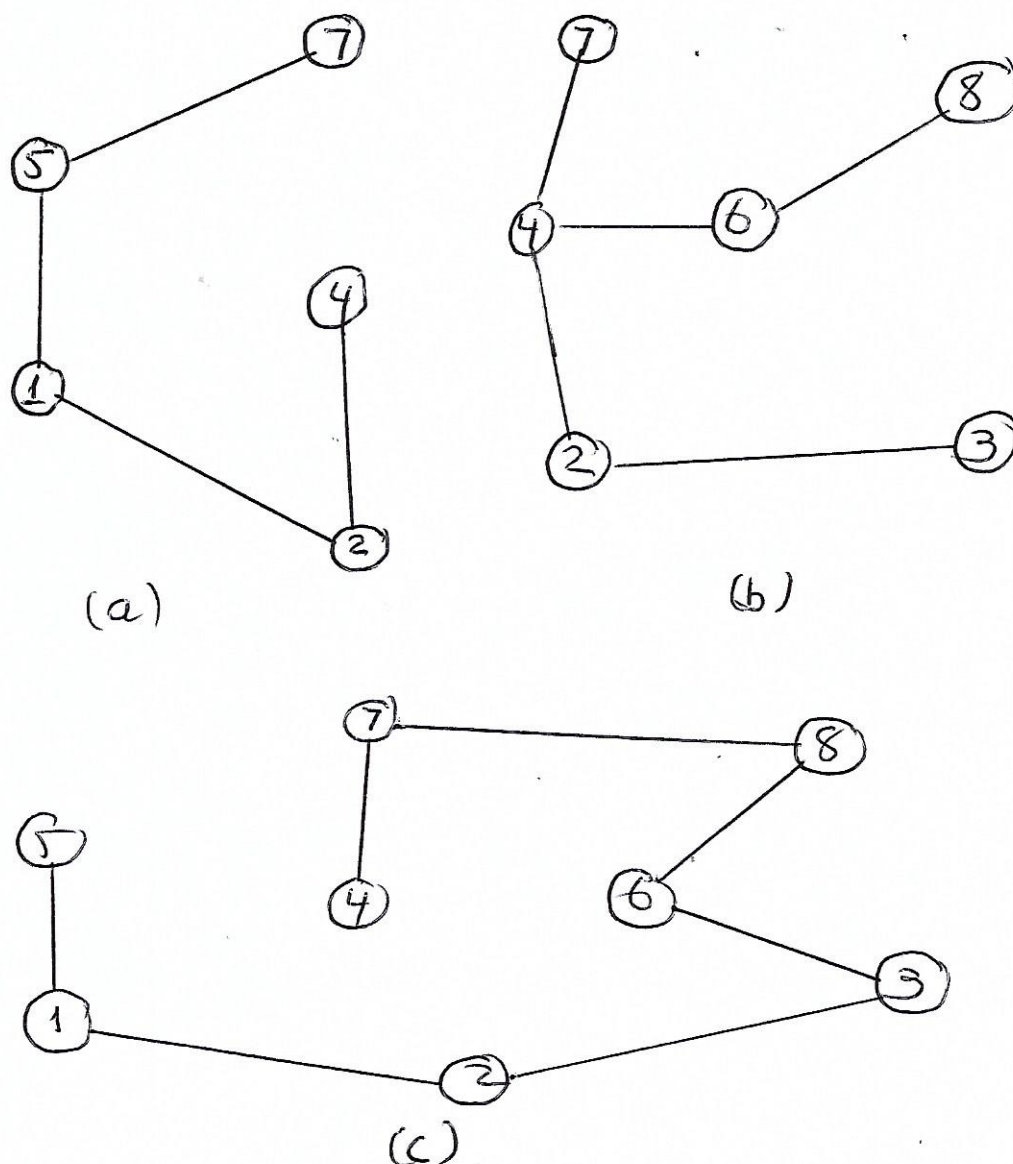


Figura 19 - Três árvores no grafo não orientado
da Figura 18

Das 3 árvores da figura 19, cabe destacar a do item (c); ela é uma árvore que contém todos os nós do grafo $G = (N, A)$ da Figura 18. Diz-se que ela é uma árvore que cobre o grafo $G = (N, A)$ e, por extensão, que cobre o grafo orientado $G_o = (N, A_o)$ da Figura 17.

Convém examinar agora as Figuras 2, 6, 9, 12 e 15, que mostram, respectivamente, os subgrafos associados às variáveis básicas da 1ª, 2ª, 3ª, 4ª e 5ª soluções básicas viáveis do problema introdutório de transbordo. Consta-se, em todos os casos que os

arcos associados às variáveis básicas formam uma árvore que cobre o grafo $G_o = (N, A_o)$ no qual o problema introdutório de transbordo é definido.

Por fim, cabe comentar que a árvore da Figura 19c tem uma particularidade que a diferencia das árvores das Figuras 2, 6, 9, 12 e 15. Na Figura 19c não há mais de 2 arcos (não orientados) incidindo em qualquer nó do grafo; na Figura 6, há 3 arcos incidindo no nó 4 e 3 no nó 7; na Figura 9, 3 arcos incidindo nos nós 1, 4 e 7; na Figura 12, 3 arcos incidindo nos nós 1 e 7; e, na Figura 15, 3 arcos incidendo no nó 7. O procedimento para geração de solução básica inicial,

a ser mostrado na seção b dessas notas de aula, constrói uma árvore como a da Figura 14c.

