A INTEGRAL DE RIEMANN EM DUAS VARIÁVEIS

1. Integral em retângulos

2. Conceitos básicos de topologia no plano

3. Integral de Riemann em domínios limitados do plano

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado no plano e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função qualquer. Se $\mathcal{R}$ é um retângulo contendo D podemos definir uma extensão de f a $\mathcal{R}$, ou seja, uma nova função $\tilde{f} : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$, cuja restrição a D é f da seguinte forma:

$$\tilde{f} := \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \in D, \\ 0 & \text{se} \quad x \in \mathcal{R} - D. \end{cases} \tag{1}$$

Definição 3.1. *Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado no plano, $f : D \to \mathbb{R}$ e $\tilde{f}$ a extensão de f definida por (1). A integral de f em D é:*

$$\iint_D f := \iint_{\mathcal{R}} \tilde{f}.$$

se $\tilde{f}$ for integrável em $\mathcal{R}$.

Agora, como já observamos, a função $\tilde{f}$ pode ser descontínua em ∂D, mesmo se f for contínua em D. Ocorre que, em muitas casos de interesse, ∂D é um conjunto "pequeno", como veremos.

Definição 3.2. *Dizemos que um conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ tem conteúdo nulo se, dado $\epsilon >$, existir uma família finita de retângulos $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \cdots, \mathcal{R}_n$*

Date: August 13, 2023.

cuja união contém D tais que a soma de suas áreas seja menor do que ϵ, ou seja: $\cup_1^n \mathcal{R}_n \supset D$ e $\sum_1^n A(\mathcal{R}_n) < \epsilon$,

Proposição 3.3. *São subconjunto de conteúdo nulo em $\mathbb{R}^2$.*

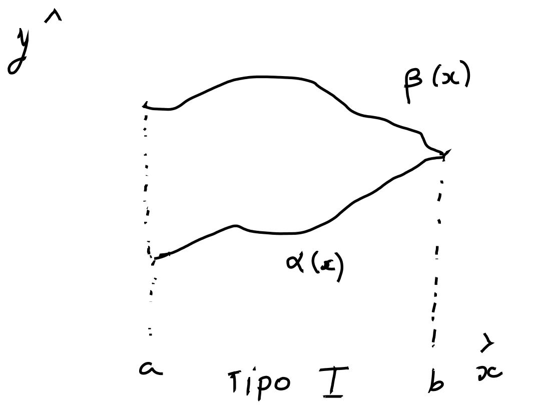
- *Um subconjunto finito.*
- *A união finita de subconjuntos de conteúdo nulo.*
- *O gráfico de uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.*

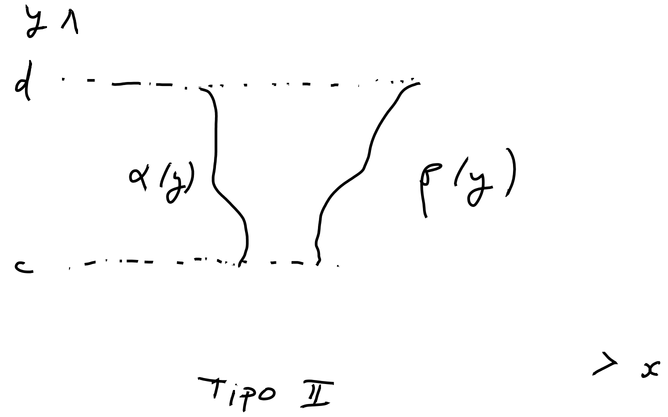
Teorema 3.4. *Se $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ for contínua e lmitada no retângulo $\mathcal{R}$. , exceto em um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ de conteúdo nulo, então f é integrável em $\mathcal{R}$.*

Corolário 3.5. *Se $f : D \to \mathbb{R}$ for contínua e limitada, exceto em um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ de conteúdo nulo, e a fronteira de D também tiver conteúdo nulo então f é integrável.*

Um caso particular importante de domínio com fronteira de conteúdo nulo é o de domínios de um dos seguintes tipos:

- **Domínios do tipo I** - $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$, sendo $a < b$ constantes reais, $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ funções contínuas.
- **Domínios do tipo II** - $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\}$, sendo $a < b$ constantes reais, $\alpha(y)$ e $\beta(y)$ funções contínuas.





Exemplo 3.6. *O conjunto $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^2\}$ é um domínio do tipo I.*

D também é domínio do tipo II, pois $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4, \sqrt{y} \leq x \leq 2.\}$

Algumas propriedades importantes da integral de Riemann são as seguintes:

Proposição 3.7. *(Propriedades algébricas da integral) Suponhamos que $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são integráveis . Então*
a) Se $k \in \mathbb{R}$, kf é integrável em D e

$$\iint_D kf = k \iint_D f.$$

b) $f + g$ é integrável em D e

$$\iint_D f + g = \iint_D f + \iint_D g.$$

c) Se $f(x) \leq g(x), \forall x \in D$ então

$$\iint_D f \leq \iint_D g.$$

d) A função $|f|$ é integrável em D e

$$\left| \iint_D f \right| \leq \iint_D |g| \, .$$

Dem. Vamos demonstrar b), os outros itens são semelhantes e ficam a cargo do leitor.

Seja $L_1 = \iint_a^b f$ e $L_2 = \iint_a^b g$. Dado $\epsilon > 0$, sejam δ_1 e δ_2 tais que $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_1 \Rightarrow |S(f, \dot{\mathcal{P}}) - L_1| < \epsilon/2$ e $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_2 \Rightarrow |S(g, \dot{\mathcal{P}}) - L_2| < \epsilon/2$.

Se $\delta - \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, teremos então $|S(f+g, \dot{\mathcal{P}}) - (L_1 + L_2)| \leq |S(f, \dot{\mathcal{P}}) - L_1| + |S(g, \dot{\mathcal{P}}) - L_2| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. $\square$

Proposição 3.8. *Suponhamos que $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $D = D_1 \cup D_2$ e $D_1 \cap D_2$ tenha conteúdo nulo. então f é integrável em D se e somente se f é integrável em D_1 e D_2 e, nesse caso,*

$$\iint_D f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} g.$$