

# Fluxo de água no solo

PEF3304 – Poluição do Solo

Engenharia Ambiental

Profa. Dra. Maria Eugenia Gimenez Boscov

# Fluxo unidimensional de água no solo

$$Q = k i A \quad \text{ou} \quad v = k i$$

(Lei de Darcy, 1856)

**Q ... vazão**

**k ... coeficiente de permeabilidade**

**i ... gradiente hidráulico**

**A ... área total da seção transversal de solo**

**v ... velocidade**

**Hipótese: fluxo laminar**

# Coeficiente de permeabilidade

$$k = K \gamma / \mu$$

- k ... coeficiente de permeabilidade (condutividade hidráulica)**
- K ... permeabilidade intrínseca do solo**
- $\gamma$  ... peso específico do fluido**
- $\mu$  ... viscosidade dinâmica do fluido**

# Percolação

A água sempre se movimenta devido a diferenças de energia, sempre de pontos de maior energia para pontos de menor energia.

A energia da água em movimento pode ser expressa por:

$$E = mgh + \frac{mv^2}{2} + \frac{mp}{\rho_w}$$

← Equação de Bernoulli  
(fluido ideal escoando  
em um tubo com  
energia constante)

E: energia

m: massa

g: aceleração da gravidade

h: distância vertical em relação a um referencial de nível

v: velocidade do fluxo

p: pressão

$\rho_w$ : massa específica da água

# Percolação

Em Geotecnia prefere-se expressar o estado de energia da água em movimento por meio da carga hidráulica, que é a energia dividida pelo produto da massa com a aceleração da gravidade ( $\gamma_w$ ), em metros.

$$H = z + \frac{v^2}{2g} + \frac{u}{\gamma_w}$$

H: carga hidráulica total

z: distância vertical em relação a um referencial de nível

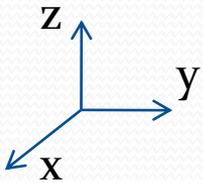
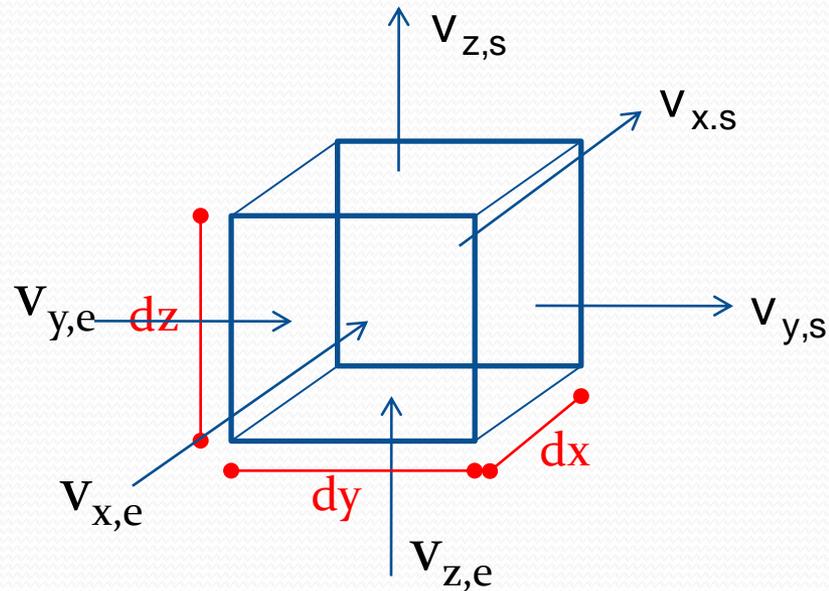
$\gamma_w$ : peso específico da água ( $=\rho_w g$ )

u: pressão neutra ( $=p-p_{at}$ )

p: pressão absoluta

$p_{at}$ : pressão atmosférica

# Fluxo permanente e equação da continuidade



# Fluxo de massa

$$J = \frac{M_w}{At}$$

J: fluxo de massa de água

M: massa de água

A: área da seção transversal

t: tempo

$$M_w = JAt$$

# Fluxo de massa

$$J = \frac{M_w}{At}$$

J: fluxo de massa de água  
M: massa de água  
A: área da seção transversal  
t: tempo