4. Um Problema de Transbordo Genérico, seu Modelo Matemático e Propriedades.

Depois da apresentação e resolução de um problema específico (particular) de transbordo, cabe agora a busca de uma generalização. Assim, seja $G_0 = (N, A_0)$ um grafo orientado (uma rede orientada) em que N é o conjunto de nós e A_0 é o conjunto de arcos orientados (i, j) ligando dois nós i e $j \in N$; o nó i é chamado de origem e o nó j de destino do arco orientado (i, j) . Para o que segue, $N = \{1, 2, \dots, n\}$; isto é, há n nós no conjunto N . Para cada nó $i \in N$ está associado um parâmetro b_i ; se $b_i > 0$, b_i representa a oferta de um dado produto no nó i e, se $b_i < 0$, $-b_i$ representa a demanda do mesmo produto no nó i^* . A cada arco $(i, j) \in A_0$ está associado um parâmetro c_{ij} , que representa o custo unitário de transporte do produto ao longo daquele arco, isto é quanto custa levar uma unidade do produto do nó i para o nó j , utilizando o arco (i, j) . Um problema genérico de transbordo consiste em determinar

* Pode haver o caso $b_i = 0$, em que o nó i é chamado de centro de transbordo puro.

os fluxos nos arcos $(i,j) \in A_0$ que atendam as ofertas/demandas dos nós $i=1,2,\dots,n$ e minimizem o custo total de transporte (problema de planejamento central)

Utilizando a variável de decisão x_{ij} para designar o fluxo ao longo do arco orientado (i,j) , o modelo matemático de um problema genérico de transporte, com equilíbrio entre oferta e demanda nos nós da rede pode ser escrito na forma:

minimizar C_t

$$C_t = \sum_{(i,j) \in A_0} c_{ij} x_{ij} \quad (4)$$

sujeito a restrições

$$\sum_{(i,j) \in A_0} x_{ij} - \sum_{(k,i) \in A_0} x_{ki} = b_i, \quad i=1,2,\dots,n \quad (5)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i,j) \in A_0 \quad (6)$$

A expressão (4) corresponde ao custo total de transporte nos arcos orientados da rede; a expressão (5), no caso de um centro produtor i ,

com $b_i > 0$, impõe que a soma dos fluxos que deixam o nó i menos a soma dos fluxos que chegam ao nó i é igual à oferta $b_i > 0$ deste nó. No caso de um certo consumidor i , com $b_i < 0$, a expressão (5) impõe que o fluxo total saindo do nó i menos o fluxo total chegando ao nó i é igual ao valor da sua demanda multiplicada por -1 (ou que o fluxo total chegando ao nó i menos o fluxo total saindo do nó i é igual à sua demanda). A expressão (6) indica o espaço das variáveis de base x_{ij} .

O modelo acima apresentado corresponde a um problema de programação linear, cujo sistema de equações tem características específicas:

- cada variável x_{ij} aparece em duas das n equações (5), uma vez com coeficiente $+1$ na equação correspondente ao nó i e outra com coeficiente -1 na equação correspondente ao nó j ;
- o sistema de equações (5) é redundante; de fato, somando-se todas as equações, tendo em vista a observação (a) e a

30

hipótese de equilíbrio entre oferta e demanda nos nós da rede, isto é $\sum_{i=1}^n b_i = 0$, o resultado que se obtém é:

$$\sum_{(i,j) \in A} b_{ij} x_{ij} = 0 \quad (7)$$

c) quaisquer $(n-1)$ equações do sistema (5) são independentes;

d) das observações (b) e (c), conclui-se que uma solução básica do problema de transporte tem $(n-1)$ variáveis básicas.

e) a partir da observação (a), conclui-se que o custo reduzido de uma variável na forma canônica, calculado a partir da relação

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi A_{ij}$$

tem como resultado, já explicitado na página (5):

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j \quad (1)$$

em que A_{ij} é a coluna dos coeficientes da variável x_{ij} no sistema de equações (5) e π é o vetor linha dos multiplicadores simplex associados a cada equação do sistema (5), ou a cada nó da rede.

A expressão se aplica tanto às variáveis básicas quanto não básicas. No caso das variáveis básicas x_{ij}^B , como $\bar{c}_{ij}^B = 0$, de (1) resulta um sistema de $(n-1)$ equações

$$\bar{\pi}_i - \bar{\pi}_j = \bar{c}_{ij}^B \quad (2) \text{ (ver pg 6)}$$

Como há n multiplicadores simplex, é necessário arbitrar o valor de um dos multiplicadores simplex e, depois, calcular sequencialmente os valores demais pela expressão (6).

Por fim, nesta seção, cabe enunciar duas propriedades importantes, sem preocupação com a demonstração.

Propriedade 1 B é uma base para o problema de transbordo se e somente os arcos associados às colunas (variáveis) de B formam uma árvore que cobre o grafo em que o problema de transbordo está definido.

Esta propriedade dá respaldo ao procedimento, a ser visto na seção 6, de geração de uma solução básica inicial tendo em vista que ele tem o objetivo de construir uma árvore que cobre o grafo.

