MAT2352 - Cálculo para funções de várias variáveis II
1a. Lista de Exercícios - 2o. semestre de 2023

1. Calcule as seguintes integrais duplas:

(a) $\displaystyle\iint_R (2y^2 - 3xy^3)dxdy$, onde $R = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3\}$. Resp. (a) $-\frac{585}{8}$.

(b) $\displaystyle\iint_R x \sin y \, dxdy$, onde $R = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{6}\}$. Resp. (b) $\frac{15}{4}(2-\sqrt{3})$.

(c) $\displaystyle\iint_R \frac{1}{x+y}\, dxdy$, onde $R = [1,2] \times [0,1]$. Resp. (c) $\ln \frac{27}{16}$.

2. Determine o volume do sólido limitado pela superfície $z = x\sqrt{x^2+y}$ e os planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ e $z = 0$. Resp. $\frac{4}{15}(2\sqrt{2}-1)$.

3. (a) Determine o volume do sólido contido no primeiro octante limitado por $z = 9 - y^2$ e pelo plano $x = 2$. Resp. 36.
(b) Uma piscina tem formato circular de raio 3m e profundidade variando linearmente de sul a norte, sendo que no extremo sul é de 1m e no extremo norte é de 2m. Calcule o volume da piscina. Resp. $\frac{27\pi}{2}$

4. Calcule as integrais iteradas

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dydx \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dxdy.$$

Resp. $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$.

As respostas contradizem o Teorema de Fubini? Explique.

5. Calcule as seguintes integrais duplas:

(a) $\displaystyle\iint_D xy\, dxdy$, onde $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$. Resp. (a) $\frac{1}{12}$.

(b) $\displaystyle\iint_D (x^2 - 2xy)\, dxdy$, onde $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 2-x\}$. Resp. (b) $-\frac{19}{42}$.

(c) $\displaystyle\iint_D e^{x/y}\, dxdy$, onde $D = \{(x,y) : 1 \leq y \leq 2, y \leq x \leq y^3\}$. Resp. (c) $\frac{1}{2}e^4 - 2e$.

(d) $\displaystyle\iint_D x\cos y\, dxdy$, onde D é a região limitada por $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$. Resp. (d) $(1-\cos 1)/2$.

(e) $\displaystyle\iint_D 4y^3\, dxdy$, onde D é a região limitada por $y = x - 6$ e $y^2 = x$. Resp. (e) $\frac{500}{3}$.

(f) $\displaystyle\iint_D xy\, dxdy$, onde D é a região do primeiro quadrante limitada pela circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1. Resp. (f) $\frac{1}{8}$.

(g) $\displaystyle\iint_D (x^2 \operatorname{tg} x + y^3 + 4)\, dxdy$, onde $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 2\}$. Resp. (g) 8π.

(h) Calcule $\displaystyle\iint_D e^{y-x}\, dxdy$ sendo D a região plana limitada por: $y - x = 1$; $y - x = 2$; $y = 2x$ e $y = 3x$. Resp. (h) $\frac{e^2}{2}$.

6. Determine o volume do sólido S em cada um dos seguintes casos:

(a) S é limitado superiormente pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$, inferiormente pelo plano $z = 0$ e sua projeção no plano xy é a região limitada por $y = x^2$ e $x = y^2$. Resp. (a) $\frac{6}{35}$.

(b) S é limitado superiormente por $z = xy$, inferiormente pelo plano $z = 0$ e sua projeção no plano xy é o triângulo de vértices $(1, 1)$, $(4, 1)$ e $(1, 2)$. Resp. (b) $\frac{31}{8}$.

(c) S é a região do primeiro octante limitada pelo cilindro $x^2 + z^2 = 9$ e pelo plano $x + 2y = 2$. Resp. (c) $\frac{1}{6}(11\sqrt{5} - 27) + \frac{9}{2}\,\text{arcsen}(\frac{2}{3})$.

(d) S é limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$. Resp. (d) $\frac{1}{6}$.

(e) S é a região do primeiro octante limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $y = z$, $x = 0$ e $z = 0$. Resp. (e) $\frac{1}{3}$.

(f) S é limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ e $y^2 + z^2 = a^2$, onde $a > 0$. Resp. (f) $\frac{16}{3}a^3$.

7. Escreva as duas integrais iteradas correspondentes à integral dupla $\displaystyle\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$, onde D é a região do plano limitada pelas curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $x - 2y + 1 = 0$.

8. Calcule as seguintes integrais, invertendo a ordem de integração:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\, dxdy$ (b) $\displaystyle\int_0^3 \int_{y^2}^9 y\cos(x^2)\, dxdy$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi/2} \cos x\sqrt{1 + \cos^2 x}\, dxdy$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}\, dydx$ (e) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^{\sqrt[3]{y}} \text{sen}(x^2)\, dxdy.$

Resp. (a) $(e^9 - 1)/6$, (b) $\frac{1}{4}\sin 81$, (c) $(2\sqrt{2} - 1)/3$, (d) $\frac{1}{3}(e - 1)$, (e) $\frac{1}{2}(1 - \sin(1))$.

9. Calcule as integrais:

(a) $\displaystyle\iint_R x\, dxdy$, onde R é o disco de centro na origem e raio 5.

(b) $\displaystyle\iint_R xy\, dxdy$, onde R é a região do primeiro quadrante limitada pelas circunferências $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 25$.

(c) $\displaystyle\iint_R \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dxdy$, onde R é a região interior à cardioide $r = 1 + \sin\theta$ e exterior à circunferência $r = 1$.

(d) $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy$, onde D é a região limitada pelas espirais $r = \theta$ e $r = 2\theta$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

(e) $\displaystyle\iint_D (e^{-x^2-y^2})\, dxdy$, onde D é a região limitada pelo semicírculo $x = \sqrt{4 - y^2}$ e o eixo y.

(f) $\displaystyle\iint_D \sqrt{(x-1)^2 + y^2}\, dxdy$ sendo $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$.

Resp. (a) zero, (b) $\frac{609}{8}$, (c) 2, (d) $24\pi^5$ (e) $\frac{\pi}{2}(1 - e^{-4})$, (f) $\frac{16}{9}$.

10. Esboce a curva e calcule a área da região indicada:

(a) a região limitada por um laço da rosácea $r = \cos 3\theta$ Resp. $\frac{\pi}{12}$.

(b) a região limitada pela lemniscata $r^2 = 4\cos 2\theta$ Resp. 4.