$$M_w = JAt$$

fluxo de volume

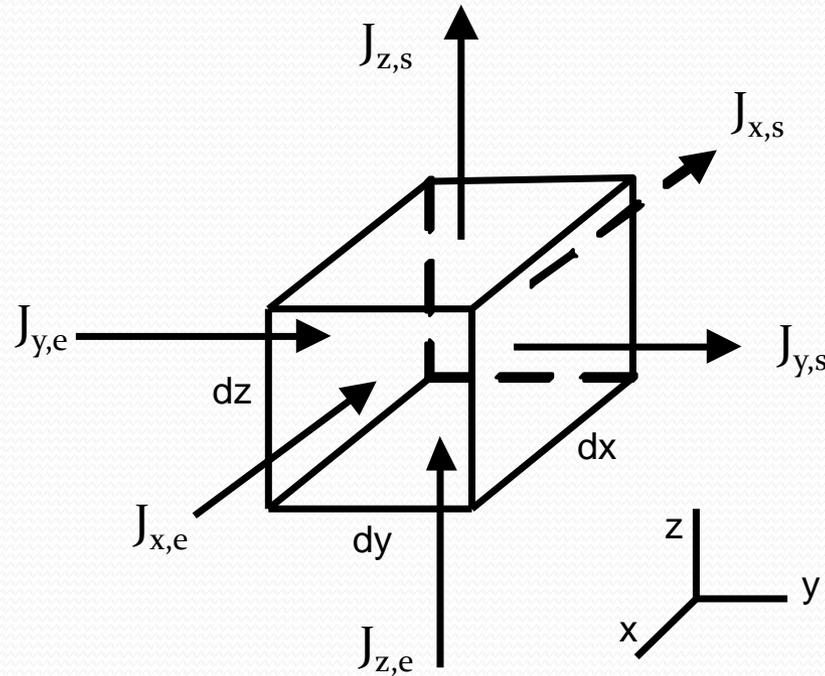
$$q = \frac{V_w}{At} = \frac{Q}{A} = \frac{L}{t} = v$$