Propriedade 2 Se T é uma árvore que cobre o grafo $G_0 = (N, A_0)$, a adição de qualquer arco de G_0 forma um ciclo único.

Esta propriedade dá respaldo ao algoritmo para resolução do problema de transbordo. De fato, quando se escolhe, numa dada iteração, uma variável para se tornar básica, é necessário determinar qual das variáveis básicas atuais deixará de ser básica. E esta determinação está centrada no ciclo formado pelo arco da variável que vai se tornar básica com os arcos das variáveis básicas atuais.

5 O Algoritmo para Resolução do Problema de Transbordo

0 - Ponto de Partida

É dada uma solução básica viável ℓ , por meio dos valores de $(n-1)$ variáveis básicas, sendo n o número de nós do grafo orientado $G_0 = (N, A_0)$ para o qual o problema de transbordo está definido. Os arcos associados a essas variáveis formam uma árvore que cobre o grafo $G = (N, A)$ subjacente a G_0 .

Passo 1 - Exame de otimalidade da solução básica viável atual

- 1.1 Impondo, para as $(n-1)$ variáveis básicas x_{ij}^B , que $\bar{c}_{ij}^B = 0$, do que resulta:

$$\pi_i - \pi_j = c_{ij}^B \quad (2)$$

arbitre o valor de um desses multiplicadores simplex e calcule, sequencialmente, os valores dos demais.

- 1.2 Calcule, para todas as variáveis não básicas, x_{ij}^N , o custo reduzido $\bar{c}_{ij}^N$

$$\bar{c}_{ij}^N = c_{ij}^N - \pi_i + \pi_j \quad (3)$$

Caso não haja nenhum $\bar{c}_{ij}^N < 0$, a solução básica viável é ótima. FIM. Em caso contrário, vá para o Passo 2

Passo 2 Melhoria da solução básica viável atual

2.1 Escolha da variável não básica atual que passará a ser básica.

Determine

$$\min \{ \bar{c}_{ij}^N < 0 \} = \bar{c}_{rs}^N \quad (7)$$

A variável não básica atual x_{rs} vai se tornar básica na próxima solução básica viável.

2.2 Determinação da variável básica atual que deixará de ser básica.

Considere o subgrafo formado pelo arco da variável x_{rs} e pelos arcos das variáveis atuais. Neste subgrafo há um (único) ciclo (não orientado), conforme ilustrado esquematicamente na Figura 20. Uma vez que os arcos associados às variáveis básicas atuais formam uma árvore (subgrafo sem ciclos) o arco da variável x_{rs} faz necessariamente parte deste ciclo. Atribua

a x_{rs} o valor $x_{rs} = \theta$ e altere os valores das variáveis básicas associadas aos arcos do ciclo para $x_{ij}^B + \theta$ ou $x_{ij}^B - \theta$, de modo que as restrições de oferta/demanda nos nós do ciclo sejam satisfeitas. Determine, então, o valor de θ :

$$\theta = \min \{x_{ij}^B \rightarrow x_{ij}^B - \theta\} = x_{pq}^B \quad (8)$$

Desta forma, quando x_{rs} assumir este valor θ , a variável básica atual x_{pq}^B irá assumir valor nulo, deixando de ser básica.

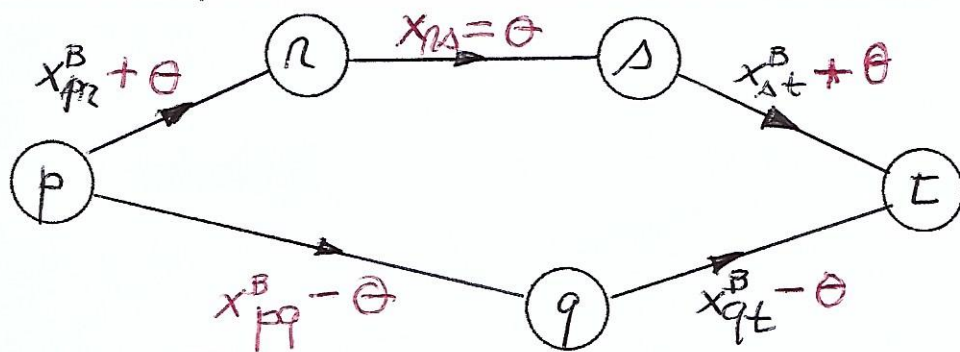


Figura 20. Ciclo formado pelo arco da variável x_{rs} e pelos arcos das variáveis básicas atuais

Em caso de empate no cálculo do valor de θ , isto é

$$\min \{x_{ij}^B \rightarrow x_{ij}^B - \theta\} = x_{pq}^B = x_{qt}^B$$

escolha, arbitrariamente, uma delas para deixar de ser básica, mantendo a(s) outra(s) como variável(ais) básica(s) com valor nulo. A nova

Solução básica viável será degenerada.

Cabe um último comentário referente a este item 2.2. Há uma regra simples para definir quais das variáveis básicas alteradas terão seus valores alterados para $x_{ij}^B + \theta$ e quais para $x_{ij}^B - \theta$: Percorra o ciclo de acordo com o sentido definido pelo arco (r, s) ; se o arco da variável básica x_{ij}^B se opõe ao sentido de percurso, altere o valor para $x_{ij}^B - \theta$. Caso o arco da variável x_{ij}^B acompanhe o sentido de percurso do ciclo, altere o valor para $x_{ij}^B + \theta$.

Passo 3 Determinação da nova solução básica viável

Os valores das variáveis básicas da nova solução básica viável são os seguintes:

a) A variável x_{rs} se torna básica com valor $\theta = x_{pq}^B$.

b) Os valores das variáveis básicas, cujos arcos fazem parte do ciclo mencionado em 2.2, são aumentados ou subtraídos de uma quantidade θ , conforme a orientação do arco no mencionado ciclo.

c) Não são alterados os valores das variáveis básicas cujos arcos não fazem parte do ciclo.

Passo 4 - Voltar ao Passo 1

6 - Procedimento para Gerar uma Solução Básica Inicial para o Problema de Transbordo

Conforme mencionado na seção anterior, é necessário dispor-se de uma solução básica viável inicial para a aplicação do algoritmo para resolução do problema de transbordo.

Não é, no entanto, uma tarefa trivial gerar uma solução básica viável para instâncias de maior porte do problema de transbordo. O procedimento proposto abaixo busca atribuir valores a $(n-1)$ variáveis cujos arcos formem uma árvore que cubra o grafo, com a forma da aquela da Figura 14 c. Neste procedimento, são atribuídos, sequencialmente, valores não negativos a $(n-1)$ variáveis de forma a obter, sucessivamente as ofertas/demandas dos n nós do grafo orientado $G_0 = (N, A_0)$. Eventualmente, se

ao se chegar a um dado nó r , o valor atualizado de b_r for positivo e não houver na rede original nenhum arco orientado do nó r para algum nó s ainda não balanceado, será necessário criar um arco artificial (r, s) e atribuir $x_{rs} = b_r$.

Portanto, x_{rs} será uma variável artificial. Caso, ao se chegar ao nó r , b_r fosse negativo e não

houvesse nenhum arco (s, r) na rede provindo de um nó ainda não balanceado, seria necessário criar um arco artificial (s, r) e atribuir $x_{sr} = -b_r$.

Até o fim do procedimento, a solução gerada poderia conter diversas variáveis artificiais.

Como pelo processo de construção, seriam $(n-1)$ arcos sem formar ciclo, esta solução teria uma característica de solução básica; se contasse com variáveis artificiais, seria uma solução básica inviável.

Em tal caso, seria necessário utilizar o método das duas fases visto no estudo de programação linear. Na primeira fase, a função objetivo é a soma das variáveis artificiais que se busca minimizar. Na segunda fase, eliminadas as variáveis artificiais (e os respectivos arcos do grafo), passa-se à minimização do custo de transporte, sujeito ao atendimento das restrições de oferta/demanda e de não negatividade das variáveis.

A seguir, apresenta-se um procedimento para gerar uma solução básica inicial, eventualmente inviável; depois é formalizado o modelo

matemático para o problema da fase I e, ao fim, eles são aplicados ao exemplo introdutório.

6.1 Procedimento para gerar uma solução básica inicial, eventualmente inviável

1. Comece por um nó qualquer u

a) Se $b_u > 0$, procure na rede um arco orientado (u, v) , faça $x_{uv} = b_u$ (com isto, a oferta do nó u é atendida ou o nó u fica balanceado), atualize $b_v \rightarrow b_v + x_{uv}$ e passe ao balanceamento do nó v .

b) Se $b_u < 0$, procure na rede um arco orientado (v, u) , faça $x_{vu} = -b_u$ (com isto, fica atendida a demanda do nó u , ou o nó fica balanceado), atualize $b_v \rightarrow b_v - x_{vu}$ e passe ao balanceamento do nó v .

2. Em uma iteração genérica, no balanceamento de um nó r

a) Se $b_r > 0$, procure na rede um arco orientado (r, s) , sendo s um nó ainda

não balanceado, faça $x_{rs} = b_r$ (balanceando assim, o nó r), faça a atualização de b_s para $b_s + x_{rs}$ e passe ao balanceamento do nó s .

b) Se $b_r < 0$, procure na rede um arco orientado (s, r) , com origem em nó ainda não balanceado, faça $x_{sr} = -b_r$ (balanceando o nó r), atualize $b_s \rightarrow b_s - x_{sr}$ e passe ao balanceamento do nó s .

Caso em (2a) não haja na rede nenhum arco orientado, com origem em r e destino em nó ainda não balanceado, introduz-se um arco artificial (r, s) . Da mesma forma, caso não exista em (2b) nenhum arco orientado com origem em nó ainda não balanceado e destino r , cria-se um arco artificial (s, r) . O procedimento é aplicado até que todos os nós sejam balanceados, atribuindo-se valores a $(n-1)$ variáveis básicas, algumas eventualmente artificiais.

6.2 O modelo matemático do problema da Fase I

Na fase I do método das duas fases, a função objetivo é a soma das variáveis artificiais, que se deseja minimizar. As restrições continuam sendo o atendimento das ofertas/demandas dos nós da rede, contando agora com o transporte em arcos artificiais. Existe para a fase I um grafo ampliado $G'_0 = (N, A'_0)$ com o mesmo conjunto de nós e a inclusão do conjunto de arcos artificiais. O conjunto A'_0 pode ser escrito

$$A'_0 = A_0 \cup A_a$$

onde A_0 é o conjunto de arcos originais da rede e A_a é o conjunto de arcos artificiais.