L: comprimento de percolação  
na direção do fluxo  
v: velocidade de Darcy

$$J = \frac{V_w \rho_w}{At} = v \rho_w = q \rho_w$$

Relação entre fluxo  
de massa e fluxo  
volumétrico

Equação da continuidade  
**Equação da conservação da massa**

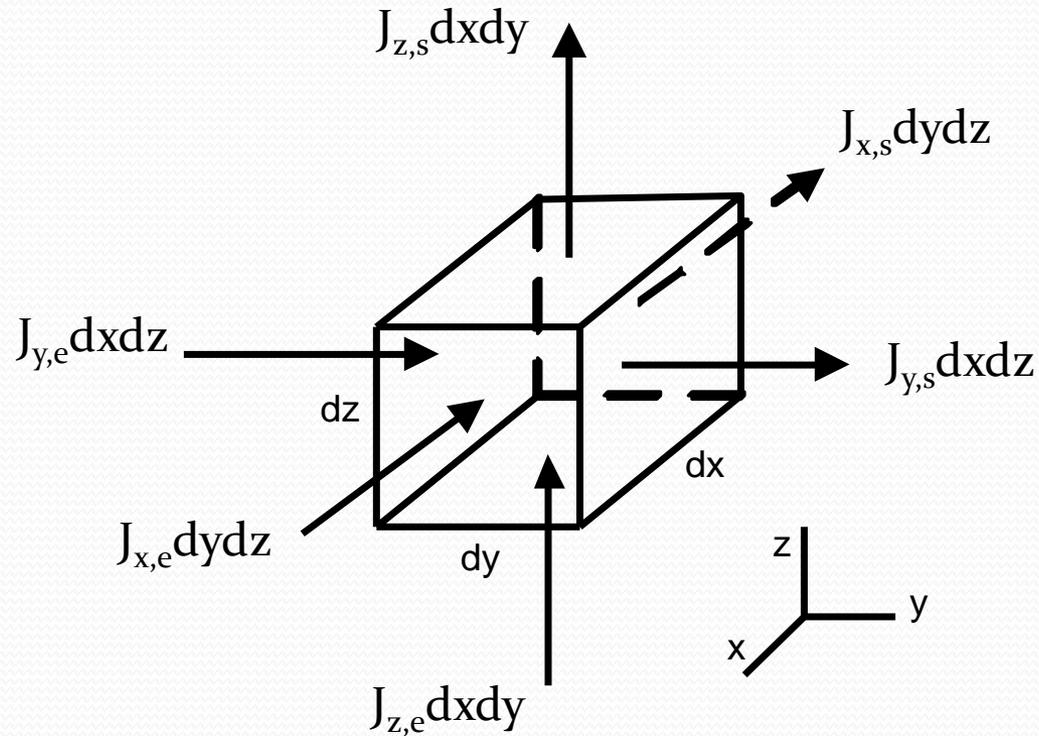


$$M_w = JA t$$

$$JA = \frac{M_w}{t}$$

# Equação da continuidade

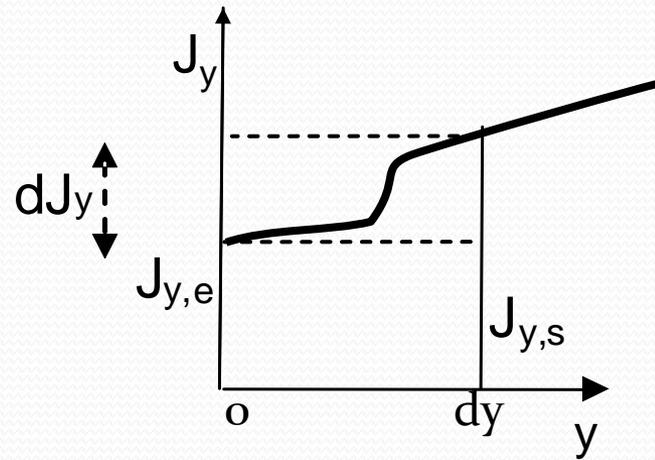
## Equação da conservação da massa



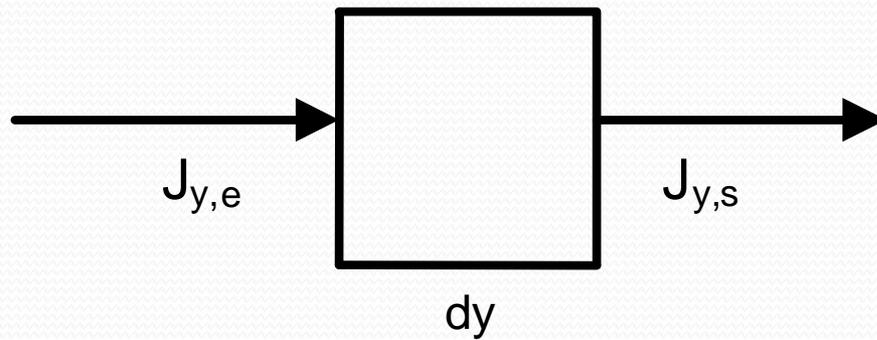
$J_{x,e} dydz =$  massa de soluto que entra no elemento segundo a direção x por unidade de tempo dt.

$$J_{x,e}dydz + J_{y,e}dxdz + J_{z,e}dxdy - J_{x,s}dydz - J_{y,s}dxdz - J_{z,s}dxdy = \frac{dM_w}{dt}$$