Com base no modelo matemático para um problema genérico de transbordo, apresentado na seção 4 deste texto, uma primeira versão do modelo matemático para o problema da fase I é apresentada abaixo.

$$\text{minimizar } w = \sum_{(i,j) \in A_a} x_{ij} \quad (9)$$

sujeito a restrições:

$$\sum_j x_{ij} - \sum_k x_{ki} = b_i, i \in N \quad (10)$$

$$x_{ij} \geq 0, (i,j) \in A'_0 \quad (11)$$

ou ainda, para tornar o modelo mais semelhante ao do problema de transbordo, reescrever a função objetivo w na forma

$$w = \sum_{(i,j) \in A_0} d_{ij} x_{ij} \quad (12)$$

tal que $d_{ij} = 1$, se $(i,j) \in A_0$
e $d_{ij} = 0$, se $(i,j) \notin A_0$

Desta forma, o algoritmo para resolução do problema de transbordo pode, com as pertinentes substituições de c_{ij} e $\bar{c}_{ij}$ por d_{ij} e $\bar{d}_{ij}$, respectivamente, ser aplicado para a resolução do problema da Fase I

6.3 Aplicação do Procedimento de Geração de Solução Básica Inicial e do Método das Duas Fases para a Resolução do Problema Introdutório

A Figura 21 abaixo apresenta a rede acenta da do problema introdutório de transbordo, com os valores das ofertas/demandas $b_i, i=1, \dots, 8$, nos nós de rede; com o objetivo de evitar poluição, não são

mostrados os valores dos custos unitários de transporte c_{ij} , desnecessários para a Fase I.

43

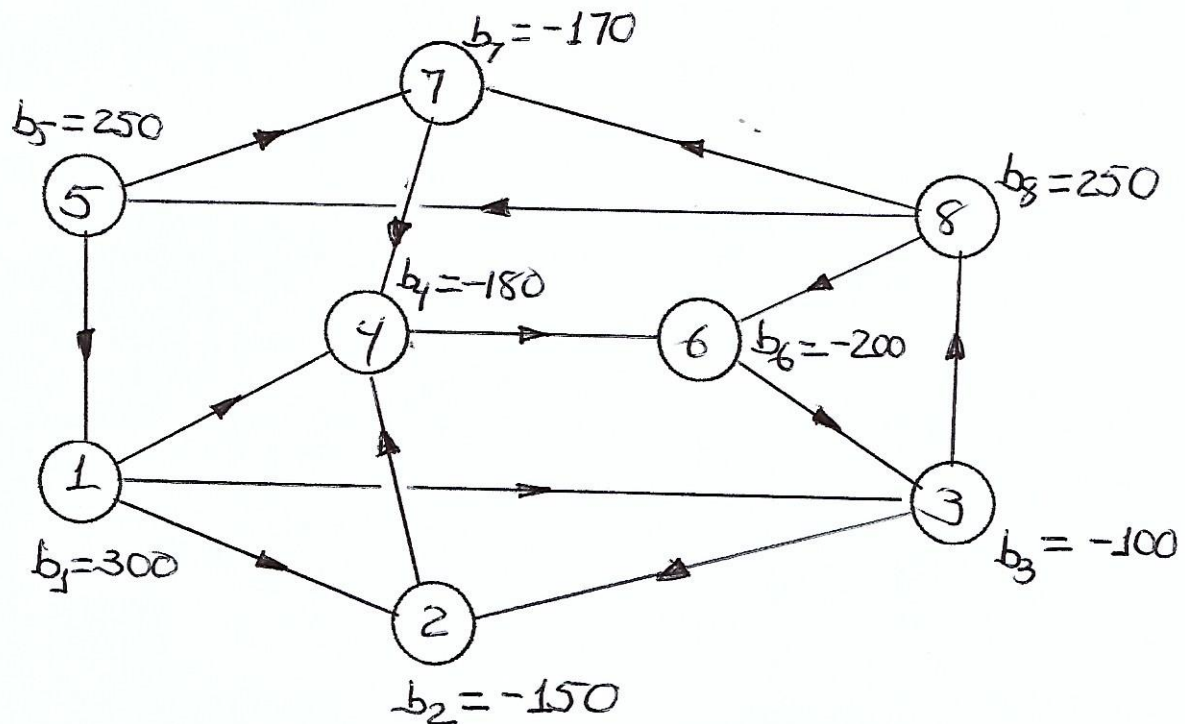


Figura 21 - Grafo orientado do problema introdutório de transbordo, com ofertas e demandas

6.3.1 Geração da solução básica inicial

Comece pelo nó 1

Como $b_1 = 300 > 0$, procura-se no grafo um arco orientado $(1, v)$ para escoar a oferta do nó 1; escolhe-se o arco $(1, 2)$, atribui-se $x_{12} = 300$, atualiza-se $b_2 = -150$ para $b_2 + x_{12} = 150$ e passa-se ao balanceamento do nó 2.

Nó 2 Como $b_2 = 150 > 0$, procura-se na rede um arco orientado $(2, v)$ para escoar a oferta do nó 2. Existe o arco $(2, 4)$, atribui-se $x_{24} = 150$, atualiza-se $b_4 = -180$ para $b_4 + x_{24} = -30$ e passa-se ao balanço

Nó 4 Como $b_4 = -30$, procura-se na rede um arco orientado $(u, 4)$, sendo u um nó ainda não balanceado. Existe o arco $(7, 4)$, atribui-se $x_{74} = 30$, atualiza-se $b_7 = -170$ para $b_7 - x_{74} = -200$ e passa-se ao balanceamento do nó 7

Nó 7 Como $b_7 = -200 < 0$, procura-se na rede um arco orientado $(u, 7)$, escolhe-se o arco $(5, 7)$, atribui-se $x_{57} = -b_7 = 200$, atualiza-se $b_5 = 250$ para $b_5 - x_{57} = 50$ e passa-se ao balanceamento do nó 5.

Nó 5 Como $b_5 = 50 > 0$, procura-se na rede um arco $(5, v)$, sendo v um nó ainda não balanceado. Como não existe tal arco, cria-se o arco artificial $(5, 3)$, atribui-se $x_{53} = b_5 = 50$, atualiza-se $b_3 = -100$ para $b_3 + x_{53} = -50$ e passa-se ao balanceamento do nó 3.

Nó 3 Como $b_3 = -50$, procura-se na rede um arco $(u, 3)$, sendo u um nó ainda não balanceado. Existe o arco $(6, 3)$, atribui-se $x_{63} = -b_3 = 50$, atualiza-se $b_6 = -200$ para $b_6 - x_{63} = -250$ e passa-se ao balanceamento do nó 6.

Nó 6 Como $b_6 = -250$, busca-se na rede um arco (u, v) , sendo u um nó ainda não balanceado. Existe o arco $(8, 6)$, atribui-se $x_{86} = -b_6 = 250$ e atualiza-se $b_8 = 250$ para $b_8 - x_{86} = 0$. (O nó 8 também fica balanceado.)

A figura 22 mostra a árvore associada as variáveis básicas da solução básica gerada pelo procedimento. Considerando que o arco $(5, 3)$ é artificial, não existindo no grafo orientado da Figura 16 é necessário recorrer ao método das duas fases. Na fase I, a função objetivo, a ser minimizada, é a soma das variáveis artificiais. Ou como exposto na subseção anterior 6.2,

$$W = \sum_{(i,j) \in A_0} d_{ij} x_{ij}, \quad d_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } (i,j) \in A_0 \\ 1, & \text{se } (i,j) \in A_a \end{cases}$$

Passa-se, então, à resolução do problema da Fase I, utilizando-se o mesmo algoritmo já

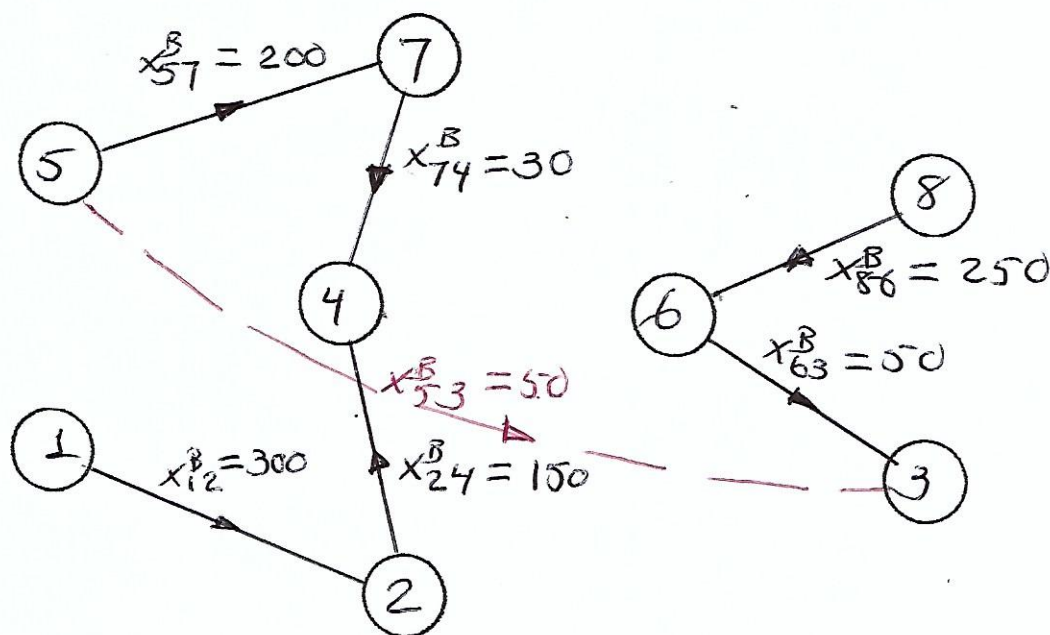


Figura 22. Variáveis básicas da solução básica inviável inicial e árvore associada

empregado para o problema original (Fase II), apenas com a substituição de c_{ij} e $\bar{c}_{ij}$ por d_{ij} e $\bar{d}_{ij}$, respectivamente.