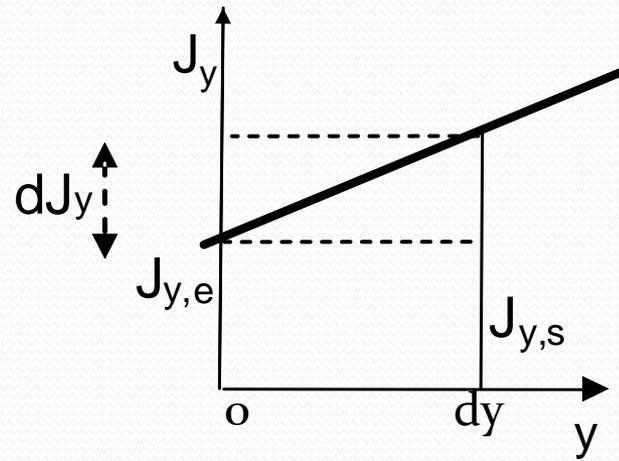
$$J_{x,e} dydz + J_{y,e} dxdz + J_{z,e} dxdy - J_{x,s} dydz - J_{y,s} dxdz - J_{z,s} dxdy = \frac{dM_{w,arm}}{dt}$$



$$J_{y,s} = J_{y,e} + dJ_y$$

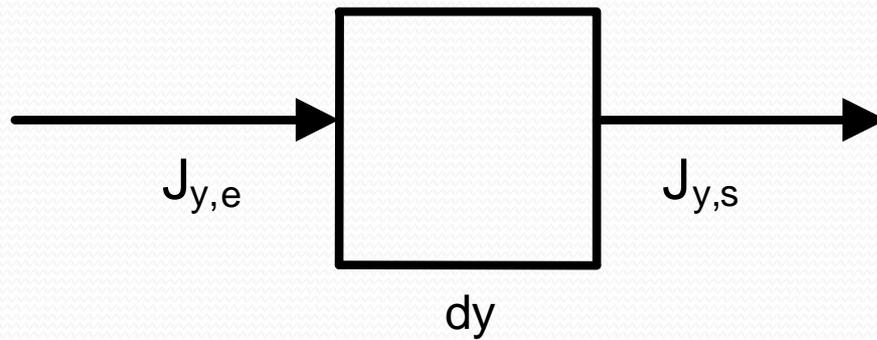


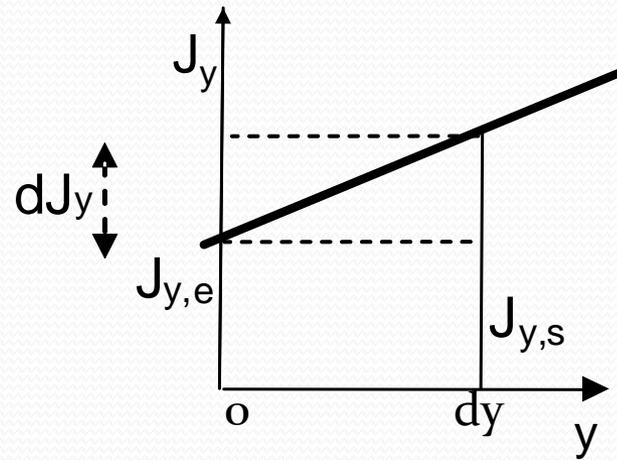
Como  $J_y$  varia ao longo de  $y$ ?  $\frac{\partial J_y}{\partial y}$  ?