Passo 1 - Exame de otimalidade da solução básica viável atual.

Impondo-se, para as variáveis básicas x_{ij}^B , $\bar{d}_{ij}^B = 0$, resultam as seguintes equações

$$\pi_1 - \pi_2 = d_{12}^B = 0$$

$$\pi_2 - \pi_4 = d_{24}^B = 0$$

$$\pi_7 - \pi_4 = d_{74}^B = 0$$

$$\pi_5 - \pi_7 = d_{57}^B = 0$$

$$\pi_5 - \pi_3 = d_{53}^B = 1$$

$$\pi_6 - \pi_3 = d_{63}^B = 0$$

$$\pi_8 - \pi_6 = d_{86}^B = 0$$

Arbitrando-se para π_2 o valor $\pi_2 = 0$, são obtidos os seguintes valores para os demais multiplicadores simplex:

$$\pi_1 = 0, \pi_4 = 0, \pi_7 = 0, \pi_5 = 0, \pi_3 = -1,$$

$$\pi_6 = -1 \text{ e } \pi_8 = -1$$

A seguir, são calculados os $\bar{d}_{ij}^N$ para as variáveis não básicas x_{ij}^N , por meio da equação:

$$\bar{d}_{ij}^N = d_{ij}^N - \pi_i + \pi_j$$

A Figura 2.3 mostra os valores encontrados para os custos reduzidos $\bar{d}_{ij}^N$.

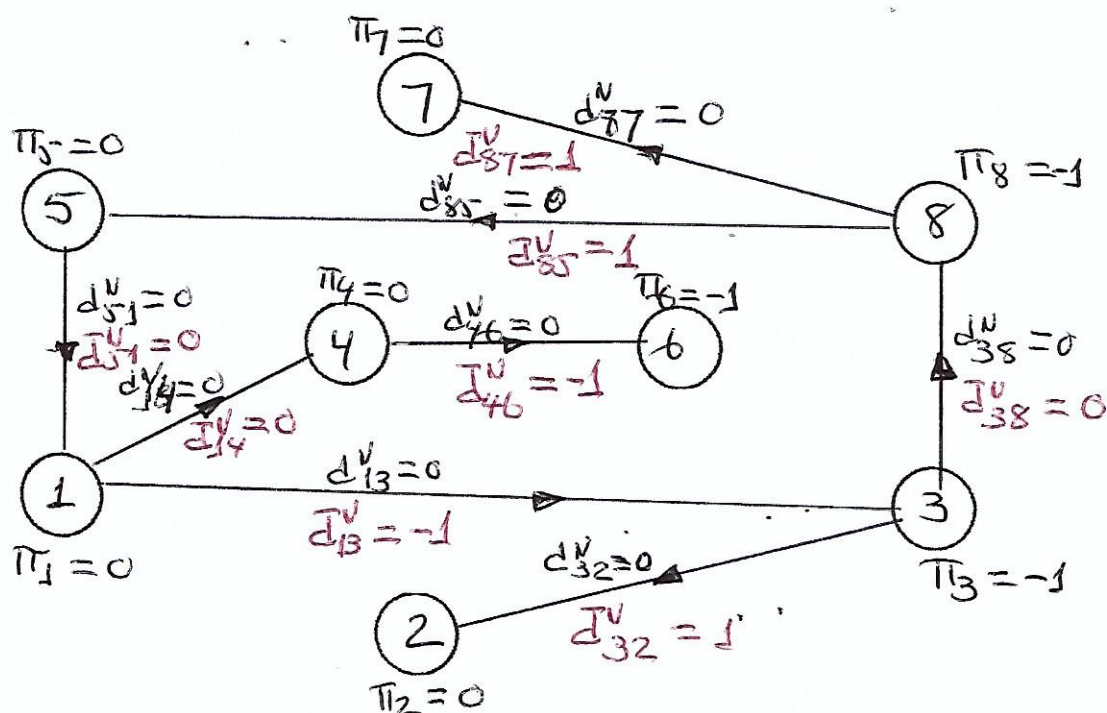


Figura 23 Custos reduzidos $\bar{d}_{ij}^N$ para as variáveis não básicas para a solução básica inicial da Fase I

Como há $\bar{d}_{ij}^N < 0$, a solução básica atual não é ótima para a Fase I.

Passo 2 - Melhoria da solução básico viável
(para o problema da Fase I)

2.1 Escolha da variável não básica que vai se tornar básica:

$$\min \{ \bar{d}_{ij}^N < 0 \} = \bar{d}_{13}^N = \bar{d}_{46}^N = -1$$

Escolhe-se, arbitrariamente, x_{13} para se tornar básica.

2.2 Determinação da variável básica atual que deixará de ser básica.

A Figura 24 mostra o ciclo formado quando se adiciona o arco (1,3) à árvore associada as variáveis básicas da Figura 17. Ao se atribuir $x_{13} = \theta$, haverá as seguintes alterações nas variáveis básicas cujos arcos fazem parte do ciclo:

x_{53}^B passa de 50 a $50 - \theta$

x_{57}^B passa de 200 a $200 + \theta$

x_{74}^B passa de 30 a $30 + \theta$

x_{24}^B passa de 150 a $150 - \theta$

x_{12}^B passa de 300 a $300 - \theta$

Logo, o limite para o crescimento de x_{13} é para $\theta = 50$, valor para o qual x_{53} se anula e deixa de ser básica. Como x_{53} é a única variável artificial, FIM da Fase I.