$$J_{y,s} = J_{y,e} + dJ_y$$

$$\frac{\partial J_y}{\partial y} = \frac{dJ_y}{dy}$$

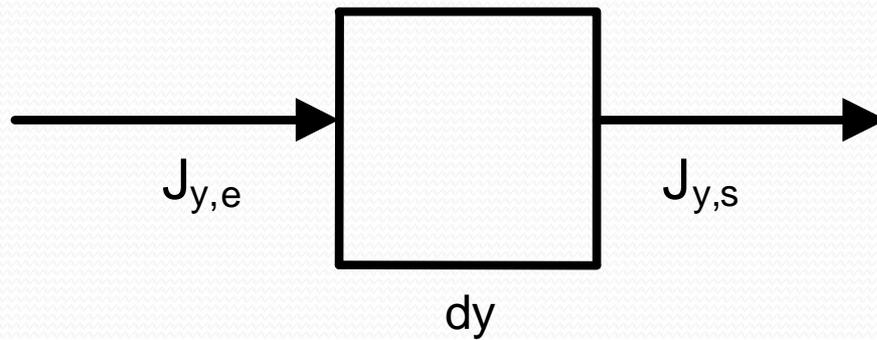




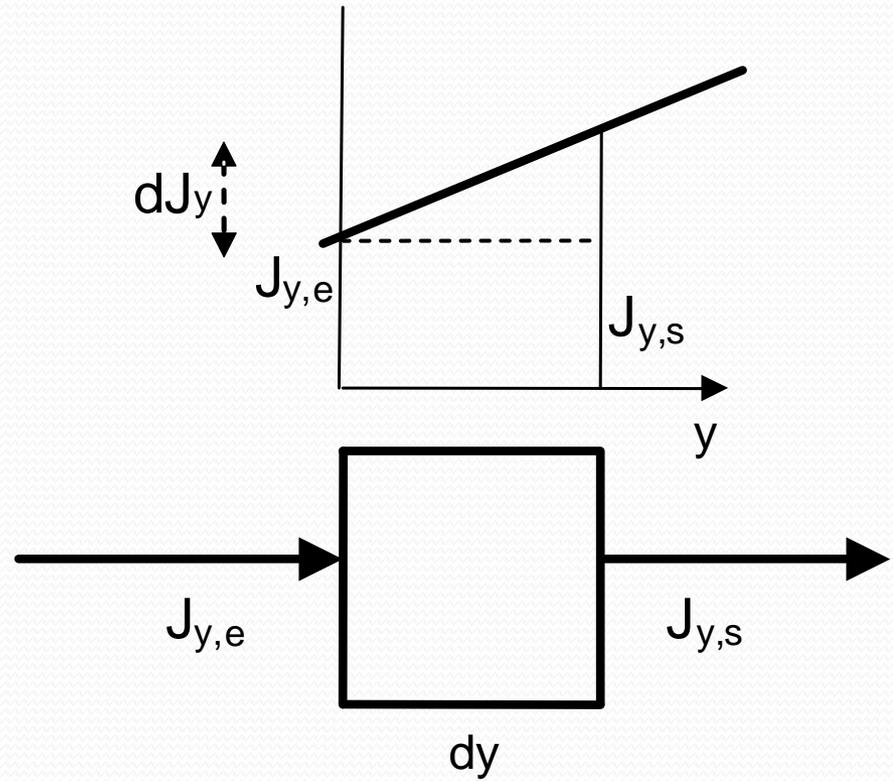
$$J_{y,s} = J_{y,e} + \frac{\partial J_y}{\partial y} dy$$

$$J_{y,s} = J_{y,e} + dJ_y$$

$$\frac{\partial J_y}{\partial y} = \frac{dJ_y}{dy} \Rightarrow dJ_y = \frac{\partial J_y}{\partial y} dy$$



$$J_{y,s} = J_{y,e} + \frac{\partial J_y}{\partial y} dy$$



$$J_{x,e} dydz + J_{y,e} dxdz + J_{z,e} dxdy - J_{x,s} dydz - J_{y,s} dxdz - J_{z,s} dxdy = \frac{\partial M_{w,arm}}{\partial t}$$

$$J_{x,e} dydz + J_{y,e} dxdz + J_{z,e} dxdy - \left( J_{x,e} + \frac{\partial J_x}{\partial x} dx \right) dydz - \left( J_{y,e} + \frac{\partial J_y}{\partial y} dy \right) dxdz$$

$$- \left( J_{z,e} + \frac{\partial J_z}{\partial z} dz \right) dxdy = \frac{\partial M_{w,arm}}{\partial t}$$

$$- \frac{\partial J_x}{\partial x} dxdydz - \frac{\partial J_y}{\partial y} dxdydz - \frac{\partial J_z}{\partial z} dxdydz = \frac{\partial M_{w,arm}}{\partial t}$$

$$- \left( \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} \right) dxdydz = \frac{\partial M_{w,arm}}{\partial t}$$

**Variação linear do  
fluxo em função da  
distância**

$$-\left(\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}\right) dx dy dz = \frac{\partial M_{w,arm}}{\partial t}$$

$$J = v\rho_w = q\rho_w$$

$$J_x = v_x\rho_w = q_x\rho_w$$

$$J_y = v_y\rho_w = q_y\rho_w$$

$$J_z = v_z\rho_w = q_z\rho_w$$

$$-\left(\frac{\partial(q_x\rho_w)}{\partial x} + \frac{\partial(q_y\rho_w)}{\partial y} + \frac{\partial(q_z\rho_w)}{\partial z}\right) dx dy dz = \frac{dM_{w,arm}}{dt}$$

$$\rho_w = \frac{M_w}{V_w}$$

$$M_w = V_w\rho_w$$

$$-\left(\frac{\partial(q_x\rho_w)}{\partial x} + \frac{\partial(q_y\rho_w)}{\partial y} + \frac{\partial(q_z\rho_w)}{\partial z}\right) dx dy dz = \frac{d(V_{w,arm}\rho_w)}{dt}$$

$$-\left(\frac{\partial(q_x\rho_w)}{\partial x} + \frac{\partial(q_y\rho_w)}{\partial y} + \frac{\partial(q_z\rho_w)}{\partial z}\right) dx dy dz = \frac{\partial(V_{w,arm}\rho_w)}{\partial t}$$

$\rho_w$  não varia no espaço e no tempo

$$-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) dx dy dz = \frac{\partial V_{w,arm}}{\partial t}$$

$$s = \frac{V_w}{V_v}$$

$$n = \frac{V_v}{V_t}$$

$$s = \frac{V_w}{nV_t}$$

$$V_w = sn V_t$$

$$n = \frac{e}{1+e}$$

$$V_w = s \frac{e}{1+e} V_t$$

$$-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) dx dy dz = \frac{\partial V_{w,arm}}{\partial t}$$

$$V_{w,arm} = S \frac{e}{1+e} V_t$$

$$-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) dx dy dz = \frac{\partial \left( s \frac{e}{1+e} V \right)}{\partial t}$$

**Fluxo saturado (s=1)**

$$V_s = \frac{V}{1+e}$$

$$-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) dx dy dz = \frac{V}{1+e} \frac{\partial e}{\partial t}$$

**Volume de sólidos não varia com o tempo**

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0$$

**Índice de vazios não varia com o tempo**

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0$$

$$-\frac{\partial \left( -k_x \frac{\partial h}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( -k_y \frac{\partial h}{\partial x} \right)_y}{\partial y} + \frac{\partial \left( -k_z \frac{\partial h}{\partial x} \right)}{\partial z} = 0$$

$$k_x \frac{\partial \left( -\frac{\partial h}{\partial x} \right)}{\partial x} + k_y \frac{\partial \left( -\frac{\partial h}{\partial x} \right)_y}{\partial y} + k_z \frac{\partial \left( -\frac{\partial h}{\partial x} \right)}{\partial z} = 0$$

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

**Lei de Darcy**

**Solo  
homogêneo:  
k não varia  
com a posição**

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

$$k_x = k_y = k_z = k$$

**Solo isotrópico**

$$k \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

**Fluxo bidimensional**

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

**EQUAÇÃO DE LAPLACE**

# Água

- Viscosidade cinemática:

Sua unidade no S.I. é *stoke* (1stoke =  $1\text{cm}^2/\text{s}$ ).

Viscosidade da água a  $20^\circ\text{C}$ :  $\nu = 1,01 \cdot 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$

- Viscosidade dinâmica: *poise* (1 poise =  $0,1\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$ ).