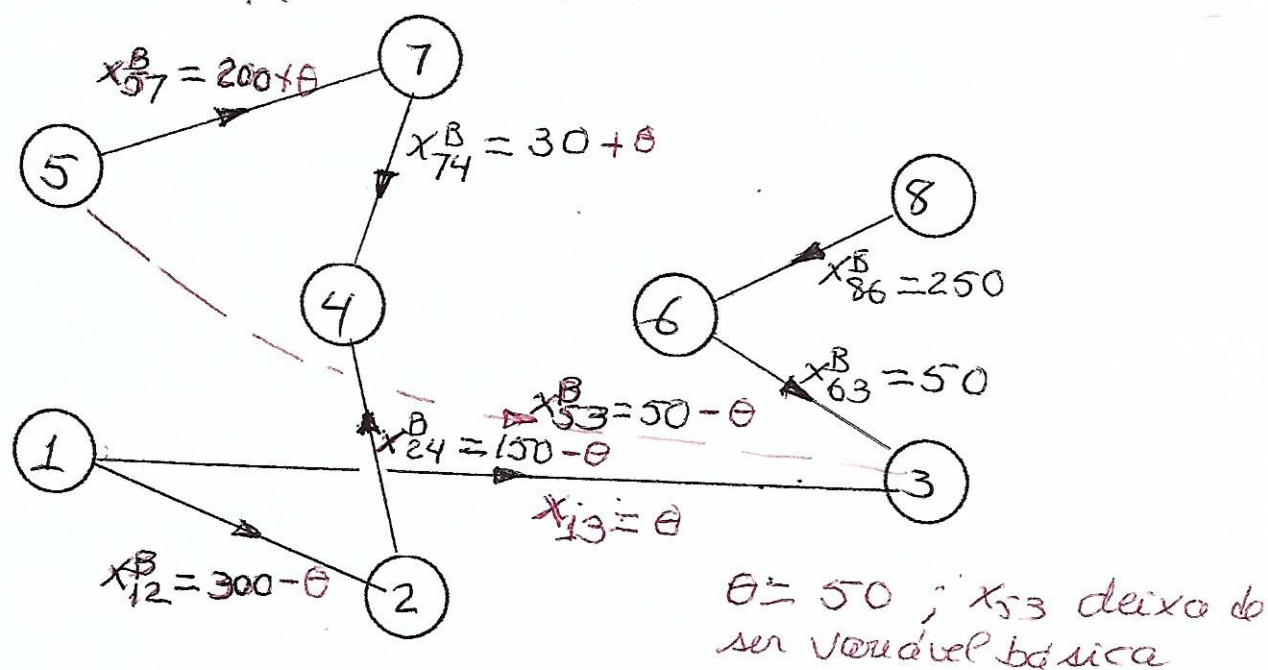


Figura 24. Determinação da variável que deixará a base.

7. Casos em que há Desequilíbrio entre Oferta e Demanda nos Nós do Grafo

Quando não há equilíbrio entre oferta e demanda nos nós da rede, algumas das restrições dos nós não podem ser escritas como igualdade.

De fato, quando há excesso de oferta, isto é $\sum_{i=1}^n b_i > 0$, as restrições para todo centro produtor devem ser escritas na forma:

$$\sum_{(i,j) \in A_o} x_{ij} - \sum_{(k,i) \in A_o} x_{ki} \leq b_i \quad \forall i, b_i > 0 \quad (*)$$

No caso de excesso de demanda, isto é $\sum_{i=1}^n b_i < 0$, são as restrições para os centros consumidores que devem ser escritas na forma de desigualdade (neste caso $\geq$)

Nestas notas de aula, será tratado com mais detalhe o caso do excesso de oferta. Colocando-se a restrição (*) acima na forma padrão:

$$\sum_{(i,j) \in A_o} x_{ij} - \sum_{(k,i) \in A_o} x_{ki} + \Delta_i = b_i \quad \forall i, b_i > 0$$

Esta variável residual tem custo nulo na função objetivo. Além disto,

$$\sum_{i: b_i > 0} \Delta_i = \sum_{i=1}^n b_i$$

Tais fatos induzem a tratar a variável residual Δ_i associada a cada centro produtor como o fluxo fictício do centro produtor i para um centro consumidor fictício $(n+1)$; com $b_{n+1} = -\sum_{i=1}^n b_i$ de modo a estabelecer o equilíbrio entre oferta e demanda nesta rede ampliada. Da mesma forma que a variável Δ_i , o fluxo $x_{i,n+1}$ tem custo unitário nulo na função objetivo.

Resumindo: amplia-se o grafo orientado original, com a introdução de um novo nó $(n+1)$, centro consumidor fictício, com $b_{n+1} = -\sum_{i=1}^n b_i$, e introdução de arcos $(i, n+1)$, ligando todo centro produtor ao centro consumidor fictício, arbitrando $c_{i,n+1} = 0$.

Nesta rede ampliada, há equilíbrio entre oferta e demanda nos nós da rede e o algoritmo visto anteriormente pode ser utilizado.