Água fria:  $\mu = 1,03 \cdot 10^{-4} \text{kgf}\cdot\text{s}/\text{m}^2$

## Densidade e viscosidade da água sob condições normais de pressão

Temperatura - q (°C)	Densidade absoluta - r (kg/m <sup>3</sup> )*	Viscosidade dinâmica - m (10 <sup>-3</sup> N.s/m <sup>2</sup> )	Viscosidade cinemática - n (10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s)	Densidade relativa - d
0 (gelo)	917,0	-	-	0,9170
0(água)	999,8	1,781	1,785	0,9998
4	1000,0	1,558	1,558	1,0000
5	1000,0	1,518	1,519	1,0000
10	999,7	1,307	1,308	0,9997
15	999,1	1,139	1,140	0,9991
20	998,2	1,002	1,003	0,9982
25	997,0	0,890	0,893	0,9970
30	995,7	0,798	0,801	0,9967
40	992,2	0,653	0,658	0,9922
50	988,0	0,547	0,553	0,9880
60	983,2	0,466	0,474	0,9832
70	977,8	0,404	0,413	0,9788
80	971,8	0,354	0,364	0,9728
90	965,3	0,315	0,326	0,9653
100	958,4	0,282	0,294	0,9584

(\*) Para converter para kgf.s<sup>2</sup>/m<sup>4</sup> divide-se o valor tabelado por 9,80665

# Densidade da água em função da temperatura

	Décimos de grau									
°C	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
<b>0</b>	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9998
<b>10</b>	0,9997	0,9996	0,9995	0,9994	0,9993	0,9991	0,9990	0,9988	0,9986	0,9984
<b>20</b>	0,9982	0,9980	0,9978	0,9976	0,9973	0,9971	0,9968	0,9965	0,9963	0,9960
<b>30</b>	0,9957	0,9954	0,9951	0,9947	0,9944	0,9941	0,9937	0,9934	0,9930	0,9926
<b>40</b>	0,9922	0,9919	0,9915	0,9911	0,9907	0,9902	0,9898	0,9894	0,9890	0,9885
<b>50</b>	0,9881	0,9876	0,9872	0,9867	0,9862	0,9857	0,9852	0,9848	0,9842	0,9838
<b>60</b>	0,9832	0,9827	0,9822	0,9817	0,9811	0,9806	0,9800	0,9765	0,9789	0,9784
<b>70</b>	0,9778	0,9772	0,9767	0,9761	0,9755	0,9749	0,9743	0,9737	0,9731	0,9724
<b>80</b>	0,9718	0,9712	0,9706	0,9699	0,9693	0,9686	0,9680	0,9673	0,9667	0,9660
<b>90</b>	0,9653	0,9647	0,9640	0,9633	0,9626	0,9619	0,9612	0,9605	0,9598	0,9591

máxima a 4°C = 0,999973 g/cm<sup>3</sup>

# Fluxo através do solo

Hipótese:

fluxo não modifica o solo

$$J_i = L_{ii} X_i$$

$J_i$  velocidade de fluxo

$L_{ii}$  coeficiente de condutividade

$X_i$  agente motriz

Mitchell, J. K. (1991). "Conduction phenomena: from theory to geotechnical practice". *Géotechnique*. 41 (3): 299–340. [doi:10.1680/geot.1991.41.3.299](https://doi.org/10.1680/geot.1991.41.3.299)  
(acesso gratuito)

$$v = -k \frac{\partial H}{\partial z}$$

Lei de Darcy      fluido

$$J = -K_T \frac{\partial T}{\partial z}$$

Lei de Fourier      calor

$$i = -\frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial z}$$

Lei de Ohm      eletricidade

$$J = -D_d \frac{\partial c}{\partial z}$$

Lei de Fick      substâncias químicas

Os coeficientes das equações acima são quantidades diretamente mensuráveis.

# Fluxos acoplados

Fluxos simultâneos de tipos diferentes com um único agente motriz.

$$J_i = L_{ij} X_j$$

$L_{ij}$  coeficiente de acoplamento

Exemplo: gradiente hidráulico em água contaminada causa fluxo advectivo.

## GRADIENTE

FLUXO	GRADIENTE			
	Carga hidráulica	Temperatura	Eletricidade	Concentração química
Fluido	Lei de Darcy	Termo-osmose	Eletro-osmose	Osmose química
Calor	Transferência de calor isotérmica	Lei de Fourier	Efeito Peltier	Efeito Dufour
Corrente	Corrente	Termo-eletricidade: efeito de Seebeck	Lei de Ohm	Potenciais de membrana e difusão
Íon	Advecção	Difusão térmica de eletrólito: efeito Soret	Eletro-forese	Lei de Fick